



MATEMÁTICA

Programa de Estudio

Primero Medio

**Propuesta presentada a revisión del
Consejo Nacional de Educación**

*Texto por incluir
(Carta del Ministro)*

Documento borrador

INDICE

Presentación	4
Nociones básicas	5
-Aprendizajes como integración de conocimientos, habilidades y actitudes	5
-Objetivos Fundamentales Transversales	7
-Mapas de Progreso	8
Consideraciones generales para implementar el programa	10
-Uso del lenguaje	10
-Uso de las Tecnologías de Información y Comunicación	11
-Atención a la diversidad	11
Orientaciones para planificar y evaluar	13
-Orientaciones para planificar	13
-Orientaciones para la evaluación	15
Matemáticas: Propósitos, habilidades y orientaciones didácticas	17
Visión global del año	21
- Cuadro sinóptico de aprendizajes esperados	21
Unidades	
- Semestre 1	22
- Unidad 1. Números	23
- Unidad 2. Álgebra	34
-Semestre 2	43
- Unidad 3. Geometría	44
- Unidad 4. Datos y Azar	53
Material de apoyo sugerido	68
Anexos:	
-Anexo 1: Uso flexible de otros instrumentos curriculares	73
-Anexo 2: Planificación y evaluación: Orientaciones específicas	74
-Anexo 3: Objetivos Fundamentales por Semestre y Unidad.	80
-Anexo 4: Contenidos Mínimos Obligatorios por semestre y unidad	81
-Anexo 5: Relación entre Aprendizajes Esperados, Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO)	83

PRESENTACIÓN

El programa como propuesta para lograr los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos

El programa de estudio ofrece una propuesta para organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar. Esta propuesta tiene como propósito promover el logro de los Objetivos Fundamentales (OF) y el desarrollo los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) que define el marco curricular¹.

La ley establece que cada establecimiento puede elaborar sus propios programas de estudio, previa aprobación de los mismos por parte del Mineduc. El presente programa constituye una propuesta para aquellos establecimientos que no cuentan con programas propios.

Los principales componentes que conforman la propuesta del programa son:

- Una especificación de los aprendizajes que se deben lograr para alcanzar los OF y CMO del marco curricular, lo que se expresa a través de los aprendizajes esperados².
- Una organización temporal de estos aprendizajes en semestres y unidades
- Una propuesta de actividades de aprendizaje y de evaluación, presentadas a modo de sugerencia.

De manera adicional a estos componentes, se presenta un conjunto de elementos que se entregan con la finalidad de orientar el trabajo pedagógico realizado a partir del programa y promover el logro de los objetivos que éste propone.

La totalidad de los elementos que componen el programa se organizan de la siguiente manera:

- Nociones básicas. Esta sección presenta conceptos fundamentales que están a la base del Marco Curricular, y a la vez una visión general sobre la función de los mapas de progreso.
- Consideraciones generales para implementar el programa. Consisten en orientaciones relevantes para trabajar con el programa y organizar el trabajo en torno al mismo.
- Orientaciones para planificar y evaluar. Entregan sugerencias generales para poner estos procesos al servicio del logro de los aprendizajes definidos en el programa.
- Propósitos, habilidades y orientaciones didácticas. Esta sección presenta sintéticamente los propósitos y sentidos sobre los que se articulan los aprendizajes del sector y las habilidades a desarrollar. También entrega algunas orientaciones pedagógicas relevantes para implementar el programa en el sector.
- Visión global del año. Presenta la totalidad de aprendizajes esperados a desarrollar durante el año, organizados de acuerdo a unidades.
- Unidades. Junto con especificar los aprendizajes esperados propios a la unidad, incluyen indicadores de evaluación y sugerencias de actividades que apoyan y orientan el trabajo destinado a promover estos aprendizajes.
- Instrumentos y ejemplos de evaluación. Ilustran formas de apreciar el logro de los aprendizajes esperados, y presentan estrategias diversas que pueden ser utilizadas para este fin.
- Material de apoyo sugerido. Se trata de recursos bibliográficos y electrónicos que pueden ser utilizados para promover los aprendizajes del sector, distinguiendo aquéllos para ser consultados por el docente de los que pueden ser utilizados por los estudiantes.

¹ Decretos supremos 254 y 256 de 2009.

² Algunos casos estos aprendizajes están formulados en los mismos términos que algunos de los OF del marco curricular. Esto ocurre cuando dicho OF puede ser desarrollado de manera íntegra en una misma unidad de tiempo, sin que sea necesario su desglose en definiciones más específicas.

NOCIONES BÁSICAS

1. Aprendizajes como integración de conocimientos, habilidades y actitudes

Habilidades, conocimientos y actitudes...

Los aprendizajes que promueve el marco curricular y los programas de estudio apuntan a un desarrollo integral de los estudiantes. Para estos efectos, estos aprendizajes involucran tanto al desarrollo de conocimientos propios de la disciplina, como habilidades y actitudes.

...movilizados para enfrentar diversas situaciones y desafíos...

Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto del sector de aprendizaje, como al desenvolverse en su entorno. Esto supone una orientación hacia el logro de competencias, entendidas como la movilización de conocimientos, habilidades y actitudes para desarrollar de manera efectiva una acción determinada.

...y que se desarrollan de manera integrada.

Se trata de una noción de aprendizaje en la que estas habilidades, conocimientos y actitudes se desarrollan de manera integrada, enriqueciéndose y potenciándose de manera recíproca.

Requieren ser promovidas de manera sistemática

Las habilidades, conocimientos y actitudes no se adquieren espontáneamente a través del estudio de las disciplinas. Requieren ser promovidas de manera metódica y estar explícitas en los propósitos que articulan el trabajo de los docentes.

Habilidades

Son importantes porque...

Son fundamentales en el actual contexto social

... el aprendizaje involucra no sólo el saber, sino también el saber hacer. Por otra parte, la continua expansión y complejización del conocimiento demanda crecientemente capacidades de pensamiento que permitan, entre otras cosas, utilizar el conocimiento de manera apropiada y rigurosa; adquirir nuevos conocimientos; examinar críticamente la diversidad de fuentes de información disponibles; y generar nuevos conocimientos e información.

Esta situación hace relevante la promoción de diversas habilidades, como por ejemplo: resolver problemas, formular conjeturas, realizar cálculos en forma mental y escrita y verificar proposiciones simples, entre otras.

Se deben desarrollar de manera integrada porque...

Permiten poner en juego los conocimientos

... sin el desarrollo de habilidades, los conocimientos y conceptos que puedan adquirir los alumnos resultan elementos inertes, es decir, elementos que no pueden ser puestos en juego para comprender y enfrentar las diversas situaciones a las que se ven enfrentados.

Conocimientos

Son importantes porque...

Enriquecen la comprensión y la relación con el entorno

... los conceptos de las disciplinas o sectores de aprendizaje enriquecen la comprensión de los estudiantes sobre los fenómenos a los que se ven enfrentados. Les permiten relacionarse con el entorno utilizando nociones de una complejidad y profundidad que complementan de una manera crucial el saber obtenido desde el sentido común y de la experiencia cotidiana. Adicionalmente, estos conceptos son fundamentales para la construcción de nuevos aprendizajes por parte de los estudiantes.

Por ejemplo, si se observa una información en un diario que contenga datos representados en tablas o gráficos, el estudiante utiliza sus conocimientos sobre estadística para interpretar a esa información. Los conocimientos previos le capacita para predecir sobre lo que va a leer para luego verificar sus predicciones en la medida que entiende la información y así construir este nuevo conocimiento.

Se deben desarrollar de manera integrada porque...

Son una base para el desarrollo de habilidades

... son una condición para el desarrollo de las habilidades. Las habilidades no se desarrollan en un vacío, sino sobre la base de ciertos conceptos o conocimientos determinados.

Actitudes

Son importantes porque...

Están involucradas en los propósitos formativos de la educación

... los aprendizajes no son elementos que involucran únicamente la dimensión cognitiva. Siempre están asociados con las actitudes y disposiciones de los estudiantes. Dentro de los propósitos establecidos para la educación se contempla el desarrollo en los ámbitos personal, social, ético y ciudadano. Estos involucran aspectos de carácter afectivo, y a la vez el desarrollo de ciertas disposiciones.

A modo de ejemplo, los aprendizajes involucran actitudes tales como perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos, trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos y respeto por ideas distintas a las propias.

Se deben desarrollar de manera integrada porque...

Son enriquecidas por los conocimientos y habilidades

... en muchos casos requieren de los conocimientos y habilidades para su desarrollo. Estos conocimientos y habilidades entregan herramientas necesarias para elaborar juicios informados, analizar críticamente diversas circunstancias, y para contrastar criterios y decisiones, entre otros procesos involucrados en el desarrollo de actitudes.

A la vez, las actitudes orientan el sentido y el uso que cada alumno otorgue a los conocimientos y habilidades adquiridas. Son por lo tanto un antecedente necesario para hacer un uso constructivo de estos elementos.

2. Objetivos Fundamentales Transversales (OFT)

Son propósitos generales definidos en el currículum...

Son aprendizajes que tienen un carácter comprensivo y general, y que apuntan al desarrollo personal, ético, social e intelectual de los estudiantes. Forman parte constitutiva del currículum nacional, y por lo tanto los establecimientos deben hacerse cargo de promover su logro.

... que deben ser promovidos en la totalidad de la experiencia escolar.

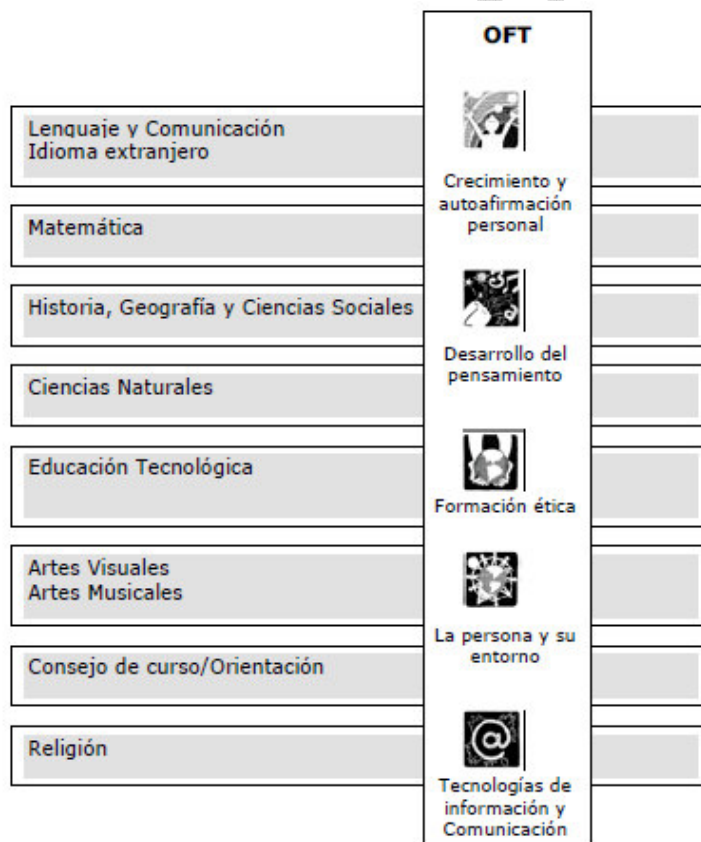
Los OFT no se desarrollan a través de un sector de aprendizaje en particular, sino que dependen del conjunto del currículum. Tienen lugar tanto a través de las diversas disciplinas del currículum, como de las diversas dimensiones del quehacer educativo (por ejemplo, a través del proyecto educativo institucional, la práctica docente, el clima organizacional, la disciplina o las ceremonias escolares).

Integran conocimientos, habilidades y actitudes

No se trata de objetivos que involucran únicamente actitudes y valores. Supone la integración de estos elementos con el desarrollo de conocimientos y habilidades.

Se organizan en una matriz común para educación básica y media.

A partir de la actualización al marco curricular realizada el año 2009, estos objetivos están organizados bajo un esquema común para la Educación Básica y la Educación Media. De acuerdo a este esquema, los Objetivos Fundamentales Transversales se Organizan en 5 ámbitos: crecimiento y autoafirmación personal, desarrollo del pensamiento, formación ética, la persona y su entorno, y tecnologías de información y comunicación.



3. Mapas de progreso

*Describen
sintéticamente
cómo progresa el
aprendizaje...*

Son descripciones generales que señalan de qué manera progresan típicamente los aprendizajes en las áreas clave de un sector determinado. Se trata de formulaciones sintéticas que se centran en los aspectos esenciales de cada sector. A partir de esto ofrecen una visión panorámica sobre el conjunto de la progresión del aprendizaje en los 12 años de escolaridad³.

*... de manera
congruente con el
marco curricular y
los programas de
estudio.*

Los mapas de progreso no establecen aprendizajes adicionales a los definidos en el marco curricular y los programas de estudios. La progresión que describen es una expresión más gruesa y sintética de los aprendizajes que estos dos instrumentos establecen, y que por lo tanto se inscribe dentro de lo que se plantea en ellos. Su particularidad consiste en la visión de conjunto que entregan sobre la progresión esperada a lo largo de toda la asignatura.

¿Qué utilidad tienen los mapas de progreso para el trabajo de los docentes?

*Sirven de apoyo
para planificar y
evaluar...*

Los mapas de progreso pueden ser un apoyo importante tanto para **definir objetivos adecuados** como para realizar el proceso de **evaluación** (ver orientaciones para la planificación y para la evaluación que se presentan en el programa).

Adicionalmente, los mapas de progreso son un referente útil para **atender a la diversidad** de estudiantes dentro del aula.

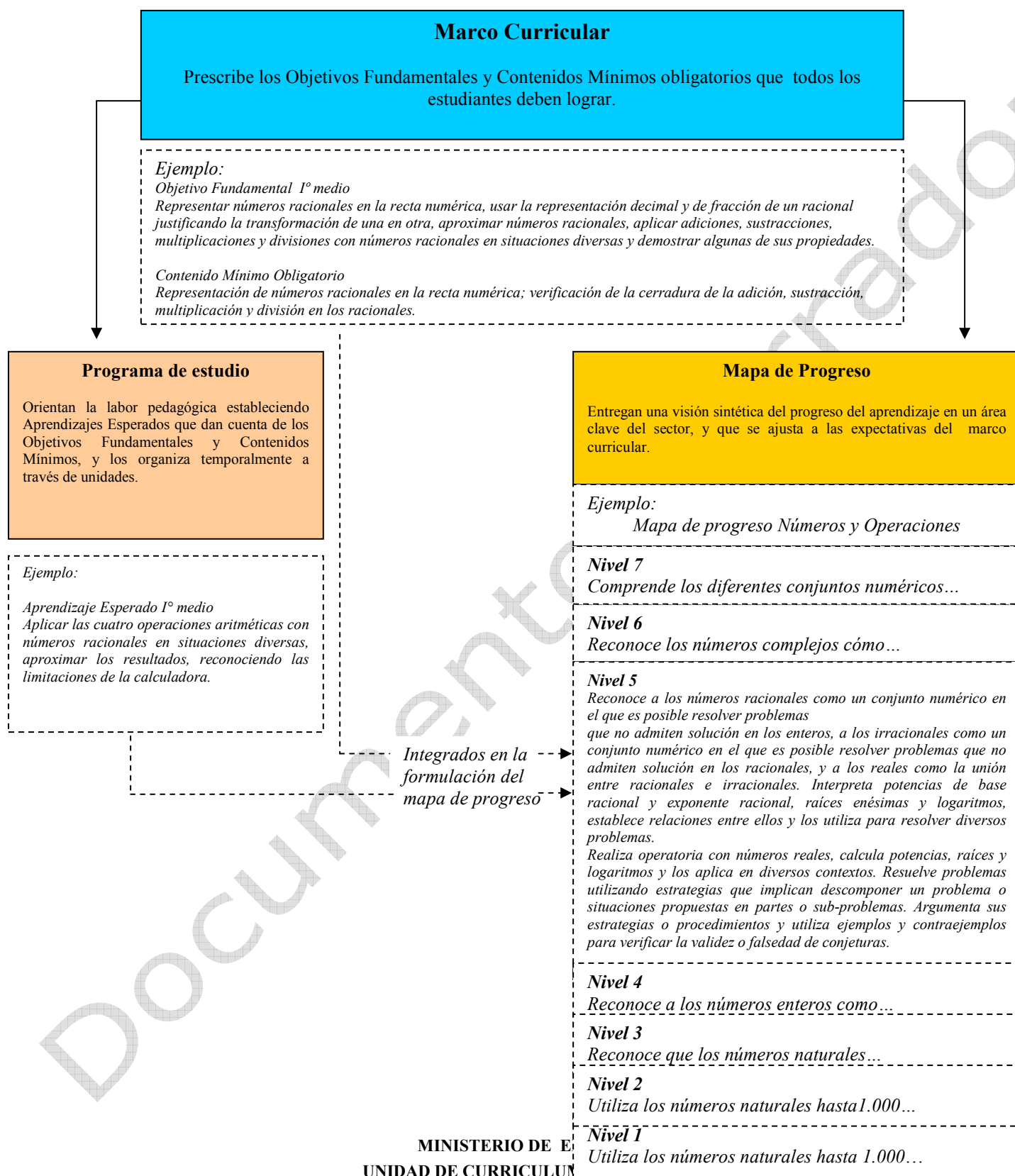
*... y para atender la
diversidad al
interior del curso.*

- Permiten dar un paso que va más allá de la simple constatación que existen distintos niveles de aprendizaje dentro de un mismo curso. Dan pie para caracterizar e identificar con mayor precisión en qué consisten estas diferencias, a partir de su uso para analizar los desempeños de los estudiantes.
- La progresión que describen permite reconocer en qué sentido orientar los aprendizajes de los distintos grupos que se manifiestan en un mismo curso, tanto de aquellos que no han logrado el nivel esperado para el curso, como para aquellos que ya lo han alcanzado o superado.

Expresan el progreso del aprendizaje en un área clave del sector de manera sintética y alineada al marco curricular.

³ Los mapas de progreso describen en 7 niveles el crecimiento típico del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel I corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de Segundo Básico; el nivel 2 corresponde al término de Cuarto Básico, y así sucesivamente. El nivel 7 describe el aprendizaje de un alumno o alumna que al egresar de la Educación Media es "sobresaliente", es decir, va más allá de la expectativa para Cuarto Medio, que describe el nivel 6 en cada mapa.

Relación entre Mapas de progreso, Programa de estudio y Marco Curricular



CONSIDERACIONES GENERALES PARA IMPLEMENTAR EL PROGRAMA

Las orientaciones que se presentan a continuación destacan algunos elementos relevantes al momento de implementar el programa. Algunas de estas orientaciones se vinculan estrechamente con algunos de los OFT contemplados en el currículum.

1. Uso del lenguaje

La lectura, la escritura y la comunicación oral deben ser promovidas en los distintos sectores de aprendizaje

Los docentes deben promover el ejercicio de la comunicación oral, de la lectura y la escritura como parte constitutiva del trabajo pedagógico correspondiente a cada sector de aprendizaje.

Esto se justifica porque las habilidades de comunicación son herramientas fundamentales que los estudiantes deben emplear para alcanzar los aprendizajes propios de cada sector. Se trata de habilidades que no se desarrollan únicamente en el contexto del sector Lenguaje y Comunicación, sino que se consolidan a través del ejercicio en diversos espacios y en torno a diversos temas, y por lo tanto, involucran los otros sectores de aprendizaje del currículum.

Al momento de recurrir a la lectura, la escritura y la comunicación oral, los docentes deben procurar:

Lectura:

- la lectura de distintos tipos de textos relevantes para el sector (textos informativos propios del sector, textos periodísticos, narrativos, tablas y gráficos);
- la lectura de textos de creciente complejidad en los que se utilicen conceptos especializados del sector;
- la identificación de las ideas principales y la localización de información relevante;
- la realización de resúmenes, síntesis de las ideas y argumentos presentados en los textos;
- la búsqueda de información en fuentes escritas, discriminándola y seleccionándola de acuerdo a su pertinencia ;
- la comprensión y dominio de nuevos conceptos y palabras.

Se deben contemplar diversas consideraciones al promover estas habilidades

Escritura:

- la escritura de textos de diversa extensión y complejidad (por ejemplo, reportes, ensayos, descripciones, respuestas breves);
- la organización y presentación de información a través de esquemas o tablas;
- la presentación de las ideas de una manera coherente y clara;
- el uso apropiado del vocabulario en los textos escritos;
- el uso correcto de la gramática y de la ortografía.

Comunicación oral:

- la capacidad de exponer ante otras personas;
- la expresión de ideas y conocimientos de manera organizada;
- el desarrollo de la argumentación al formular ideas y opiniones;
- un uso del lenguaje con niveles crecientes de precisión, incorporando los conceptos propios del sector;
- el planteamiento de preguntas para expresar dudas, inquietudes, y para superar dificultades de comprensión;
- la disposición para escuchar información de manera oral, manteniendo la atención durante el tiempo requerido;
- la interacción con otras personas para intercambiar ideas, analizar información y elaborar conexiones en relación a un tema en particular, compartir puntos de vista y desarrollar acuerdos.

2. Uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TICs)

El uso de las TICs debe ser promovido a través de los sectores de aprendizaje

El desarrollo de las capacidades para utilizar las tecnologías de la información y comunicación (TICs) está contemplado de manera explícita como uno de los Objetivos Fundamentales Transversales del marco curricular. Esto demanda que el dominio y uso de estas tecnologías se promueva de manera integrada al trabajo realizado al interior de los sectores de aprendizaje. Para esto se debe procurar que la labor de los estudiantes incluya el uso de las TICs para:

Se puede recurrir a diversas formas de utilizar estas tecnologías.

- buscar, acceder y recolectar información en páginas web u otras fuentes; y seleccionar esta información examinando críticamente su relevancia y calidad
- procesar y organizar datos utilizando plantillas de cálculo, y manipular la información sistematizada en éstas para identificar tendencias, regularidades y patrones relativos a los fenómenos estudiados en el sector
- desarrollar y presentar información a través del uso de procesadores de texto, plantillas de presentación (Power Point), así como herramientas y aplicaciones de imagen, audio y video
- intercambiar información a través de las herramientas que ofrece Internet como el correo electrónico, Chat, espacios interactivos en sitios web, o comunidades virtuales
- respetar y asumir consideraciones éticas en el uso de las TICs, como el cuidado personal y el respeto por el otro al utilizar estas herramientas, señalar las fuentes de donde se obtiene la información, y respetar las normas de uso y de seguridad de los espacios virtuales.

3. Atención a la diversidad

La diversidad entre estudiantes establece desafíos que deben ser tomados en consideración

En el trabajo pedagógico, el docente debe tomar en cuenta la diversidad entre los estudiantes, ya sea en términos culturales, sociales, étnicos o religiosos; así como en términos de estilos de aprendizaje y de los niveles de conocimiento.

Esta diversidad trae consigo desafíos que requieren ser contemplados por los docentes. Entre estos cabe señalar:

- promover el respeto a cada uno de los estudiantes, en un contexto de tolerancia y apertura, evitando las distintas formas de discriminación
- procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación al contexto y la realidad de los estudiantes
- procurar que todos los estudiantes logren los objetivos de aprendizaje señalados en el currículum, pese a la diversidad que se manifiesta entre ellos

Atención a la diversidad y promoción de aprendizajes

Se debe tener en cuenta que atender a la diversidad de estilos y ritmos de aprendizaje no implica “expectativas más bajas” para algunos estudiantes. Por el contrario, la necesidad de educar en forma diferenciada aparece cuando nos damos cuenta que para que *todos* los alumnos alcancen altas expectativas, debemos reconocer sus necesidades didácticas personales. Aspiramos a que todos los estudiantes alcancen los aprendizajes dispuestos para su nivel o grado.

*Es necesario
atender a la
diversidad para que
todos logren los
aprendizajes.*

Se debe tener en cuenta que atender a la diversidad no implica “expectativas más bajas”, por el contrario, la necesidad de educar en forma diferenciada aparece cuando nos damos cuenta que para que los alumnos alcancen altas expectativas, debemos reconocer sus necesidades didácticas personales. Aspiramos a que todos los estudiantes alcancen los aprendizajes dispuestos para su nivel de curso.

En atención a lo anterior, es conveniente que al momento de diseñar el trabajo en una unidad, el docente debe considerar que para que algunos estudiantes logren estos aprendizajes precisarán más tiempo o métodos diferentes. Para esto debe desarrollar una planificación inteligente que genere las condiciones que le permitan:

*Esto demanda
conocer qué saben,
y en base a esto
definir flexiblemente
las diversas
medidas pertinentes*

- conocer los diferentes niveles de aprendizaje y conocimientos previos de los estudiantes
- evaluar y diagnosticar en forma permanente para reconocer las necesidades de aprendizaje
- definir la excelencia considerando el progreso individual como punto de partida
- incluir combinaciones didácticas (agrupamientos, trabajo grupal, rincones) y materiales diversos (Visuales, objetos manipulables)
- evaluar de diversas maneras a los alumnos y dar tareas con múltiples opciones
- promover la confianza de los alumnos en sí mismo
- Promover un trabajo sistemático por parte de los estudiantes y ejercitación abundante

ORIENTACIONES PARA PLANIFICAR Y EVALUAR

I. ORIENTACIONES PARA PLANIFICAR

La planificación favorece el logro de los aprendizajes

La planificación es un elemento central en el esfuerzo por promover y garantizar los aprendizajes de los estudiantes. Permite maximizar el uso del tiempo y definir los procesos y recursos necesarios para que los estudiantes logren los aprendizajes que deben alcanzar.

El programa sirve de apoyo a la planificación a través de un conjunto de elementos elaborados para este fin

Los programas de estudio del Ministerio de Educación constituyen una herramienta de apoyo al proceso de planificación. Para estos efectos han sido elaborados como un material flexible que los profesores pueden adaptar a su realidad en los distintos contextos educativos del país.

El principal referente que entrega el programa de estudio para planificar son los **aprendizajes esperados**. De manera adicional, el programa apoya de planificación a través de la propuesta de **unidades**, de la **estimación del tiempo** cronológico requerido en cada una, y de la **sugerencia de actividades** para desarrollar los aprendizajes.

Consideraciones generales para realizar la planificación

La planificación es un proceso que se recomienda realizar considerando los siguientes aspectos

Se debe planificar tomando en cuenta la diversidad, el tiempo real, las prácticas anteriores y los recursos disponibles

- La diversidad de niveles de aprendizaje que han alcanzado los estudiantes del curso, lo que implica planificar considerando desafíos para distintos grupos de alumnos.
- El tiempo real con que se cuenta, de manera de optimizar el tiempo disponible.
- Las prácticas pedagógicas que han dado resultados satisfactorios.
- Los recursos para el aprendizaje con que se cuenta: textos escolares, materiales didácticos, recursos elaborados por la escuela o aquellos que es necesario diseñar, laboratorio, materiales disponibles en el Centro de Recursos de Aprendizaje (CRA), entre otros.

Sugerencias para el proceso de planificación

Para que la planificación efectivamente ayude al logro de los aprendizajes, debe estar centrada en torno a estos y desarrollarse a partir de una visión clara de los mismos. Para lograr esto se recomienda desarrollar la planificación en los siguientes términos:

Lograr una visión lo más clara y concreta posible sobre los desempeños que dan cuenta de los aprendizajes.

Partir por una especificación de los aprendizajes esperados que no se limite a listarlos. Una vez identificados, es necesario desarrollar una idea lo más clara posible de las expresiones concretas de estos aprendizajes. Esto implica reconocer qué desempeños de los estudiantes dan cuenta del logro de los aprendizajes. Se debe poder responder preguntas como ¿Qué deberían ser capaces de demostrar los estudiantes que han logrado un determinado aprendizaje esperado?, ¿qué habría que observar para saber que un aprendizaje ha sido logrado?

... y en base a esto decidir las evaluaciones, las estrategias de enseñanza, y la distribución temporal.

- A partir de las respuestas a estas preguntas, decidir las evaluaciones a realizar y las estrategias de enseñanza. Específicamente, se debe identificar qué tarea de evaluación es más pertinente para observar el desempeño esperado, así como las modalidades de enseñanza que facilitarán su desarrollo. En base a este proceso se deben definir las evaluaciones formativas y sumativas, las actividades de enseñanza, y las instancias de retroalimentación. A su vez, esto constituye un antecedente central al momento de distribuir el tiempo del sector, ya sea al realizar la planificación anual, al planificar una unidad, o al realizar un plan de clase.

Para llevar a cabo este proceso, los docentes pueden complementar los programas con los mapas de progreso. Estos entregan elementos útiles para reconocer el tipo de desempeño asociado a los aprendizajes.

Expresiones más concretas respecto de la forma de desarrollar la planificación se pueden encontrar en las orientaciones específicas para el proceso de planificación anual, de unidad y de clase que se presenta en el Anexo 2.

II. ORIENTACIONES PARA LA EVALUACIÓN

Apoya el proceso de aprendizaje al permitir su monitoreo, retroalimentar a los estudiantes y sustentar la planificación.

La evaluación es un proceso que forma parte constitutiva del proceso de enseñanza. No sólo debe ser utilizada como un medio para controlar qué saben los estudiantes, sino que cumple un rol central en la promoción y desarrollo del aprendizaje. Para que la evaluación efectivamente cumpla con esta función debe tener como objetivos:

- Ser un medio con el cual medimos progreso en el logro de los aprendizajes.
- Proporcionar información que permita conocer fortalezas y debilidades de los estudiantes, y sobre esta base retroalimentar la enseñanza y potenciar los logros esperados dentro del sector.
- Ser una herramienta útil para la planificación

¿Cómo promover el aprendizaje a través de la evaluación?

Las evaluaciones adquieren su mayor potencial para promover el aprendizaje si se llevan a cabo considerando lo siguiente:

Explicitar qué se evaluará

- **Informar a los alumnos sobre los aprendizajes que se evaluarán.** Esto facilita que puedan orientar su actividad hacia la consecución de los aprendizajes que deben lograr.

Identificar logros y debilidades

- **Elaborar juicios sobre el grado en que se logran los aprendizajes que se busca alcanzar, fundados en el análisis de los desempeños de los alumnos.** Las evaluaciones entregan información para conocer las fortalezas y debilidades de los estudiantes. El análisis de esta información permite tomar decisiones dirigidas a mejorar resultados alcanzados.

Ofrecer retroalimentación

- **Retroalimentar a los alumnos sobre sus fortalezas y debilidades.** Compartir esta información con los estudiantes permite orientarlos acerca de los pasos que deben seguir para avanzar. Permite también desarrollar procesos metacognitivos y reflexivos destinados a favorecer sus propios aprendizajes, y que a la vez facilitan involucrarse y comprometerse con éstos.

¿Cómo se pueden articular los Mapas de Progreso del Aprendizaje con la evaluación?

Los Mapas de Progreso ponen a disposición de las escuelas de todo el país un mismo referente para observar el desarrollo del aprendizaje de los alumnos, ubicándolos en un continuo de progreso.

Los Mapas de Progreso apoyan el seguimiento de los aprendizajes en tanto permiten:

Los mapas apoyan diversos aspectos del proceso de evaluación

- Reconocer aquellos aspectos y dimensiones que son esenciales de evaluar.
- Clarificar la expectativa de aprendizaje nacional, al conocer la descripción de cada nivel, sus ejemplos de desempeño y el trabajo concreto de estudiantes que ilustran esta expectativa.

- Observar el desarrollo, progresión o crecimiento de las competencias de un alumno, al constatar cómo sus desempeños se van desplazando en el mapa.
- Contar con modelos de tareas y preguntas que permiten a cada alumno evidenciar sus aprendizajes.

En el anexo 2 se presentan orientaciones específicas respecto de pasos relevantes a considerar en el diseño de las evaluaciones.

Documento borrador

Matemática: Propósitos, Habilidades y Orientaciones Didácticas

El aprendizaje de la Matemática ayuda en la comprensión de la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana. Entre estas herramientas se encuentra el cálculo, el análisis de la información proveniente de diversas fuentes, la capacidad de generalizar situaciones, formular conjeturas, evaluar la validez de resultados y la selección de estrategias para resolver problemas. Todo esto contribuye al desarrollo de un pensamiento lógico, ordenado, crítico y autónomo y al desarrollo de actitudes tales como la precisión, rigurosidad, perseverancia y confianza en sí mismo, las cuales se valoran no sólo en la Ciencia y la Tecnología sino también en todos los aspectos de la vida cotidiana.

El aprendizaje de la matemática contribuye también al desarrollo de habilidades asociadas a la comunicación, proporcionando precisión y rigurosidad en la presentación de la información, así mismo generando en el receptor, las competencias para exigir precisión y rigor tanto en la información como en los argumentos que recibe.

El conocimiento matemático y la capacidad para usarlo tienen profundas e importantes consecuencias en el desarrollo, desempeño y vida de las personas. En efecto, el entorno social valora el conocimiento matemático y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. De esta forma el aprendizaje de la matemática influye en el concepto que niños, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus capacidades. El proceso de aprender matemática, por lo tanto, interviene en la capacidad de la persona para sentirse un ser autónomo y valioso en la sociedad. En consecuencia, la calidad, pertinencia y amplitud de ese conocimiento afecta las posibilidades y la calidad de vida de las personas, y a nivel de la sociedad, afecta el potencial de desarrollo del país.

La matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y sus relaciones, preparando a los estudiantes en la comprensión del medio y de las complejas relaciones que se dan en un espacio simbólico y físico de complejidad creciente. Espacios en los que la cultura, la tecnología y las ciencias se están redefiniendo y complejizando en forma permanente, donde las finanzas, los sistemas de comunicaciones, las interrelaciones entre naciones y culturas se relacionan y se globalizan.

Habilidades Matemáticas

En el aprendizaje de las Matemáticas se desarrollan competencias intelectuales del estudiante tales como el razonamiento lógico, la visualización espacial y el pensamiento analítico, el cálculo, el razonamiento, el modelamiento y las habilidades para resolver problemas.

La tabla siguiente puede resultar útil, por ejemplo, para:

- Observar transversalmente las habilidades que se desarrollan en el n sector
- Focalizarse en un nivel y diseñar actividades y evaluaciones que enfatizen dichas habilidades.
- Situar en el nivel y observar las habilidades que se intencionaron los años anteriores y las que se trabajarán más adelante.
- Observar diferencias y similitudes en los énfasis por ciclos de enseñanza.

Habilidades de pensamiento matemático			
7° Básico	8° Básico	I° Medio	II° Medio
Resolución de problemas en contextos diversos y significativos utilizando los contenidos del nivel.	Resolución de problemas en contextos diversos y significativo	Analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos	Aproximar números variados mediante métodos
Analizar la validez de los procedimientos utilizados y de los resultados obtenidos.	Evaluar la validez de los resultados obtenidos y el empleo de dichos resultados para fundamentar opiniones y tomar decisiones.	Fundamentar opiniones y tomar decisiones.	Argumentar respecto a las variaciones que se producen en la representación gráfica de funciones
Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica.			Ubicar raíces en la recta numérica
Realizar cálculos en forma mental y escrita.	Realizar cálculos en forma mental y escrita.		
Emplear formas simples de modelamiento matemático	Emplear formas simples de modelamiento matemático.	Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables.	Modelar situaciones diversas a través de funciones
	Verificar proposiciones simples, para casos particulares	Diferenciar entre verificación y demostración de propiedades	Demostrar propiedades y teoremas

Orientaciones didácticas

Este sector está concebido como una oportunidad para que los estudiantes desarrollen **aprendizajes para la vida**, ya que la Matemática constituye un área de la cultura poderosa en la comprensión, explicación y predicción de situaciones y fenómenos del medio que nos rodea. De esto se desprende la importancia del esfuerzo que deben hacer los docentes para que todos los estudiantes en nuestro país aprendan los conocimientos y desarrollen las capacidades propias de esta disciplina. Se sugieren en estos programas algunas orientaciones que pueden ayudar a los docentes en su planificación y en sus clases para cumplir con este objetivo:

Los conceptos Matemáticos: profundidad e integración

Los estudiantes deben desarrollar y explorar las ideas matemáticas en profundidad y deben ver las matemáticas como un todo integrado, no como fragmentos aislados del conocimiento. A los estudiantes se les debe enfrentar a variadas experiencias de aprendizaje para ayudarlos a desarrollar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos así como sus conexiones y aplicaciones de tal manera que les permita participar activamente y obtener mayor confianza en explorar y aplicar las matemáticas. Se recomienda especialmente para la enseñanza media, el uso de representaciones visuales, metáforas, trabajos prácticos y el apoyo de la tecnología como parte de estas experiencias de aprendizaje.

El uso del contexto

Es importante que la matemática sea presentada como una disciplina culturalmente situada, con historia, con impacto en otras áreas del conocimiento científico, social o tecnológico, con consecuencias y aplicaciones. La pregunta acerca del origen de los modelos matemáticos y su ubicación histórica en el desarrollo del pensamiento de la humanidad, son anclas importantes del conocimiento que debemos proponer a nuestros estudiantes. El uso de metáforas y representaciones cercanas a los estudiantes, son un recurso didáctico altamente recomendado, especialmente en las etapas iniciales. A su vez, se sugiere el uso de las aplicaciones de la matemática a otras áreas del conocimiento y en la vida diaria, como un apoyo en la construcción del conocimiento matemático. Este enfoque puede ser complementado en la enseñanza media enfatizando la generalización y la importancia de los modelos abstractos.

Razonamiento matemático y resolución de problemas

La matemática se construye a partir de regularidades que subyacen a situaciones aparentemente diversas, de esta forma contribuye al desarrollo del razonamiento por sobre la acción mecánica. Por esto es central hacer uso frecuentemente de preguntas y situaciones que inviten a buscar regularidades, desarrollar la noción de estrategia, hacerlas explícitas, comparar diversas formas de abordar problemas, a justificar y cuando sea adecuado, de acuerdo con el nivel e interés de los estudiantes, demostrar las proposiciones matemáticas, así como generar situaciones en las que sea natural que los estudiantes formulen y verifiquen conjeturas acerca del comportamiento de los elementos y relaciones con que se trabaja, analizar los procedimientos por medio de los cuales se resuelve un problema justificar y cuando sea adecuado, verificar en casos particulares, resultados, propiedades y relaciones. Aunque los estudiantes deben ser competentes en variadas y diferentes habilidades matemáticas, el exceso de énfasis en las habilidades de procedimiento sin comprensión de los principios matemáticos subyacentes debe evitarse.

En la enseñanza media el modelamiento matemático ofrece múltiples oportunidades para comprender el sentido de las relaciones y conceptos que se propone a los estudiantes. Variadas disciplinas como la física, economía o la administración, hacen frecuentemente uso de modelos matemáticos, lo cual permite que éstos, puedan servir tanto de contexto para relaciones matemáticas como de situaciones en sí mismas en las que se puede aplicar el conocimiento matemático en elaboración.

Uso del error

Asociado a un ambiente de búsqueda y creación, está el uso adecuado del error. En un clima de construcción, un error puede, en manos de un educador, ser una oportunidad para aprendizajes especialmente significativos. El error puede considerarse como un elemento concreto para trabajar en clases la diversidad, permitiendo que todos los alumnos alcancen los aprendizajes propuestos.

Aprendizaje matemático y desarrollo personal

La clase de matemática ofrece abundantes oportunidades para el auto conocimiento y las interacciones sociales. Es una oportunidad para la meta cognición: ¿cómo lo hice?, ¿cómo lo hicieron?, ¿de qué otra manera es posible? Adicionalmente, el concepto que cada uno de nosotros tiene acerca de su capacidad para aprender y hacer matemática se ha construido a través de la retroalimentación que la experiencia nos ha brindado. En este aspecto, el reconocimiento, tanto de los esfuerzos como de los logros, es un instrumento poderoso en manos del docente. A su vez, la valoración de las diferencias, la aceptación de los logros o acciones de los pares, un clima de confianza y la forma que cada uno enfrenta las situaciones de éxito o fracaso, tanto propias como las de los demás, contribuyen a desarrollar en cada alumno o alumna la confianza en sí mismos.

Tecnologías digitales y aprendizaje matemático

El programa propone el uso de software y ambientes creados con tecnologías digitales para ampliar las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. Estas tecnologías permiten representar nociones abstractas a través de modelos en los que es posible experimentar con ideas matemáticas, y crear situaciones en las que los estudiantes pueden explorar las características, límites y posibilidades de conceptos, relaciones o procedimientos matemáticos. Los procesadores geométricos, simbólicos y de estadística son laboratorios para explorar relaciones y ponerlas a prueba. Con un procesador simbólico, grandes números o números muy pequeños pueden ser analizados y dotados de sentido, y se puede estudiar el comportamiento de funciones, incluso de alta complejidad. Internet ofrece múltiples ambientes en los que se puede encontrar representaciones dinámicas de una gran cantidad de objetos matemáticos. Los procesadores geométricos, en tanto, permiten la experimentación con nociones y relaciones, sea de la geometría euclidiana, cartesiana o vectorial. Todo esto, en un espacio de alto interés para los niños, niñas y jóvenes, y de alto impacto en cuanto a su formación para una vida cada vez más influida por las tecnologías digitales.

Clima y motivación

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática se debe propiciar un ambiente creativo y crítico que favorezca la formulación verificación o refutación, de parte del que aprende, de conjeturas en los problemas que aborda. Un ambiente en que el error la duda o pregunta, son considerados parte integrante y valiosa del proceso de construcción del conocimiento, ambiente en el que los aportes de todos son valorados y puestos en el contexto de una búsqueda y construcción colectiva. Debe constituirse en un espacio en el que es natural el análisis de las acciones y procedimientos de modo de comparar caminos alternativos.

VISIÓN GLOBAL DEL AÑO

Cuadro sinóptico de aprendizajes esperados

1° Semestre		2° semestre	
Unidad 1 Números	Unidad 2 Álgebra	Unidad 3 Geometría	Unidad 4 Datos y Azar
<ol style="list-style-type: none"> 1. Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales. 2. Justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales. 3. Establecer relaciones de orden entre números racionales. 4. Representar números racionales en la recta numérica. 5. Utilizar la calculadora para realizar cálculos reconociendo sus limitaciones. 6. Verificar la densidad de los números racionales. 7. Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales. 8. Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero. 9. Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias. 2. Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias. 3. Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales. 4. Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín. 5. Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación. 6. Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico. 2. Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar. 3. Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano. 4. Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano. 5. Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano. 6. Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas. 7. Formular y verificar conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos. 8. Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Obtener información a partir del análisis de datos, en diversos contextos, presentados en gráficos y tablas de frecuencia, considerando la interpretación de medidas de tendencia central. 2. Producir información, en contextos diversos, a través de gráficos y tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, manualmente o mediante herramientas tecnológicas. 3. Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia. 4. Calcular la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas desde una población. 5. Formular conjeturas y verificarlas en casos particulares acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha población. 6. Interpretar información, en diversos contextos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando. 7. Producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando. 8. Utilizar el cálculo de medidas de tendencia central y de posición para analizar muestras de datos agrupados en intervalos. 9. Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.
Tiempo estimado 65horas	Tiempo estimado 7o horas	Tiempo estimado 65 horas	Tiempo estimado 80 horas

SEMESTRE 1

UNIDAD 1 Números

Propósito de la unidad

En esta unidad se recogen los aprendizajes que los estudiantes ya tienen sobre números enteros, fracciones y decimales, para introducir los números racionales. Se espera que los estudiantes comprendan sus características y propiedades, y sean capaces de ordenarlos, transformar de fracciones a números decimales justificando la transformación realizada, y operar con ellos. En esta unidad se introducen también las potencias de base racional y exponente entero, de modo que los estudiantes comprendan sus propiedades y las apliquen en la resolución de problemas.

Conceptos claves

Números racionales – potencias de base racional y exponente entero.

Prerrequisitos

- Operatoria de números enteros.
- Potencias de base entera y exponente natural.
- Propiedades de las potencias de base natural, fraccionaria y decimal con exponente natural.

Contenidos disciplinares

- Operaciones aritméticas con números racionales.
- Potencias de base racional y exponente entero.
- Propiedades de las potencias de base racional y exponente entero.

Habilidades

- Reconocer si un problema puede tener solución en los números enteros.
- Identificar los números racionales como un cociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero.
- Transformar números de notación decimal a fracción y viceversa.
- Resolver situaciones en las que es necesario operar con números racionales.
- Conjeturar acerca de las propiedades de los números racionales.
- Utilizar las potencias de base racional y exponente entero para representar situaciones.

Actitudes

- Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en diversos contextos.

Aprendizajes esperados	Sugerencias de Indicadores de evaluación
<i>Se espera que los estudiantes sean capaces de:</i>	<i>Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:</i>
1. Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.	<ul style="list-style-type: none"> Indican si la solución de una ecuación de primer grado pertenece o no al conjunto de números enteros. Reconocen cuando un problema, contextualizado, puede o no tener soluciones en el conjunto de los números enteros. Establecen condiciones para que al dividir dos números enteros el cociente sea un número entero, y condiciones para que sea un número decimal positivo o negativo. Dan ejemplos de la vida cotidiana en que la información numérica corresponde a números racionales negativos. Identifican los números racionales como aquellos que pueden expresarse como un cociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero.
2. Justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales.	<ul style="list-style-type: none"> Dan características del conjunto de los números racionales. Justifican los pasos de un procedimiento para expresar como cociente de enteros un número decimal periódico o semiperiódico. Conjeturan acerca de la existencia de números que expresados como decimales no tengan periodo. Conjeturan acerca de la existencia de números que no pueden ser expresados como cociente de enteros.
3. Establecer relaciones de orden entre números racionales.	<ul style="list-style-type: none"> Formulan estrategias para comparar números decimales semiperiódicos. Comparan números periódicos. Ordenan números racionales de manera creciente.
4. Representar números racionales en la recta numérica.	<ul style="list-style-type: none"> Formulan estrategias para ubicar en la recta numérica números decimales periódicos. Ubican en la recta numérica números racionales de acuerdo a restricciones dadas. Por ejemplo, ubican cinco números que se encuentren entre 0,01 y 0,02 de manera que la cifra de las milésimas sea un número par.
5. Utilizar la calculadora para realizar cálculos reconociendo sus limitaciones.	<ul style="list-style-type: none"> Sistematizan procedimientos de cálculo escrito con ayuda de la calculadora de las cuatro operaciones con números racionales. Realizan aproximaciones de los resultados obtenidos, mediante redondeo y truncamiento. Reconocen las limitaciones de la calculadora para aproximar decimales.

6. Verificar la densidad de los números racionales.	<ul style="list-style-type: none"> • Proponen algoritmos que permiten intercalar números entre dos números racionales dados. Por ejemplo, el promedio de los números dados. • Usan el valor posicional para mostrar que, por ejemplo, entre 0,1 y 0,2 se encuentran : 0,11 , 0,12;.....
7. Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales.	<ul style="list-style-type: none"> • Argumentan acerca de la cerradura de la suma y multiplicación en los racionales. • Establecen las operaciones que son cerradas en los números racionales y justifican matemáticamente sus resultados.
8. Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.	<ul style="list-style-type: none"> • Identifican situaciones que pueden ser representadas por medios de potencias de base racional y exponente entero. • Realizan operaciones de multiplicación y división de potencias de base racional y exponente entero utilizando sus propiedades. • Resuelven problemas utilizando potencias de base racional y exponente entero.
9. Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.	<ul style="list-style-type: none"> • Explican los procedimientos empleados para resolver problemas que involucran números racionales. • Evalúan las soluciones de problemas con racionales en función del contexto. • Aplican propiedades de las potencias de base racional y exponente entero en la resolución de problemas. • Emplean más de una estrategia para resolver problemas referidos a potencias de base racional y exponente entero.

En relación a los OFT, esta unidad promueve

Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos.

- Participa de manera propositiva en actividades grupales.
- Es responsable en la tarea asignada.
- Toma iniciativa en actividades de carácter grupal.
- Proponen alternativas de solución a problemas relacionados con números enteros y potencias de base natural y exponente natural en actividades grupales.

Observaciones al docente. 1° Medio

Se sugiere introducir los números racionales como una extensión del conjunto de los números enteros, justificando su necesidad al mostrar problemas donde es imposible una solución contando sólo con números enteros. Se propone caracterizar los números racionales como aquellos que se pueden expresar como un cociente entre dos números enteros con divisor distinto de cero. Se recomienda, además, situar a los estudiantes en el contexto histórico en que estos números cobraron relevancia y los problemas que solucionaron, así como también mostrar ejemplos de números que no son racionales.

La unidad ofrece la oportunidad para visitar, nuevamente, los conceptos de fracción y de número decimal, así como sus propiedades y los procedimientos para operar con esos números. Estos son dos temas en los que suele haber dificultades y lagunas de aprendizaje; de modo que, reubicar esos números y sus operaciones en el contexto de los racionales y mediante el uso de las potencias de diez, puede contribuir, tanto a su comprensión, como a asegurar las necesarias destrezas en la operatoria.

La condición, impuesta a los números racionales, de ser expresables mediante un cociente de números enteros sugiere la necesidad de expresar decimales como fracciones. En esa búsqueda cobra sentido y valor, tanto la divisibilidad entre enteros como la relación entre el resto de la división con el período en la representación decimal. Más que las reglas de operación o los algoritmos, lo que interesa son los procesos. La exploración de situaciones en los que el desarrollo decimal presenta o no un período es la distinción con la que los estudiantes pueden comprender la diferencia entre un número racional y uno irracional.

La ubicación de números en la recta numérica contribuye a la comprensión de dichos números. La ubicación de un racional en la recta numérica, prepara la noción de intervalo que será utilizada más adelante para tratar las probabilidades.

La unidad introduce las potencias de exponente cero y negativas de números racionales. Completando así las potencias de base racional y exponente entero. Se sugiere relacionar el valor posicional de la notación decimal con las potencias de diez.

Se sugiere trabajar las cuatro operaciones con números racionales, en contextos de la resolución de problemas ligados a la vida cotidiana y a temas de otros sectores de aprendizaje. La resolución de problemas genera además, espacio para abordar el concepto de cifras significativas y de aproximación.

Ejemplos de actividades

AE 1: Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.

Actividades

1.- Identifican ecuaciones de primer grado que no admiten solución en los números enteros, pero que sí admiten solución en los números racionales no enteros. Por ejemplo, ecuaciones del tipo:

- $2x - 1 = 6$
- $5(4x + 1) = 2(6x + 3)$

2.- En ecuaciones del tipo $ax + b = c$, donde la incógnita es x , determinan valores para a, b, c , de manera que:

- La ecuación admita una solución entera.
- La ecuación admita una solución racional no entera.

3.- Identifican problemas en contextos cotidianos cuya solución pertenece a los números enteros y aquellos que admiten solución en los números racionales no enteros. Por ejemplo, identifican cuál de los problemas siguientes admite solución entera y cuál solución racional no entera:

- Si al triple de las bolitas que tiene una persona le agrega una bolita, entonces tiene 21 bolitas.
- Una persona abona \$10.000 de una deuda y el resto lo divide en tres partes iguales de \$6.000. ¿Cuál es la deuda?

4.- Inventan problemas que:

- Admiten solución en los números enteros.
- Admiten solución en los números racionales no enteros.

AE 2: Justificar matemáticamente que los números decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales.

Actividades

1.- Caracterizan el conjunto de los números racionales.

2.- Demuestran que los siguientes números se pueden escribir como una fracción:

- Números de la forma $0,\overline{a}$, $0,\overline{ab}$, $0,\overline{abc}$, etc.
- Números de la forma $0,0\overline{a}$, $0,0\overline{ab}$, $0,0\overline{abc}$, etc.
- Números de la forma $0,00\overline{a}$, $0,000\overline{a}$, $0,00\overline{ab}$, $0,00\overline{abc}$, $0,000\overline{abc}$ etc.
- Números de la forma $0,\overline{ab}$, $0,0\overline{ab}$, $0,\overline{cdab}$, $0,00\overline{cdeabc}$, $0,000\overline{abc}$ etc.
- Números de la forma $a,0\overline{b}$, $a,0b\overline{c}$, $a,00bc\overline{def}$, a,\overline{bc} , etc.

Observaciones al docente: Para el caso de un número decimal infinito periódico el docente podría plantear, por ejemplo, la siguiente ecuación usando el decimal 0,666... (se repite el número 6 infinitamente)

$$x = 0,666... \quad \text{amplificando ambos lados por 10 tendrá:}$$
$$10 \cdot x = 10 \cdot 0,666...$$

Restando la primera ecuación a la segunda, se obtiene:

$$9 \cdot x = 6$$

Y multiplicando por el inverso multiplicativo de 9 se obtiene: $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Se sugiere dar tiempo a los estudiantes para que intenten el mismo procedimiento usado anteriormente (amplificar por 100) para transformar este número 1,1444... a fracción. Verifican que el número decimal asociado a la fracción obtenida es igual al número decimal 1,144. Se sugiere al docente someter a discusión este procedimiento y dar tiempo para que los alumnos intenten otra estrategia.

Para el caso de número decimal infinito semiperiódico el docente podría plantear, por ejemplo, la siguiente ecuación usando el decimal 1,1444... (explica a los estudiantes que el número 4 se repite infinitamente)

$$x = 1,1444 \quad \text{amplificando ambos lados por 100, se obtendrá:}$$
$$100 \cdot x = 114,44$$

Restando la primera ecuación a la segunda, se obtiene:

$$99 \cdot x = 113,3$$

Amplificando ambos lados por 10, obtenemos:

$$990 \cdot x = 1133$$

Y multiplicando por el inverso multiplicativo de 990, se obtiene:

$$x = \frac{1.133}{990}$$

AE 3: Establecer relaciones de orden entre números racionales.

AE 4: Representar números racionales en la recta numérica.

Actividades

1.- Formulan estrategias para ubicar en la recta numérica los siguientes tipos de números:

- Decimales finitos
- Decimales periódicos.
- Decimales semiperiódicos.

2.- Formulan estrategias para comparar números:

- Decimales finitos.

- Decimales periódicos y semiperiódicos.

3.- Comparan fracciones utilizando los siguientes procedimientos:

- Conversión a decimales.
- Conversión a fracciones de denominadores iguales.
- Multiplicaciones de numeradores por denominadores: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$

4.- Determinan números de acuerdo a restricciones dadas. Por ejemplo:

- Determinan 10 números racionales mayores que 0,11 y menores que 0,12
- Determinan 10 números racionales x , tales que $\frac{1}{7} < x < \frac{1}{6}$
- Determinan números racionales cuya distancia a $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{5}{3}$ y que sean menores que $\frac{12}{5}$

Observaciones al docente

Se sugiere al docente que 0,11 lo presente en la forma 0,110, o en la forma 0,1100, lo mismo para el decimal 0,12.

En el caso de las fracciones $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{6}$ se sugiere que las amplifiquen por un número adecuado de manera de tener denominadores iguales, y posteriormente que amplifiquen por potencias de 10 hasta obtener claridad acerca de los números que se deben insertar.

AE 5: Utilizar la calculadora para realizar cálculos reconociendo sus limitaciones.

Actividades

1.- Realizan aproximaciones de cálculos y las verifican utilizando la calculadora.

2.- Verifican que los resultados que se obtienen con calculadoras al realizar cálculos de números decimales periódicos y semiperiódicos son aproximaciones del resultado real.

Por ejemplo, discuten acerca de los diferentes resultados que se obtiene al calcular el área de un rectángulo de lados $\frac{5}{3}cm$ y $\frac{17}{7}cm$ utilizando calculadoras que arrojan distinta cantidad de cifras decimales en el visor.

3.- Utilizan la calculadora para realizar evaluar expresiones en contextos del mundo que nos rodea. Por ejemplo, determinan la masa de la tierra evaluando la expresión $M_T = \frac{gr^2}{G}$, donde $g = 9,8m/s^2$, $r = 6,38 \cdot 10^6$, $G = 6,67 \cdot 10^{24} Nm^2 / kg^2$

AE 6: Verificar la densidad de los números racionales.

Actividades

1.- Realizan las siguientes actividades:

- Eligen dos números racionales positivos al azar, por ejemplo 3 y 7.

A continuación:

- Los ubican en la recta numérica.
- Sacan su promedio y lo ubican en la recta numérica.
- Verifican que la distancia entre el promedio y 3, y la distancia entre el promedio y 7 son iguales.

- Realizan el proceso anterior con números enteros negativos.

- Realizan el proceso anterior con números racionales no enteros.

- Generalizan el proceso seguido, es decir, concluyen la propiedad: "entre dos números racionales siempre hay un número racional".

Observaciones al docente

El docente puede proponer a sus estudiantes que realicen la actividad anterior pero con expresiones algebraicas. Es decir, que:

- Consideren a, b racionales tales que $a < b$.
- Obtengan su promedio y demuestren que es mayor que a , pero menor que b .
- Obtengan el promedio entre a y el promedio $\frac{a+b}{2}$, y que demuestren que

se encuentre entre esos números.

Y así sucesivamente.

AE 7: Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales.

Actividades

1.- Demuestran que la suma de dos racionales es siempre racional.

2.- Demuestran que operaciones combinadas con números racionales siempre dan un número racional.

AE 8: Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.

Actividades

1.- Identifican la propiedad que permite resolver potencias del tipo:

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{a}{b}\right)^n, m, n \in \mathbb{Z}$, o $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n, m, n \in \mathbb{Z}$

$$b) \left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{c}{d}\right)^m, m \in \mathbb{Z}, \text{ o } \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^m, m \in \mathbb{Z}$$

$$c) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m, m, n \in \mathbb{Z}$$

$$d) \left(\frac{a}{b}\right)^m, m \in \mathbb{Z}$$

2.- Utilizando las propiedades anteriores realizan las siguientes demostraciones:

$$a) \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}, m \in \mathbb{Z}.$$

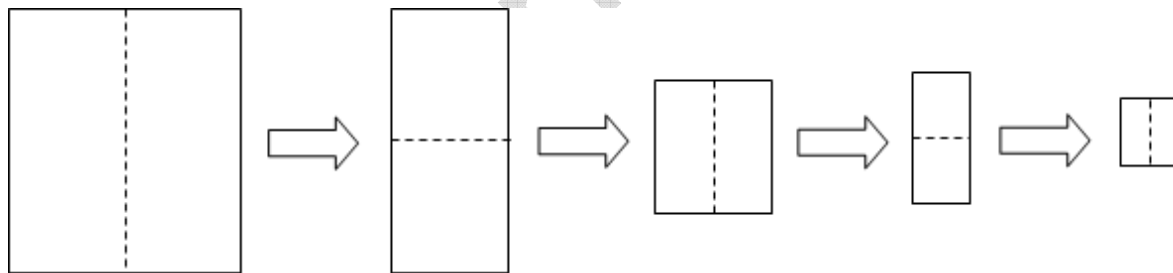
$$b) \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, m \in \mathbb{Z}$$

AE 9: Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.

Actividades

1.- Resuelven problemas que involucran potencias de base racional y exponente entero. Por ejemplo:

a) Un trozo rectangular de cartulina de lado 40cm de largo por 30cm de ancho se dobla sucesivamente por la mitad según muestra la figura:



- Responden preguntas tales como:

- ¿Cuánto medirá el área del cuadrado de la figura resultante después de hacer 8 dobleces?
- ¿Cuánto medirá el área del cuadrado resultante después de hacer n dobleces?

Observaciones al docente: Los estudiantes pueden realizar cálculos apropiados para estimar el área de la figura obtenida después del octavo doblez. Sin embargo, se sugiere al docente guiar el trabajo de los estudiantes en la notación de potencias para concluir que, después de n dobleces, el área de la figura es $2^{-n} \cdot 1200 \text{ cm}^2$.

b) Calculan el volumen de un paralelepípedo de largo 0,2 km, ancho 100 m y 30.000 cm de alto, y lo expresan en m^3

c) Realizan comparaciones entre cantidades expresadas en potencias. Por ejemplo, calculan cuántas veces es mayor la distancia de la tierra a la estrella más cercana, que el largo de una bacteria que mide $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ 2.- Resuelven problemas en contextos cotidianos. Por ejemplo,

Las diferentes compañías telefónicas presentan ofertas de planes en UF a sus clientes en los que se incluye una determinada cantidad de minutos para hablar y un tiempo determinado para una conexión a Internet, por ejemplo:

Telefonía e Internet		
Planes	Velocidad (kbps)	Precio
A	128 – 64 kbps	1,82 UF
B	256 – 128 kbps	2,5 UF
C Inalámbrico	512 – 128 kbps	1,93 UF + instalación
D Inalámbrico	256 – 128 kbps	2,35 UF + instalación

Precio de instalación: \$9.990

Responden preguntas como las siguientes:

- ¿Cuánto cuesta cada plan con el valor de la UF al día de hoy?
- ¿Cuál es la diferencia en pesos entre los planes A y B, y entre C y D?
- Si la UF aumenta un 0,1%, ¿en cuánto aumenta el valor del plan más caro?

3.- Resuelven problemas relativos a operaciones aritméticas en contextos matemáticos. Por ejemplo:

- Dados dos números racionales P y Q tales que: $0 < P < Q < 1$,

- Demuestran que $P \cdot Q$ se encuentra entre 0 y P
- Demuestran que $P + Q$ se encuentra entre Q y $2Q$

Actividad de Evaluación (Números 1º Medio)

Aprendizaje Esperado:

Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.

Indicadores de Evaluación:

- Indican si la solución de una ecuación de primer grado pertenece o no al conjunto de números enteros.
- Reconocen cuando un problema, contextualizado, puede o no tener soluciones en el conjunto de los números enteros.
- Establecen condiciones para que al dividir dos números enteros el cociente sea un número entero y condiciones para que sea un número decimal positivo o negativo.
- Dan ejemplos de la vida cotidiana en que la información numérica corresponde a números racionales.
- Identifican los números racionales como aquellos que pueden expresarse como un cociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero.

Instrucciones.

Responde a las interrogantes de acuerdo a las condiciones dadas en los enunciados.

<p>1. Indique las condiciones que deben cumplir tres números enteros: a, b y c, para que la ecuación $ax + b = c$</p> <ul style="list-style-type: none"> tenga una solución entera. tenga como solución un número racional positivo. <p>2. Una excursión tiene una relación Mujeres – Hombres de 5 es a 3. Se incorporan tres hombre y la relación pasa a ser 2 es a 1.</p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Cuáles son los datos del problema? ¿Cuáles son las incógnitas? Escriba una ecuación que represente la relación entre las variables y los datos del problema. La solución del problema, ¿pertenece a los números enteros? Justificar. 	<p>Criterios de Evaluación.</p> <p>1. Indican si la solución de una ecuación de primer grado es entera.</p> <p>2. Reconocen el tipo de soluciones de un problema: entera o racional.</p> <p>3. Identifican números racionales.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

UNIDAD 2 Álgebra

Propósito de la unidad

Esta unidad ofrece la oportunidad a los estudiantes de explorar naturalmente contextos multiplicativos de expresiones algebraicas y desarrollar productos, productos notables y factorizaciones de expresiones algebraicas. El programa prioriza en el desarrollo de multiplicaciones algebraicas, la comprensión de los procedimientos y el descubrimiento de reglas y propiedades a través de la formulación y verificación de conjeturas.

Por otra parte, en cuanto a la progresión en el aprendizaje relacionado con las funciones, se introduce el estudio de las funciones lineales y afín. Se propone a los estudiantes identificar y representar dichas funciones a través de tablas, gráficos y algebraicamente.

Finalmente, en este nivel se trabaja la composición de funciones como un paso más en el estudio de funciones. Este contenido más adelante se conecta con la unidad de Geometría, en la cual se trata bajo la mirada de las transformaciones isométricas.

Conceptos claves

Productos notables – factorización de expresiones algebraicas – ecuaciones literales – función lineal y afín – modelamiento – composición de funciones

Prerrequisitos

- Concepto de variable.
- Dependencia e independencia de variables.
- Variación proporcional directa e inversa.
- Concepto de función.
- Dominio y recorrido de una función.
- Representación gráfica de funciones.
- Ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Contenidos disciplinares

- Funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos.
- Representación gráfica de funciones lineales y afines.
- Resolución de problemas mediante ecuaciones literales.
- Composición de funciones y propiedades asociadas.
- Dominio y recorrido de funciones que se obtienen al componer otras funciones.

Habilidades

- Establecer los productos notables a través de la búsqueda de regularidades en la multiplicación de expresiones algebraicas.
- Factorizar expresiones algebraicas usando los productos notables.
- Resolver problemas mediante ecuaciones literales.
- Modelar situaciones o fenómenos en diferentes contextos utilizando funciones lineales.
- Representar gráficamente funciones lineales y afines.
- Argumentar respecto a las variaciones que se producen en la representación gráfica de funciones lineales y afines, al modificar los parámetros.
- Resolver problemas que involucren composición de funciones.
- Identificar el dominio y recorrido de funciones que son el resultado de la composición de otras.

Actitudes

- La perseverancia, el rigor, la flexibilidad y originalidad, al resolver problemas matemáticos.

Aprendizajes esperados	Sugerencias de indicadores de evaluación
<i>Se espera que los estudiantes sean capaces de:</i>	<i>Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:</i>
1. Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias.	<ul style="list-style-type: none"> Multiplican expresiones algebraicas y reducen el resultado. Establecen expresiones para sumas por diferencias y cuadrados de binomios. Reconocen regularidades en multiplicaciones de expresiones algebraicas. Por ejemplo, en los productos $(a+b)(a-b)$, $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$, $(a^3-b^3)(a^3+b^3)$,
2. Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias.	<ul style="list-style-type: none"> Sacan factor común en expresiones algebraicas. Factorizan expresiones algebraicas utilizando productos notables. Expresan trinomios como el producto de dos binomios.
3. Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales.	<ul style="list-style-type: none"> Emplean técnicas algebraicas para expresar ecuaciones literales de primer grado en la forma $ax = b$. Resuelven ecuaciones literales de primer grado. Verifican las soluciones obtenidas.
4. Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.	<ul style="list-style-type: none"> Reconocen la proporcionalidad directa como un caso de la función lineal. Reconocen como funciones lineales relaciones de la física como $F = ma$ (Newton), $V = Ri$ (en circuitos eléctricos) y $F = kx$ (ley de Hooke), señalando variables y constantes. Organizan en una tabla pares ordenados de una función. Generan el gráfico cartesiano a partir de una tabla de valores. Usan un procesador simbólico para registrar diversos valores de $y = kx$, variando los valores de k.
5. Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.	<ul style="list-style-type: none"> Demuestran que la composición de funciones cumple la propiedad de clausura. Dadas algunas funciones realizan composiciones de ellas y determinan el dominio y recorrido de la función resultante. Discuten acerca de la conmutatividad de la composición de funciones. Analizan el caso en que las funciones son transformaciones isométricas. Verifican que la composición de funciones es asociativa. Verifican que la función identidad en un conjunto opera como elemento neutro para la composición de funciones.
6. Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.	<ul style="list-style-type: none"> Identifican ecuaciones literales de primer grado en diversos contextos. Reconocen situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales. En situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales: <ul style="list-style-type: none"> a) Plantean la ecuación b) La resuelven c) La evalúan en función del contexto

Aprendizajes esperados en relación a los OFT

La perseverancia, el rigor, la flexibilidad y originalidad, al resolver problemas matemáticos.

- Tiene un orden y método para el registro de información.
- Termina los trabajos iniciados.
- Es tenaz frente a obstáculos o dudas que se le presente en problemas matemáticos.

Observaciones al docente. 1° Medio. Álgebra (2)

Tal como lo sugieren los aprendizajes esperados, la unidad de Álgebra es una buena oportunidad para promover los Objetivos Fundamentales Transversales. A través del trabajo propuesto, se puede incentivar aspectos como el rigor, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas. Por otro lado, interesa que los estudiantes sean ordenados y metódicos en el registro de la información.

Respecto al trabajo con Productos Notables, el enfoque tradicional ha sido exponer a los estudiantes a su estudio categorizados por nombre según el tipo de expresión (cuadrado de binomio, trinomio de cuadrado perfecto, etc.), y vistos como reglas de resolución de ciertas expresiones que los estudiantes en ocasiones no son capaces de conectar, por ejemplo, con la multiplicación. Por el contrario, este programa propone que ellos, conocedores de la multiplicación de expresiones algebraicas, conjeturen sobre productos que tienen ciertas características que los hacen justamente "notables". Por ejemplo, el docente podría ofrecer un listado de multiplicaciones a sus estudiantes, el cual prepare el camino para que descubran las reglas que definen los productos notables. En caso de que no se produzcan los hallazgos, se sugiere tensionar las conjeturas realizando preguntas tales como: "¿existe alguna relación o regularidad entre los términos de la expresión original y los que resultan luego de realizar el producto propuesto?"

Respecto al estudio de las funciones lineales y afines, el propósito es que los estudiantes establezcan conexiones entre los aprendizajes nuevos propuestos en esta unidad y aquellos logrados en años anteriores, por ejemplo, los relacionados con proporcionalidad directa. Pero más aún con el concepto mismo de función que comienza a desarrollarse desde 8° básico, a través del cual se introducen la notación y elementos tales como dominio y recorrido.

Por otra parte, se recomienda introducir la composición de funciones a través de metáforas que faciliten su comprensión y, posteriormente, realizar la formalización a través de la utilización del lenguaje algebraico, el cual facilitará la verificación y demostración de propiedades de la composición de funciones. Se sugiere poner énfasis en este contenido, ya que se retomará en la unidad de geometría a través del estudio de las transformaciones isométricas.

Finalmente, el estudio de funciones se presta naturalmente para realizar análisis de representaciones usando software gráfico, de modo que sea posible explorar las distintas formas que toman estas funciones al variar los parámetros que las constituyen. En otras palabras este tipo de recursos tecnológicos facilitan al estudiante el análisis, la formulación de conjeturas y su verificación.

Ejemplos de actividades de aprendizaje

AE 1: Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias.

Actividades

1.- Realizan multiplicaciones entre expresiones algebraicas. Por ejemplo, multiplican:

- $(a + b)(a - 2b)$
- $(a + b - c)(a - b + 2c)$
- $(a^2 + b^2 - 1)(2a^2 - 3b^2 + 4)$

2.- Establecen relaciones al observar regularidades en productos especiales:

- $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
- $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$
- $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$

3.- Establecen relaciones al observar regularidades en cuadrados de polinomios:

- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$

Observaciones al docente: Es importante que el docente permita a sus estudiantes deducir los productos trabajados, a partir de las regularidades observadas. De esta manera se constituye en un aprendizaje significativo. Los estudiantes pueden conjeturar sobre los productos notables presentados y otros que ellos puedan encontrar. Pueden verificar resultados mediante tablas que les ayuden a organizar los datos.

AE 2: Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias.

Actividades

1.- Factorizan expresiones utilizando productos notables. De este tipo son las siguientes factorizaciones:

- $4x^2 - 16y^2$
- $x^2 + 4xy + y^2$
- $4(x - z)^2 - 36(y + 2)^2$
- $(x + 2)^2 + 8(x + 2) + 16$
- $x^4 - 16y^4$

2.- Utilizando la forma $a^2 + a(b + c) + bc = (a + b)(a + c)$. De este tipo son las siguientes factorizaciones:

- $x^2 + 7x + 10$
- $a^2 + 6a - 7$
- $b^2 - 3b - 54$
- $4a^2 + 14a - 8$

3.- Un terreno rectangular tiene una superficie $x^2 + 7x + 12$ y como largo a $x + 4$. Respecto de este enunciado los estudiantes determinan:

- su ancho
- su perímetro cuando $x = 100$ metros.

3.- Realizando factorizaciones intermedias para llegar a la factorización final. De este tipo son las siguientes factorizaciones:

- $ac + bc + ad + bd$
- $ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b$
- $ad - dx + ac - cx$

4.- Transforman expresiones algebraicas aplicando productos notables y factorizan la expresión transformada. Por ejemplo:

- Factorizan la expresión $4a^4 + b^4$, con este propósito transforman esta expresión en la forma $(2a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2$.
- Factorizan la expresión $16x^4 + 4$, con este propósito transforman esta expresión en la forma $(4x^2 + 2)^2 - 16x^2$.

5.- Utilizan la suma por diferencia para determinar el cambio de temperatura (dilatación) que experimenta una plancha metálica rectangular cuando, producto del calentamiento a que se expone, tanto su ancho como su largo se dilatan.

AE 3: Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales.

Actividades

1.- Elaboran estrategias para expresar una variable en función de otras variables. Por ejemplo:

- Dada la ecuación $\frac{2a}{3} - x = y$, buscan una estrategia para obtener una expresión para "x" en función de las otras variables.
- Dada la ecuación $x + 2y - 3a = 4$, buscan una estrategia para obtener una expresión para a en función de las otras variables.

2.- Establecen estrategias para resolver ecuaciones literales. Por ejemplo,

- Resuelven la ecuación $ax = bx + c$, donde x es la incógnita.
- Resuelven la ecuación $ax = bx + cx + d$, donde x es la incógnita.

Observaciones al docente

En este tipo de actividades el propósito es que los estudiantes sean capaces de relacionar variables a partir de diversos contextos y trabajar con expresiones ya entregadas, o bien que ellos deban obtener o deducir como en la actividad 2.

Es importante apoyar a los estudiantes en el manejo de las ecuaciones literales, que por lo general se presentan como fórmulas en diferentes contextos, pero al ser ecuaciones es posible “despejar” cada una de las variables involucradas en función de las otras.

AE 4: Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.

Actividades

1.- Identifican funciones lineales en contextos de proporcionalidad. Por ejemplo, en el contexto geométrico del perímetro y área de un cuadrado de lado a , establecen diferencias entre la relación lado–perímetro y la relación lado–área. Para ello:

- Utilizan tablas en las que asignan distintos valores al lado (a) y obtienen tanto el perímetro (P) como el área (A).
- Identifican las expresiones $P = 4a$ y $A = a^2$
- Grafican ambas relaciones en el plano cartesiano.
- Establecen cocientes entre los valores del perímetro y el lado, así como también cocientes entre el área y el lado.
- Identifican en qué caso ocurre la proporcionalidad directa.

Observaciones al docente

Esta actividad se focaliza en el estudio de las funciones. Tiene como objetivo que los estudiantes relacionen la función lineal con la proporcionalidad entre cantidades, que grafiquen y modelen diversas situaciones. Para lograr este objetivo es importante que los estudiantes generen datos, que los registren en tablas y posteriormente que los grafiquen. Los estudiantes a partir de cocientes entre variables deben identificar la proporcionalidad directa.

Pueden verificar lo anterior considerando una función lineal cualquiera, por ejemplo, $f(x) = 3x$.

2.- Modelan situaciones asociadas a la función afín. Por ejemplo, se puede presentar la siguiente situación a sus estudiantes:

Una compañía de teléfonos celulares ofrece el siguiente plan: cargo fijo de \$8.590 y \$94 por cada minuto que se habla en cualquier horario.

Y proponerles que respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las variables involucradas?

¿Cuánto se paga por hablar 25, 37 y 55 minutos, respectivamente? Registrar estos valores en una tabla y graficar, manualmente o usando un software adecuado los valores.

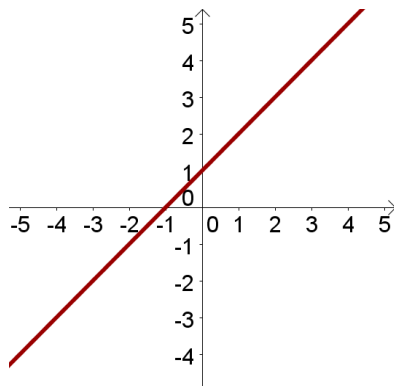
Observando el gráfico, ¿qué diferencias observas respecto de la función lineal?

- Si llamamos “ t ” al valor total de la cuenta y “ x ” a los minutos hablados, expresa t en función de x .

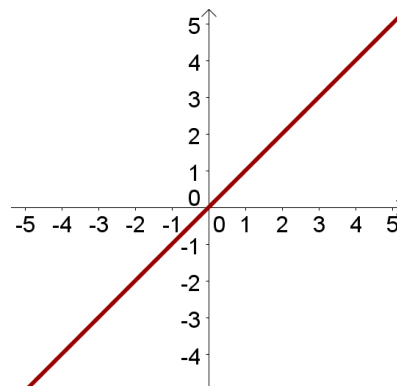
¿Qué concluyes ?

3.- Identifican gráficos que representan la función lineal y gráficos que representan la función afín. Por ejemplo, identifican cuál de los gráficos siguientes representa la función lineal y cuál representa la función afín, justificando su elección.

a)



b)



4.- A partir de las expresiones algebraicas de las funciones o usando tablas de valores, obtienen el gráfico de una función lineal o afín, en forma manual o utilizando algún software gráfico.

5.- Determinan si una situación particular puede ser modelada por una función lineal o afín. Por ejemplo:

Considerar un conjunto de rectángulos cuyo perímetro es siempre igual a 48 cm. Los distintos rectángulos tienen bases y alturas diferentes, pero el perímetro es el mismo en cada caso.

- Encontrar una función que modele esta situación.
- Determinar el dominio de la función.
- Graficar la función.

Observaciones al docente

Para esta actividad, cada solicitud es importante, en particular lo de graficar la situación. También es clave hablar de los "valores permitidos" en este contexto particular y afianzar el concepto de dominio de una función. Además, se puede solicitar el recorrido de la función en cuestión.

6.- Realizan experimentos relativos a la ley de Hook. Con ese propósito se toma un resorte cualquiera y de él se suspenden masas. Se registran en una tabla la fuerza ejercida sobre el resorte: peso de la masa medido en Newton, y la deformación medida en metros. A continuación demuestran que el cociente entre la fuerza y la deformación es constante.

AE5: Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.

1.- A partir de dos funciones dadas, determinan la función resultante de componer dichas funciones, así como también el dominio y el recorrido de la nueva función. Por ejemplo, si se tienen las funciones $h(x) = 2x$ con

dominio $D_h = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $g(x) = \frac{x}{4}$ con dominio $D_g = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, determinan $g \circ h$.

2.- Demuestran algunas propiedades respecto de la composición de funciones. Por ejemplo:

- Verifican si la composición de funciones cumple o no la propiedad de asociatividad.
- Verifican que la composición de funciones no es conmutativa.

3.- Comprueban otras propiedades de la composición de funciones. Por ejemplo:

- a) Sean f y g funciones afines, comprobar si $f \circ g$ y $g \circ f$ son también funciones afines.
- b) Si f , g y h son funciones lineales, demostrar que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. ¿Se cumple lo mismo en el caso de funciones afines?
- c) ¿Qué sucede con $f \circ g$, si g es una función constante y f una función cualquiera?

4.- A partir de dos funciones obtienen la nueva función compuesta, verifican valores y relaciones. Por ejemplo:

- Si $f(x) = ax$ y $g(x) = bx$, encuentran la relación entre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.
- Si $f(t) = at$ y $g(t) = b - t$, determinan el valor de $g\left(f\left(\frac{b}{a}\right)\right)$.

AE 6: Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.

Actividades

1.- Identifican situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.

2.- Resuelven problemas que involucran ecuaciones literales en contextos geométricos. Por ejemplo:

- Obtienen una expresión algebraica para altura de una pirámide, a partir de la fórmula de su volumen.
- Encuentran una expresión para el área del trapecio en función de sus bases y altura.
- Obtienen los valores de la altura de un cono para distintos valores de su volumen y del radio de su base.

®3.- Resuelven problemas relativos a la velocidad del sonido. Por ejemplo, dos personas que se encuentran a S metros separadas desean escuchar, cada una, la voz de la otra persona. ¿Después de cuánto tiempo, en función de S se produce esto?

Actividad de Evaluación (Álgebra 1º Medio)

Aprendizaje Esperado: Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.	
Indicadores de Evaluación: <ul style="list-style-type: none"> • Demuestran que la composición de funciones cumple la propiedad de clausura. • Dadas algunas funciones realizan composiciones de ellas y determinan el dominio y recorrido de la función resultante • Discuten acerca de la conmutatividad de la composición de funciones. Analizan el caso en que las funciones son transformaciones isométricas. • Verifican que la composición de funciones es asociativa. • Verifican que la función identidad en un conjunto opera como elemento neutro para la composición de funciones. 	
Instrucciones. A continuación se presentan tres funciones definidas en los racionales. Responda las preguntas referidas a la composición de estas funciones.	
Situación Considera las funciones f , g y h definidas en el conjunto de los números racionales, definidas por $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 3$ y $h(x) = 2x + 1$; para todo x racional.	Criterios de Evaluación. 1. Determina el valor de la composición de dos funciones en un elemento del dominio. 2. Verifica propiedades de la composición de funciones. 3. Demuestra que la composición de funciones no es conmutativa. 4. Identifica a la función identidad como elemento neutro de la composición de funciones.
Preguntas a) ¿Cuál es el valor de $(f \circ g)(2)$? b) ¿Indique el dominio de la función $g \circ f$? c) Verifique que $f \circ g \neq g \circ f$ d) Defina una función $j(x)$ en los números racionales, tal que $(j \circ f)(x) = f(x)$ y $(f \circ j)(x) = f(x)$ e) Verifique la siguiente propiedad de la composición de funciones: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$	

SEMESTRE 2

UNIDAD 3 Geometría

Propósito de la unidad

Esta unidad ofrece a los estudiantes la posibilidad de trabajar la geometría en el plano cartesiano, donde estudian las transformaciones isométricas y la congruencia de figuras, de esta manera se les presenta la oportunidad de obtener resultados geométricos y de profundizar los ya adquiridos relativos a estas transformaciones en octavo año de manera analítica.

Específicamente, los estudiantes trabajan los elementos básicos del plano cartesiano, transforman figuras del plano a través de la aplicación de traslaciones, rotaciones y reflexiones, desarrollan el concepto de congruencia a partir del concepto de transformación isométrica, establecen los criterios de congruencia en triángulos, y los utilizan en la resolución de problemas y en el establecimiento de propiedades en polígonos.

Conceptos claves

Plano cartesiano – vector – traslación reflexión y rotación en el plano cartesiano – congruencia y criterios de congruencia.

Prerrequisitos

- Transformaciones isométricas en el Plano Euclídeo.
- La recta numérica.
- Ángulos y lados en polígonos.
- Composición de funciones.

Contenidos disciplinares

- Caracterización del plano cartesiano.
- Ubicación de puntos y figuras en el plano cartesiano e identificación de las coordenadas de los vértices de polígonos dibujados en él.
- Vectores en el plano cartesiano.
- Aplicación de transformaciones isométricas y composiciones de ellas en el plano cartesiano.
- Concepto de congruencia.
- Criterios de congruencia en triángulos.
- Aplicaciones de los criterios de congruencia.

Habilidades

- Caracterizar el plano cartesiano.
- Realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
- Caracterizar la congruencia de figuras a partir de las transformaciones isométricas.
- Utilizar el concepto de congruencia en la resolución de problemas.

Actitudes

- Actitudes de perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos.
- Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos

Aprendizajes esperados	Sugerencias de Indicadores de evaluación
<i>Se espera que los estudiantes sean capaces de:</i>	<i>Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:</i>
1. Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.	<ul style="list-style-type: none"> Identifican puntos y coordenadas de vértices de polígonos y de elementos de la circunferencia en el plano cartesiano. Dibujan puntos, polígonos y circunferencias en el plano cartesiano en forma manual o usando un procesador geométrico.
2. Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.	<ul style="list-style-type: none"> Representan gráficamente vectores en el plano cartesiano, dadas sus componentes. Identifican vectores y encuentran las componentes resultantes de adiciones y sustracciones entre ellos. Encuentran las componentes de vectores que resultan de la multiplicación de vectores por escalar.
3. Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.	<ul style="list-style-type: none"> Efectúan composiciones de transformaciones isométricas en el plano cartesiano. Reconocen las figuras resultantes al aplicar composiciones de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.
4. Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.	<ul style="list-style-type: none"> Identifican regularidades al aplicar composiciones de reflexiones a figuras en el plano cartesiano. Identifican regularidades al aplicar sucesivas composiciones de traslaciones a figuras del plano cartesiano.
5. Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.	<ul style="list-style-type: none"> Conjeturan acerca de la aplicación de composiciones de transformaciones isométricas a figuras del plano cartesiano. Conjeturan acerca de la conmutatividad de transformaciones isométricas y verifican las conjeturas formuladas en casos particulares. Verifican, en casos particulares, conjeturas formuladas acerca de la aplicación de sucesivas traslaciones a figuras en el plano cartesiano, en forma manual o usando un procesador geométrico.
6. Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas.	<ul style="list-style-type: none"> Reconocen que dos figuras son congruentes cuando existen transformaciones isométricas que aplicadas en una de ellas permite obtener la otra figura. Identifican las transformaciones isométricas que transforman una figura en otra que es congruente a ella.

7. Formular y verificar conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos.	<ul style="list-style-type: none"> • Conjeturan acerca del criterio lado-ángulo-lado. • Conjeturan acerca de criterios de congruencia en triángulos y dan ideas geométricas para verificar esas conjeturas. • Calculan trazos en triángulos aplicando criterios de congruencia verificados. Por ejemplo, utilizan el criterio lado- lado- lado para calcular segmentos en triángulos.
8. Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos.	<ul style="list-style-type: none"> • Resuelven problemas relativos a la congruencia en triángulos utilizando los criterios establecidos. • Demuestran propiedades de congruencia en polígonos utilizando los criterios de congruencia en triángulos. • Resuelven problemas relativos a cálculos de medidas de segmentos en el plano cartesiano. • Resuelven problemas relativos coordenadas de vértices de figuras en el plano cartesiano.

Aprendizajes esperados en relación a los OFT

Actitudes de perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos.

- Mostrar un método para realizar las tareas propuestas.
- Terminar los trabajos iniciados.
- Desarrollar tenacidad frente a obstáculos o dudas que se les presenten en problemas propuestos sobre transformaciones isométricas y congruencias.

Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos

- Participar de manera propositiva en actividades grupales.
- Es responsable en la tarea asignada.
- Tomar iniciativa en actividades de carácter grupal.
- Proponer alternativas de solución a problemas propuestos en actividades grupales.

Observaciones al docente. 1º Medio. Geometría (3)

Tal como lo sugieren los aprendizajes esperados, la unidad de Geometría es una buena oportunidad para promover los Objetivos Fundamentales Transversales. A través del trabajo propuesto, se puede incentivar aspectos como el rigor, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas. Por otro lado, interesa que los estudiantes sean ordenados y metódicos en el registro de la información. Además, particularmente en esta unidad cobra relevancia el que los estudiantes tomen la iniciativa en el trabajo de equipo, así como también el que propongan alternativas de solución a problemas propuestos.

Se sugiere al docente enfatizar la importancia que tiene trabajar la geometría en el plano cartesiano, ya que este es un nuevo escenario que permite ver los conceptos geométricos desde una perspectiva analítica. Es importante que el

docente caracterice este plano y que mencione las diferencias que tiene con el plano euclidiano, y que las explicite a través de ejemplos. Esto cobra sentido, por ejemplo, considerando que en 8° básico también se trabajan las transformaciones isométricas, pero realizando construcciones con regla y compás. Esta vez el protagonista es el plano cartesiano. Por ello se sugiere al docente incorporar actividades que permitan a los estudiantes relacionarse con las coordenadas, por ejemplo, representando puntos, polígonos y circunferencias, así como también la resolución de problemas que involucren el cálculo de medidas de lados de polígonos.

Respecto del trabajo con las transformaciones isométricas, el énfasis está puesto en el formular y verificar conjeturas respecto al resultado de aplicar traslaciones, reflexiones o rotaciones a figuras en el plano cartesiano. Primero en casos particulares, y luego generalizando algunas propiedades, por ejemplo, relacionadas con los vértices de las figuras resultantes respecto de la figura original. Por otra parte, respecto a la composición de transformaciones isométricas, se sugiere establecer una relación estrecha con lo estudiado en la unidad de álgebra. Esta es una buena oportunidad para que los estudiantes contextualicen el estudio de la composición de funciones. Por último, se sugiere potenciar todo el trabajo con el uso de un procesador geométrico.

Es importante que los estudiantes vinculen las transformaciones isométricas con el concepto de congruencia, definiendo dos figuras como congruentes cuando es posible aplicar una o más transformaciones isométricas a una de esas figuras para luego obtener la otra. También se sugiere al docente que muestre a sus estudiantes que para trasladar, rotar o reflejar una figura basta con aplicar estas transformaciones isométricas a determinados puntos de la figura, en el caso de los polígonos, basta aplicar esas transformaciones a los vértices. Se sugiere, además, profundizar en el concepto de las teselaciones y su análisis a partir de las transformaciones isométricas.

Finalmente, los criterios de congruencias deben ser establecidos en la clase con la participación del profesor y los estudiantes, y que no sean dados por el docente como un conocimiento que debe ser memorizado. Estos criterios son relevantes para todo lo que signifique la demostración de propiedades de congruencia en polígonos. Es importante para este nivel, que los estudiantes sean motivados para profundizar en el aspecto de la demostración matemática.

Ejemplos de actividades

AE 1: Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.

Actividades

- 1.- Determinan las coordenadas de puntos en el plano cartesiano.
- 2.- Dadas las coordenadas de algunos puntos, los estudiantes los ubican en el plano cartesiano.
- 3.- Dibujan polígonos en el plano cartesiano conocidos las coordenadas de sus vértices.
- 4.- Dibujan en el plano cartesiano una circunferencia conocidos las coordenadas del centro y la medida de su radio.
- 5.- Dadas las coordenadas de tres puntos que pertenecen a una circunferencia, la dibujan en el plano cartesiano.

AE 3: Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.

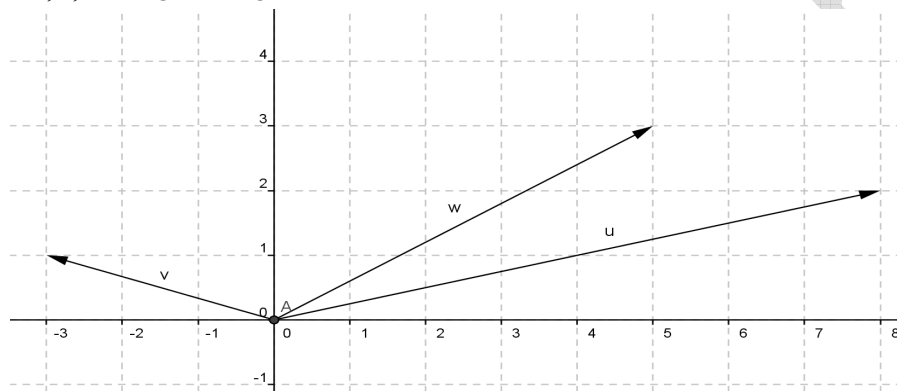
Actividades:

1.- Dibujan diferentes vectores en el plano cartesiano, dadas sus coordenadas. Por ejemplo:

- $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$
- $\vec{a} = (5, 1)$ en un sistema de coordenadas rectangulares con origen en $(2, 3)$.

2.- Determinan y dibujan el vector resultante de la suma de vectores. Por ejemplo:

- Obtienen el vector resultante de la suma $\vec{u} + \vec{v}$ cuando $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (-4, 5)$ y lo dibujan en el plano cartesiano.
- Determinan la relación que existe entre vectores dibujados en el plano cartesiano. Por ejemplo, de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ del gráfico siguiente:



3.- Determinan y dibujan el vector resultante del producto entre un vector y un escalar. Por ejemplo:

- $2\vec{u}$, donde $3\vec{u} = (-1, 4)$
- $-\vec{u} + \vec{u}$
- $-3\vec{u} + 2\vec{v}$, cuando se sabe que $-\vec{u} + \vec{v} = (2, 5)$

4.- Determinan el vector que representa la fuerza resultante de fuerzas aplicadas sobre un objeto.

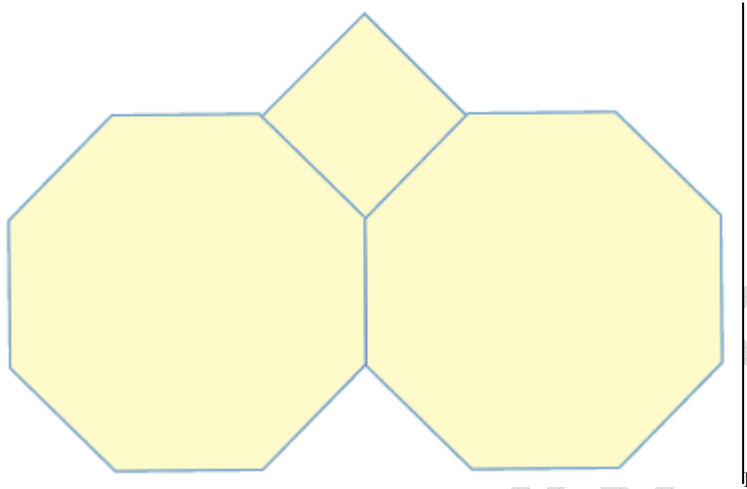
Observaciones al docente

Se sugiere al docente trabajar estas actividades con el docente de física. De esta manera los estudiantes pueden conocer herramientas que les permitirán entender conceptos de la física en este nivel o en niveles superiores.

AE 4: Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

Actividades

- 1.- Identifican regularidades al aplicar sucesivas traslaciones a figuras en el plano cartesiano. Por ejemplo, al aplicar la composición de traslaciones $T_u \circ T_u \circ T_u \circ T_u \circ \dots \circ T_u$, donde $\vec{u} = (2,4)$, al paralelogramo de vértices $(1,1)$, $(5,1)$, $(7,4)$, $(3,4)$.
- 2.- Identifican regularidades al rotar respecto al origen y en un ángulo de 30° sucesivas veces una figura en este plano.
- 3.- Identifican regularidades al reflejar respecto al eje L sucesivas veces la configuración formada por dos octógonos regulares y un cuadrado: 8 8 4



AE5: Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.

Actividades

- 1.- Observan figuras que están rotadas y conjeturan acerca de:
 - Procedimientos para determinar el ángulo de rotación.
 - Procedimientos para determinar el punto respecto al cuál se rotó la figura.
- 2.- Conjeturan acerca de la transformación isométrica que corresponde a la composición de reflexiones, cuando:
 - Los dos ejes de simetría son paralelos.
 - Los ejes de simetría se intersectan en un punto O formando un ángulo α .

Observaciones al docente

Es importante que los estudiantes realicen las actividades anteriores:

- a) En forma manual, utilizando regla y compás.
- b) Utilizando un procesador geométrico.

2.- Verifican las conjeturas formuladas en las actividades 1) y 2).

3.- Conjeturan acerca de la relación entre la composición de traslaciones y la operatoria vectorial asociada.

AE 6: Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas.

Actividades

1.- Dibujan una figura en el plano cartesiano y aplican sobre ella una transformación isométrica. Por ejemplo, al triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(5,2)$, $C(4,5)$ aplican la traslación $T_{(1,3)}$ y obtienen el triángulo A' , B' , C' .

Comparan las medidas de los lados de los triángulos A , B , C y A' , B' , C' y sacan conclusiones respecto a la forma, al tamaño de sus lados y al área de ellos. De esta manera, concluyen que son congruentes.

2.- Observan dos figuras congruentes y determinan las transformaciones isométricas o composiciones de transformaciones isométricas que lleven una figura en la otra.

Observaciones al docente

Se sugiere al docente guiar al estudiante en la segunda actividad. Esta es una actividad que requiere de concentración y de capacidad de visualización científica por parte del estudiante.

3.- Elaboran una definición del concepto de congruencia de figuras del plano en términos de las transformaciones isométricas.

AE 7: Formular y verificar conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos.

Actividades

1.- Formulan conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos respecto a:

- Lados
- Lados y ángulos

2.- Describen una idea geométrica de la demostración de las conjeturas acerca de los criterios formulados.

AE 8: Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos.

Actividades

1.- Determinan las coordenadas de los vértices de rectángulos, cuadrados, rombos, triángulos rectángulos y triángulos equiláteros a partir de información acerca de vértices de esos polígonos. Por ejemplo, determinan las coordenadas del cuarto vértice de un rectángulo, si se sabe que las coordenadas de tres de sus vértices son $(1, 1)$, $(1, 6)$ y $(8, 1)$.

Observaciones al docente

Se sugiere al docente facilitar el trabajo de sus estudiantes, proponiendo polígonos convexos que tengan vértices de coordenadas enteras, de esta manera se centra el trabajo en el proceso geométrico que involucra la determinación de las coordenadas y no en el cálculo numérico que implica coordenadas de lados racionales e irracionales.

Se sugiere también al docente trabajar con coordenadas que sean enteras negativas o mezclas entre enteros positivos y negativos.

2.- Calculan perímetros y áreas de rectángulos cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados utilizando información relativa a sus vértices.

3.- Determinan los pasos para resolver el siguiente problema: Calcular el área de un rectángulo si se sabe que los puntos $(1, 2)$ y $(7, 6)$ son los extremos de su diagonal y que sus lados son paralelos a la abscisa y ordenada.

4.- Elaboran estrategias para calcular perímetros y áreas de paralelogramos, donde un par de lados paralelos sean, a su vez, paralelos a uno de los ejes coordenados, y para calcular perímetros y áreas de triángulos, cuando uno de sus lados es paralelos a uno de los ejes coordenados, utilizando información relativa a sus vértices y el teorema de Pitágoras. Calculan los perímetros y las áreas de esas figuras.

5.- Utilizar los criterios de congruencia en triángulos para demostrar, por ejemplo, que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, que todo punto de la simetral de un trazo equidista de sus extremos, etc.

Observaciones al docente: Es importante que el estudiante en cada demostración indique el criterio de congruencia empleado, la hipótesis y la tesis. Se sugiere que el docente enseñe explícitamente los pasos de una demostración y enfatiza en la justificación formal y matemática de cada paso de la secuencia demostrativa.

Actividad de Evaluación (Geometría 1° Medio)

Aprendizaje Esperado:

Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos.

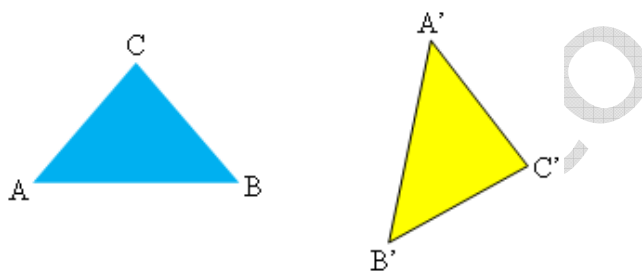
Indicadores de Evaluación:

- Resuelven problemas relativos a la congruencia en triángulos utilizando los criterios establecidos.
- Demuestran propiedades de congruencia en polígonos utilizando los criterios de congruencia en triángulos.
- Resuelven problemas relativos a cálculos de medidas de segmentos en el plano cartesiano.
- Resuelven problemas relativos coordenadas de vértices de figuras en el plano cartesiano.

Instrucciones.

A continuación se presentan dos triángulos. Responder las interrogantes referidas a las condiciones para que se cumpla la congruencia entre ellas.

Dados los triángulos ABC y A'B'C' de la figura:



a) Se afirma que los triángulos son congruentes.

¿Qué transformaciones isométricas aplicarías al triángulo ABC para verificar (o descartar) la afirmación? Fundamentar.

b) Se sabe que los trazos AB y A'B' son congruentes y que la medida de los ángulos de los vértices en A y en A' son iguales.

¿Qué condición, mínima, agregarías para asegurar la congruencia de los triángulos? Justificar.

c) Se sabe que los triángulos ABC y A'B'C' tienen la medida sus ángulos interiores respectivamente iguales, esto es $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$.

¿Podemos concluir que los triángulos son congruentes?

Criterios de evaluación

1. Reconocen que los triángulos son congruentes por aplicación de transformaciones.
2. Conjeturan acerca de criterios de congruencia.
3. Verifican propiedades de la congruencia de triángulos.
4. Resuelven problemas relativos a la congruencia de triángulos.

UNIDAD 4

Datos y Azar

Propósito de la unidad

En el ámbito del tratamiento de datos, los estudiantes comienzan el estudio de representaciones gráficas para datos agrupados en intervalos tales como histogramas y polígonos de frecuencia. El propósito es que al finalizar la unidad, los estudiantes sean capaces tanto de interpretar, como de producir información a través de estos gráficos, en diversos contextos. El énfasis estará puesto en el análisis de diferentes situaciones donde deban tomar decisiones respecto de cuándo es pertinente utilizar histogramas o polígonos de frecuencia. Asimismo, se espera que los estudiantes interpreten y produzcan información, en diversos contextos, utilizando tanto medidas de tendencia central como medidas de posición, considerando el tipo de datos involucrados. Respecto a los conceptos de población y muestra, se espera que los estudiantes reconozcan relaciones entre la media aritmética de una población finita y la media aritmética de las medias muestrales, cuando se extraen muestras de igual tamaño desde la misma población.

En cuanto al ámbito del manejo del azar, en esta unidad continúa el trabajo con la probabilidad desde un punto de vista teórico (modelo de Laplace) y desde lo experimental (frecuencias relativas), solo que ahora los estudiantes deben decidir cuándo es posible aplicar un modelo u otro, dependiendo de las condiciones particulares de cada situación o experimento aleatorio. Además, se incorporan las técnicas combinatorias, que se constituyen como verdaderas herramientas para ayudar en el conteo de los elementos de un espacio muestral. Por ejemplo, dado un conjunto de 4 elementos diferentes $\{a, b, c \text{ y } d\}$ es interesante plantear a los estudiantes que establezcan la diferencia entre determinar el número de subconjuntos de dos o más elementos en los casos:

Conceptos claves

Gráficos de datos agrupados en intervalos tales como histogramas y polígonos de frecuencia.

Prerrequisitos

- Población y muestra.
- Experimento aleatorio.
- Gráficos de frecuencia.
- Tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos.
- Media aritmética y moda para datos agrupados en intervalos.
- Muestreo aleatorio simple.
- Equiprobabilidad de eventos.
- Principio multiplicativo.
- Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
- Probabilidad Teórica de un evento.
- Modelo de Laplace.
- Condiciones del modelo de Laplace: finitud del espacio muestral y equiprobabilidad.

Contenidos disciplinares

- Histogramas, polígonos de frecuencia y de frecuencias acumuladas, considerando la interpretación de medidas de tendencia central y posición.
- Medidas de tendencia central (media, moda y mediana) y medidas de posición (percentiles y cuartales) de datos agrupados en intervalos.
- Técnicas combinatorias para resolver diversos problemas que involucren el cálculo de probabilidades.
- Muestras de un tamaño dado, en las que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, con y sin reemplazo.
- Formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo.
- Resolución de problemas en contextos de incerteza, aplicando el cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las condiciones del problema.

Habilidades

- Obtener información a partir del análisis de los datos presentados en histogramas, polígonos de frecuencia y de frecuencias acumuladas, considerando la interpretación de medidas de tendencia central y posición.
- Organizar y representar datos usando histogramas, polígonos de frecuencia y frecuencias acumuladas, construidos manualmente y con herramientas tecnológicas.

- Analizar una muestra de datos agrupados en intervalos, mediante el cálculo de medidas de tendencia central (media, moda y mediana) y medidas de posición (percentiles y cuartiles), en diversos contextos y situaciones.
- Resolver diversos problemas que involucren técnicas combinatorias para el cálculo de probabilidades.
- Utilizar y establecer estrategias para determinar el número de muestras de un tamaño dado, que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, con y sin reemplazo.
- Formular y verificar conjeturas, en casos particulares, acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo.
- Resolver problemas en contextos de incerteza, aplicando el cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las condiciones del problema.

Actitudes

- Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos.

Aprendizajes esperados	Sugerencias de Indicadores de evaluación
<i>Se espera que los estudiantes sean capaces de:</i>	<i>Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:</i>
1. Obtener información a partir del análisis de datos presentados en gráficos, considerando la interpretación de medidas de tendencia central.	<ul style="list-style-type: none"> • Explican la pertinencia y ventajas de representar un conjunto de datos, a través de un histograma o polígono de frecuencia, respecto a otras representaciones gráficas. • Obtienen información mediante el análisis de datos presentados en histogramas y polígonos de frecuencia. • Interpretan datos agrupados en intervalos y organizados en tablas de frecuencia, en diversos contextos. • Calculan la media, moda y mediana, a partir de una tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos, y las interpretan de acuerdo al contexto. • Comparan dos o más conjuntos de datos usando medidas de tendencia central.
2. Producir información, en contextos diversos, a través de gráficos obtenidos desde tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, manualmente o mediante herramientas tecnológicas.	<ul style="list-style-type: none"> • Determinan un número adecuado de intervalos para organizar (agrupar) un conjunto de datos, acorde a la cantidad de datos disponibles. • Construyen tablas de frecuencias con datos agrupados, donde seleccionen el tipo de frecuencia según el análisis que se requiera hacer. • Representan un conjunto de datos agrupados en intervalos mediante un histograma e interpretan la información acorde al contexto. • Construyen, a partir de un histograma, el polígono de frecuencia asociado y justifican la utilización de dicha representación gráfica. • Construir un histograma o polígono de frecuencia, utilizando una herramienta tecnológica.
3. Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia.	<ul style="list-style-type: none"> • Determinan la cardinalidad de un espacio muestral utilizando el principio multiplicativo en diversos experimentos aleatorios. Por ejemplo, al lanzar un dado y una moneda, el espacio muestral tiene $6 \cdot 2 = 12$ resultados posibles. • Obtienen el número de muestras aleatorias posibles de un tamaño dado que se pueden extraer, sin reposición, desde una población de tamaño finito, aplicando el número combinatorio. • Seleccionan la técnica combinatoria apropiada para resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades, acorde a los requerimientos de cada problema.
4. Calcular la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas desde una población.	<ul style="list-style-type: none"> • Establecen estrategias para determinar el número de muestras de un tamaño dado, con o sin reemplazo, que se pueden extraer desde una población de tamaño finita. • Calculan el promedio de cada una de las muestras de igual tamaño extraídas desde una población. • Calculan el promedio de todos los promedios de muestras de igual tamaño extraídas desde una población.
5. Formular conjeturas y verificarlas en casos particulares acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha	<ul style="list-style-type: none"> • Realizan diferentes comparaciones entre la media de una población con la media de cada uno de los promedios de muestras de igual tamaño extraídas desde una población. • Conjeturan acerca de la relación que existe entre la media de una población y el promedio de cada uno de los

población.	<p>promedios de muestras de igual tamaño extraídas desde una población.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Verifican, utilizando herramientas tecnológicas, la conjetura formulada.
6. Interpretar información, en diversos contextos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.	<ul style="list-style-type: none"> • Interpretan información estadística, expresada en términos de cuartiles o quintiles publicada en medios de comunicación. • Evalúan la pertinencia del uso de medidas de posición o tendencia central de acuerdo al tipo de datos involucrados. • Extraen información respecto de medidas de posición, a partir de un polígono de frecuencias acumuladas. • Comparan información respecto a dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central y de posición y comunican sus conclusiones. • Extraen información en relación a una situación o fenómeno, en la que se presentan datos por medio de alguna de las medidas de tendencia central.
7. Producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.	<ul style="list-style-type: none"> • Comunican información estadística acerca de algún fenómeno utilizando medidas de posición, por ejemplo, cuartiles. • Construyen un polígono de frecuencias acumuladas, en forma manual o mediante herramientas tecnológicas, a partir de un cierto contexto, e interpretan desde esta representación algunas medidas de posición. • Deciden según el tipo de datos (ordinales, nominales, cuantitativos, etc.) los parámetros a utilizar para resumir información estadística referida a algún fenómeno o situación. • Determinan medidas de tendencia central o posición mediante una planilla electrónica u otra herramienta tecnológica.
8. Utilizar el cálculo de medidas de tendencia central y de posición para analizar muestras de datos agrupados en intervalos.	<ul style="list-style-type: none"> • Determinan el valor de la media muestral de datos agrupados en intervalos. • Determinan la mediana de muestras de datos agrupados en intervalos. • Determinan cuartiles y percentiles de muestras de datos agrupados en intervalos. • Analizan muestras de datos agrupados en intervalos mediante cuartiles. • Utilizan la media para analizar muestras de datos agrupados en intervalos.
9. Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.	<ul style="list-style-type: none"> • A partir de diferentes experimentos aleatorios, identifican resultados equiprobables. Por ejemplo, una ruleta dividida en sectores iguales. • Identifican experimentos aleatorios que permiten asignar probabilidades a sus eventos en forma teórica mediante el modelo de Laplace. • Identifican experimentos aleatorios que permiten asignar probabilidades a sus eventos de acuerdo a las frecuencias relativas. • Asignan probabilidades de ocurrencia a eventos, mediante el modelo de Laplace o las frecuencias relativas, de acuerdo a las características del experimento aleatorio.

En relación a los OFT, esta unidad promueve

Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos.

- Propone temas de su interés para trabajar en clases.
- Aporta información complementaria sobre los temas abordados.
- Formula preguntas sobre los temas implicados en la información trabajada.
- Plantea opiniones al interpretar los datos.
- Argumenta y contraargumenta con base en los datos analizados.

Observaciones al docente

Tal como lo sugieren los aprendizajes esperados, esta unidad se conecta naturalmente con los Objetivos Fundamentales Transversales. A través del trabajo propuesto en Datos y Azar, se puede incentivar el interés por conocer la realidad y la búsqueda de la información en diversas fuentes. Por otra parte, el terreno es propicio para promover una actitud crítica frente a la información presente en los diferentes medios de comunicación y el trabajo en equipo en la resolución de problemas que involucren el análisis de datos. Aspectos deseables son también el formular preguntas, plantear opiniones y argumentar con base en los datos analizados

Es importante trabajar en contextos de interés para los estudiantes, especialmente en el ámbito de la estadística. Estos contextos pueden extraerse de diarios, revistas o Internet, de modo que los estudiantes vean permanentemente que la estadística está en conexión con la vida cotidiana y es una herramienta para interpretar y modelar la realidad a través de representaciones tales como tablas y gráficos. Se recomienda motivar a los estudiantes a que discutan respecto a cuándo es más pertinente utilizar histogramas y cuándo es pertinente usar polígonos de frecuencia, de modo que ellos desarrollen la capacidad de decidir respecto al uso de este tipo de representaciones, en función del tipo de datos y el propósito de un estudio. Dado que también deben trabajar las medidas de tendencia central (media, moda y mediana), es importante que los estudiantes verifiquen las formas de obtener dichas medidas a partir de un conjunto de datos agrupados. Se sugiere además incorporar a la discusión las medidas de posición, las cuales permiten obtener nueva información y comparar conjuntos de datos. A partir de los cuartiles, esta es una buena ocasión para mostrar la utilidad de los gráficos de "caja y bigotes", los cuales permiten comparar conjuntos de datos.

Respecto a los contenidos de población y muestra, se recomienda plantear discusiones con los estudiantes acerca de qué sucede al tomar distintas muestras de igual tamaño desde una misma población. Por ejemplo, si se tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y se toman muestras de tamaño 2, la idea sería comparar la media aritmética del conjunto original que es igual a 3, con la media aritmética de las medias muestrales y conjeturar acerca de la relación existente. Finalmente, concluir acerca de ¿qué sucede si se toman todas las muestras de tamaño 2?

En la parte de probabilidades, se pone énfasis en la obtención de la "cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones". Esa es una oportunidad para incorporar las técnicas combinatorias que principalmente potencian el conteo.

Por otra parte, se sugiere realizar situaciones experimentales en las que no sea posible aplicar el modelo de Laplace. El propósito es que los estudiantes verifiquen las condiciones del experimento y establezcan que si no es posible aplicar Laplace, entonces – por ejemplo – se puede realizar el experimento o simularlo y verificar qué sucede con las frecuencias relativas. En otras palabras deben buscar regularidades en los resultados al ejecutar los lanzamientos. Por ejemplo, utilizar un dado cargado (no está perfectamente equilibrado) con el cual no se puede fijar *a priori* que cada cara tiene $1/6$ de posibilidades de salir. En este caso es necesario utilizar una tabla de frecuencias y registrar un número razonablemente elevado de lanzamientos para ver dónde se estabilizan las frecuencias para cada cara del dado. Otros casos resultan al analizar experimentos aleatorios donde se deja caer un vaso plástico (material liviano) o un "chinche". Lo primero es determinar cuáles son los eventos posibles al caer: hacia arriba, de costado o hacia abajo. Luego la pregunta es ¿cuál es la probabilidad de ocurrencia para cada uno de los eventos? Al igual que el caso del dado, aquí es necesario hacer el experimento.

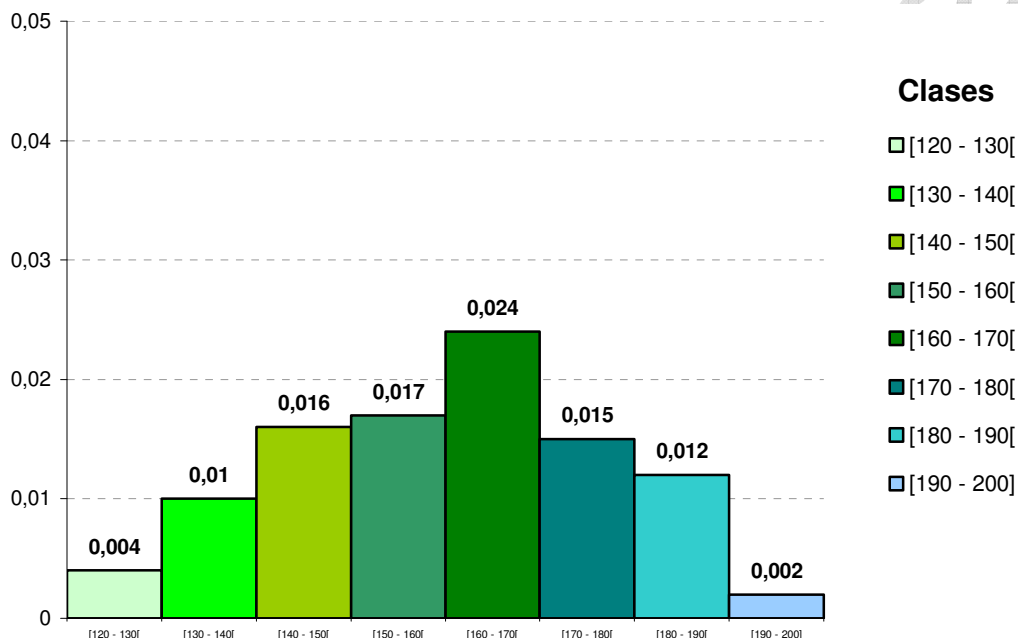
Por último, se puede referenciar situaciones en las que el modelo de Laplace, por ejemplo, ha sido aplicado erróneamente. Un ejemplo histórico es el clásico “error de D’Alembert” al trabajar con el experimento de lanzar dos monedas.

Ejemplos de actividades

AE1: Obtener información a partir del análisis de datos, en diversos contextos, presentados en gráficos y tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, considerando la interpretación de medidas de tendencia central.

Actividades

1.- Obtienen información a partir de la lectura de histogramas y polígonos de frecuencia en diferentes contextos. Por ejemplo, el siguiente histograma⁴, representa las frecuencias relativas obtenidas de las estaturas de un grupo aleatorio de 100 personas.



Observaciones al docente

Notar que cada barra debe tener área igual a la frecuencia relativa del intervalo que forma su base. Por esta razón se divide la frecuencia relativa de un intervalo por su longitud, y se usa este valor como la altura del rectángulo que dibujamos en el gráfico.

Dado que cada rectángulo del histograma tiene área igual a la frecuencia relativa, y como la suma de todas las frecuencias relativas es igual a 1, se tiene que el área total bajo el histograma es igual a 1, pues corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos. Puedes observar esto en el histograma anterior.

Cuando las longitudes de las clases (intervalos) sean iguales, como en el ejemplo anterior, es posible construir el histograma considerando, como alto de barras, sólo las frecuencias relativas o absolutas de la variable.

⁴ Tomado del texto del estudiante “El poder de la información y la toma de decisiones”. Unidad de Estadística 4º Medio. Enlaces Matemática. Centro Comenius USACH.

Responden preguntas del tipo:

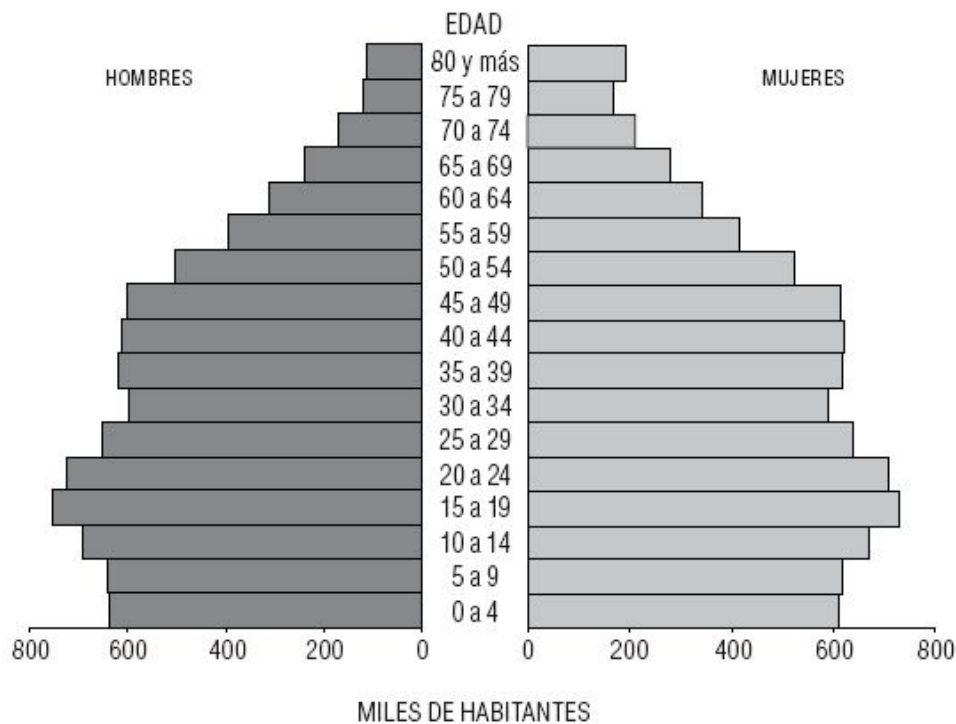
Aproximadamente, ¿dónde se encuentran la media y la moda del conjunto de datos?

2.- Extraen información y escriben conclusiones de información estadística entregada con distintos tipos de gráficos. Por ejemplo:

Observan el gráfico⁵ que se presenta a continuación y responden:

- La cantidad de hombres mayores de 35 años va disminuyendo sistemáticamente. ¿Qué ocurre con la cantidad de mujeres en ese rango de edad?
- El grupo de mayores de 80 años, ¿por qué sexo está compuesto mayoritariamente?

Distribución de la población estimada al 30 de junio, por sexo y grupos de edad. País 2009



Observaciones al docente

Se sugiere que el docente genere más preguntas para incentivar la discusión entre los estudiantes con opiniones basadas en la extracción correcta de información del gráfico. Se puede complementar el análisis pidiendo a los estudiantes que justifiquen el uso de este tipo de gráfico para representar el conjunto de datos.

⁵ FUENTE: Chile Proyecciones y Estimación de población Censo 2002.

http://www.ine.cl/canales/menu/publicaciones/compendio_estadistico/pdf/2009/1_2_estadisticas_demograficas.pdf

3.- Extraen información y escriben conclusiones de información estadística entregada en tablas de frecuencia. Por ejemplo:

La tabla que se muestra a continuación resume la estatura de 60 deportistas de un club.

Intervalo	Punto medio	Frecuencia	Frecuencia Relativa	Frecuencia Relativa Porcentual
[1,65 – 1,70[8		
[1,70 – 1,75[12		
[1,75 – 1,80[18		
[1,80 – 1,85[14		
[1,85 – 1,90[6		
[1,90 – 1,95]		2		

$N=60$

- Completan la tabla de distribución de frecuencias con las columnas que aparecen.
- Calculan las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) de la muestra.
- Interpretan el significado de cada una de las medidas de tendencia central acorde al contexto.

Observaciones al docente: Se sugiere que el docente genere más preguntas para justificar la construcción de cada columna de la tabla, de modo que de cada una de ellas el estudiante pueda extraer información útil.

Se sugiere que los estudiantes en conjunto con el docente revisen y discutan procedimientos para obtener las medidas de tendencia central para datos agrupados en intervalos. Es necesario considerar cuándo se está realizando una aproximación del valor. Los estudiantes pueden verificar esto, por ejemplo, tomando un conjunto de datos y determinar el promedio con todos ellos. Luego aplican alguna estrategia para trabajar con los datos agrupados y obtienen el promedio de esta manera. Deben comparar ambos resultados.

AE2: Producir información, en contextos diversos, a través de gráficos y tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, manualmente o mediante herramientas tecnológicas.

Actividades

1.- Producen información relevante, a partir de un conjunto de datos en un cierto contexto. Por ejemplo:

A un grupo de 45 fumadores de distintas edades se les consultó por la cantidad de años que llevan fumando. El resultado de la encuesta se da en la siguiente tabla:

1	41	38	22	43	29	19	16	1	35	29	2	29	46	20
31	2	20	25	22	25	31	3	19	15	42	38	30	16	18
28	18	3	27	23	28	6	12	32	36	7	28	10	50	28

2.- Construyen una tabla de distribución de frecuencias en intervalos para organizar la información, estableciendo la cantidad de intervalos y su ancho más adecuado. Incluyen en la tabla el punto medio o marca de clase del intervalo, las frecuencias, las frecuencias relativas y las frecuencias relativas porcentuales.

3.- Escogen y construyen un gráfico para presentar la información.

4.- Calculan las medidas de tendencia central de la muestra (media, mediana y moda).

5.- Ingresan los datos a una planilla electrónica y construyen un gráfico adecuado para verificar la respuesta anterior.

6.- Responden a la pregunta: ¿cuál es la menor cantidad de años que lleva un fumador? ¿Y la mayor?

7.- Responden a la pregunta: ¿cuánto tiempo como mínimo lleva fumando la mayoría de los encuestados?

Observaciones al docente: La construcción de la tabla requiere el cálculo del rango de los datos y la determinación del ancho de los intervalos que se formarán, valores que están sometidos a recomendaciones prácticas para no perder exactitud de la información y no dificultar su tratamiento.

Se sugiere al docente enseñar explícitamente la utilización de un software que permita la manipulación de datos y la construcción de gráficos.

AE 3:

Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia.

Actividades

1.- Determinan las combinaciones posibles a partir de un conjunto finito de objetos. Por ejemplo, ante la siguiente situación: *María tiene en su closet 6 blusas de las cuales 2 son blancas, 3 son verdes y una es negra con lunares blancos, 8 pantalones 4 negros dos café y dos azules, los estudiantes pueden responder preguntas del tipo:*

- ¿De cuántas maneras posibles puede combinar las blusas con los pantalones?
- ¿Cuántas combinaciones posibles puede hacer de una blusa verde con un pantalón negro?
- Si María se viste sacando al azar una blusa y un pantalón ¿cuál es la probabilidad que María vista una blusa negra con lunares blancos y un pantalón negro?

Observaciones al docente

Se debe estimular el uso de técnicas combinatorias, en particular el principio multiplicativo, como herramientas para ayudar en el conteo de los elementos de un espacio muestral.

Finalmente, generar discusión en torno a las técnicas utilizadas para responder las preguntas.

2.- Utilizan diagramas de árbol para determinar el espacio muestral de diversos experimentos aleatorios. Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados, el lanzamiento de un dado y una moneda, el lanzamiento de tres monedas, etc.

3.- Utilizan técnicas combinatorias apropiadas para determinar la cardinalidad de espacios muestrales de experimentos aleatorios.

4.- Seleccionan la técnica combinatoria apropiada para resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades, acorde a los requerimientos de cada problema. Por ejemplo, combinaciones.

AE 4:

Calcular la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas desde una población.

AE 5:

Formular conjeturas y verificarlas en casos particulares acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha población.

Actividades

1.- Extraen muestras al azar de igual tamaño de una población finita P. Por ejemplo, de una población que tiene como elementos los números 2, 4, 5, 6, 7, 9:

a) Extraen 5 muestras al azar de tamaño 3.

b) Calculan la media de cada una de las muestras, con esto obtiene los números $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}$

c) Calculan la media de los números $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}$ y la denota $\overline{\overline{X_5}}$

d) Calculan la media de la población y la compara con $\overline{\overline{X_4}}$

2.- Extraen, de P, un número mayor de muestras de tamaño 3, por ejemplo 7 y repite el proceso anterior, es decir:

a) Calculan la media de cada una de las muestras, con esto obtiene los números $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}, \overline{x_7}$

c) Calculan la media la media de los números $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}, \overline{x_7}$ y la denota $\overline{\overline{X_7}}$

d) Comparan la media de la población P con $\overline{\overline{X_7}}$

3.- Realizan nuevamente el experimento anterior pero con mayor cantidad de muestras de tamaño 3 y calculan la media de las medias y la comparan con la media de la población.

4.- Conjeturan acerca de la relación que existe entre la media de las medias de muestras de igual tamaño extraídas desde una población y la media de ésta.

5.- Verifican la conjetura formulada en casos particulares.

Observaciones al docente Puede resultar útil proponer el uso de la calculadora para generar números aleatorios. La idea es utilizar la función "aleatorio" para generar números al azar entre 0 y 1. También puede generar números aleatorios entre 1 y 15, usando la misma función. Cabe mencionar que en esta experiencia también se podría utilizar una planilla electrónica para generar dichos números.

Esta actividad es una oportunidad para observar la manera en que los estudiantes establecen métodos para generar muestras aleatorias a partir de un conjunto mayor o población.

En la elección de muestras aleatorias podría ser útil usar "papelitos" con los números de las bolitas y extraer 5 de ellos al azar. En este punto es importante destacar que cada bolita – dada las condiciones de la elección – tiene la misma probabilidad de ser escogida que las demás. La comprensión de este hecho apunta a la importancia de la elección de muestras aleatorias, en el sentido de que no haya un sesgo en el experimento.

Ahora bien, el uso de la calculadora o planilla electrónica permite el mismo resultado que la bolsa con papelitos. El potencial en este caso es la simulación de números aleatorios entre dos valores dados.

AE 6:

Interpretar información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

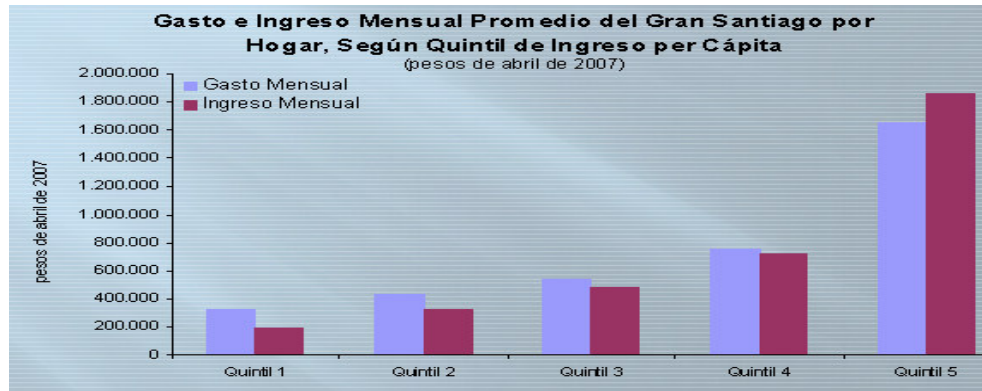
AE 7:

Producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

Actividades

®1.- A partir de un gráfico o de una tabla de datos de su interés, extraen información relevante para el contexto. Por ejemplo:

El siguiente gráfico muestra el gasto y el ingreso medio de los hogares de Santiago, según quintil.

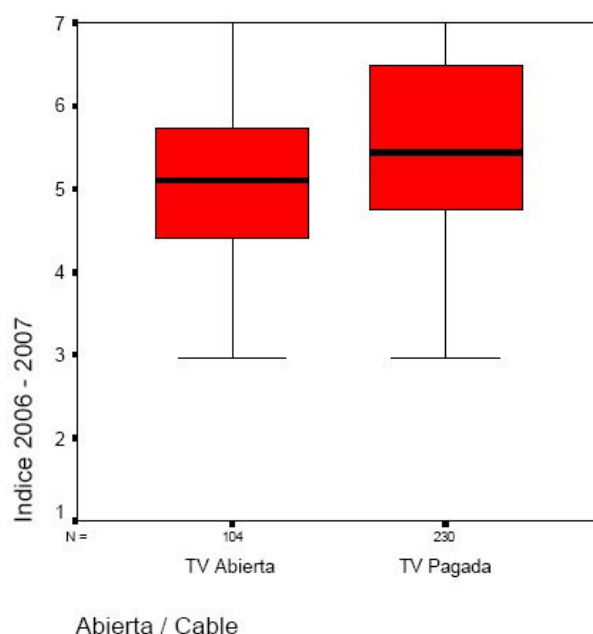


http://www.ine.cl/canales/chile_estadistico/encuestas_presupuestos_familiares/2008/Presentacion%20EPF%202006-2007.pdf

- Interpretan el gráfico extrayendo información relevante basada en las medidas de posición (quintiles) y de tendencia central (promedio) que se muestran (hacen una estimación de estas medidas).
- Conjeturan acerca del gasto-ingreso medio del percentil 80.
- Comparan los promedios de gasto e ingreso en los primeros cuatro quintiles.
- Estiman el valor de las medidas de tendencia central de la muestra.
- Discuten sobre los factores que influyen en los datos.

2.- Comparan dos o más conjuntos de datos usando medidas de tendencia central y de posición. Por ejemplo, comparan usando diagramas de caja y bigotes. En el siguiente gráfico⁶ se muestra la valoración (puntaje) hacia las opciones de TV abierta y TV pagada respecto de la programación infantil. Se evalúan 297 programas.

⁶ Fuente: CNTV Departamento de Estudios 2007.



Otros datos son:

	Media	Mediana
TV Abierta	5,14	5,08
TV Pagada	5,47	5,43

Responden a la pregunta ¿qué se puede concluir respecto a la valoración de la TV pagada versus la TV abierta?

Observaciones al docente

Esta es una buena oportunidad para introducir los diagramas de caja y bigotes, los cuales permiten comparar conjuntos de datos a partir de los valores: máximo, primer cuartil, segundo cuartil, tercer cuartil y mínimo.

3.- A partir de información gráfica expresada en polígonos de frecuencia acumulada, establecen relaciones considerando medidas de posición tales como cuartiles, quintiles u otro percentil.

4.- Realizan un estudio estadístico de un tema de interés que incluya:

- Recopilación de información
- Síntesis de la información mediante el cálculo de las medidas de tendencia central y algunas medidas de posición
- Representación gráfica de la información, seleccionando el gráfico más adecuado de acuerdo a la clasificación de la variable en estudio
- Análisis de la información a través de una planilla electrónica que facilita los cálculos y permite verificar los propios, además de contribuir en la exactitud de la representación gráfica.

Observaciones al docente

Esta actividad puede constituirse como un proyecto de curso, en el cual los estudiantes se motiven a realizar un estudio de interés que parte de una o varias preguntas que necesitan ser respondidas. La importancia de este trabajo radica en el hecho de que puede integrar a más de un aprendizaje esperado.

AE 8: Utilizar el cálculo de medidas de tendencia central y de posición para analizar muestras de datos agrupados en intervalos.

Actividades

1.- Calculan la media de muestras obtenidas de una población y que están agrupadas en intervalos, y utilizan este cálculo para analizar la muestra. Por ejemplo, en un colegio se toman muestras de estudiantes de edades entre 10 y 11 años para analizar sus pesos. El docente entrega a los estudiantes información relativa a estas muestras en intervalos y les pide que la analicen utilizando cálculos de la media de estos datos.

2. El docente pide ahora a sus estudiantes que utilicen cuartiles para analizar la información anterior y que entreguen conclusiones al respecto.

AE 9: Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

Actividades

1.- Realizan una lista de experimentos aleatorios y destacan aquéllos que tienen resultados equiprobables.

2.- Discuten situaciones o anécdotas históricas respecto a la equiprobabilidad de sucesos y el modelo de Laplace: Por ejemplo, acerca del error de D'Alembert respecto al lanzamiento de dos monedas idénticas.

Observaciones al docente

Para mayor información respecto al error de D'Alembert, se puede ingresar a:

http://www2.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1317-58152009000100004&lng=es&nrm=iso

3.- Realizan una lista de experimentos en los que "a priori" no pueden asegurar equiprobabilidad de los resultados. Por ejemplo, lanzar dados cargados o no equilibrados, lanzar chinchas o vasos plásticos. Justifican entonces por qué no se puede aplicar el modelo de Laplace.

4.- Calculan probabilidades en experimentos de diversos contextos, escribiendo en su cuaderno la justificación del modelo (frecuencias relativas o Laplace) utilizado en el cálculo. Por ejemplo:

- *En el juego de la ruleta, cierto jugador experto registró los resultados de 100.000 lanzamientos en un mes. Obtuvo que la bolita cayó aproximadamente 49.500 veces en el color negro, aproximadamente 48.500 veces en el color rojo y, el resto de las ocasiones cayó en el cero (verde).*
- *Si el jugador se dispone a apostar, ¿por qué color lo hará? Justifique su respuesta.*
- *La ruleta tiene 36 números negros, 36 números rojos y 1 número verde. Sabiendo que los resultados son equiprobables, ¿qué color jugaría usted?*
- *¿Todos los colores tienen la misma probabilidad de ocurrencia?*



Observaciones al docente Se sugiere al docente implementar el cálculo de probabilidades utilizando tanto el modelo de frecuencias relativas como el modelo de Laplace.

Actividad de Evaluación

Aprendizajes Esperados:

- **Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia.**
- **Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.**

Indicadores de Evaluación:

- Determinan la cardinalidad de un espacio muestral utilizando el principio multiplicativo en diversos experimentos aleatorios. Por ejemplo, al lanzar un dado y una moneda, el espacio muestral tiene $6 \cdot 2 = 12$ resultados posibles.
- Obtienen el número de muestras aleatorias posibles de un tamaño dado que se pueden extraer, sin reposición, desde una población de tamaño finito, aplicando el número combinatorio.
- Seleccionan la técnica combinatoria apropiada para resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades, acorde a los requerimientos de cada problema.
- Asignan probabilidades de ocurrencia a eventos, mediante el modelo de Laplace o las frecuencias relativas, de acuerdo a las características del experimento aleatorio.

Instrucciones.

Responda a las siguientes preguntas de acuerdo a las situaciones propuestas.

1. Una caja contiene 6 fichas numeradas del 1 al 6. Se sacan al azar tres fichas de una vez. Luego se forman, con las tres fichas sacadas, todos los números de tres cifras posibles.

a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

b) ¿Cuál es la probabilidad que al sacar las tres fichas se pueda formar exactamente un número par?

c) ¿Cuál es la probabilidad que al sacar las tres fichas se pueda formar al menos un número impar?

2. En un curso de 50 estudiantes, ¿cuántas muestras de 5 estudiantes se pueden seleccionar al azar, sin que se repitan estudiantes en las distintas muestras?

Criterios de evaluación

1. Determinan cardinalidad de un espacio muestral.

2. Obtienen número de muestras posibles.

3. Calculan la probabilidad de un evento utilizando técnicas de combinatoria.

Documento borrador

Referencias bibliográficas para el docente

- **Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, Matemática.** Ministerio de Educación de Chile. Mayo 2009.
- **Ministerio de Educación.** Matemática. Programa de Estudio, Primer Año Medio. 2004.
- **Ministerio de Educación.** Matemática. Programa de Estudio, Segundo Año Medio. 2004.
- **Ministerio de Educación.** Matemática. Guía didáctica para el profesor. Primer Año Medio. Reyes, C. y Valenzuela, Marisol. Editorial Mc Graw Hill. 2006.
- **Enseñar matemáticas.** Alsina, Burgués, Fortuny, Giménez y Torra. Editorial Graó, Madrid. 1996.
- **Ingeniería didáctica en educación matemática.** Artigue, Michéle y otros. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1ª edición. 1995.
- **Números decimales.** Centeno Jlia. Editorial Síntesis. Madrid. 1995.
- **La matemática aplicada a la vida cotidiana.** Corbalán Fernando. Editorial Graó, Barcelona, 1995.
- **El aprendizaje de las Matemáticas.** Dickson L., Brown M., y Gibson O. Editorial Labor S.A. Barcelona, 1991.
- **Razonamiento Matemático.** Rodríguez, José y otros. Internacional Thompson Editores, México, 1997, 1ª edición.
- **Números Enteros. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje.** Vargas-Machuca, Inmaculada; González, José Luis y otros. Editorial Síntesis, Madrid. 1990
- **101 Actividades para implementar los Objetivos Fundamentales transversales.** Winston H Elphick D. Lom Ediciones, 2001.
- **Fundamentos de matemática universitaria. Álgebra y Cálculo.** Valenzuela, P. H. Editorial Pearson. 2006.
- **Álgebra y Trigonometría. Séptima Edición.** Sullivan, M. Pearson/ Prentice Hall. 2006.
- **Álgebra Superior. Schaum. Tercera Edición.** Spiegel M., Moyer R. E. Mc Graw Hill. 2006.
- **Álgebra.** Lehmann, Charles. Editorial Limusa. 2001.
- **Álgebra, trigonometría y geometría.** Smith, Stanley A. Prentice Hall.
- **El poder de la generalización. Primero Medio. Material del Estudiante. Enlaces Matemática Aprender Matemática Creando Soluciones.** Moya, M.; Troncoso, M.; Yañez, M. 2008.
- **Calculadoras: Introducción al Álgebra.** Cedillo, Tenoch. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1997. 1ª edición.
- **Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.** Malila C. Ghyka. Editorial Poseidón, Buenos Aires. 1968.
- **El hombre que calculaba.** Júlio César de Mello e Souza (Malba Tahan). Editorial Limusa S.A. De C.V., 2002.
- **Construcciones Geométricas Mediante un Compás,** A. N. Kostovsky, Editorial Mir, Moscú, 1984.
- **Geometría elemental.** Villanueva y otros. Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago 1993.
- **Buscando un orden para el azar, Proyecto Enlaces Matemática.** Araya S. Roberto y Matus Claudia. Editado por Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile. 2008. 2ª edición.
- **Azar y probabilidad.** Díaz J y otros. Editorial Síntesis, Madrid, 1987.
- **Introducción a la Estadística.** Portus Govinden L. Editorial Mc Graw Hill, 1998. 2ª Edición.
- **Contenidos Básicos de Estadística y Probabilidad.** Saavedra G. Eugenio. Editorial Universidad de Santiago, colección ciencias. 2005.
- **Educación Matemática y buenas prácticas.** Nuria Planas y Ángel Alsina. Editorial Grao. Barcelona. 2005.
- **Didáctica de la Matemática.** Bruno D'Amore. Cooperativa Editorial Magisterio. Colombia. 2006.
- **Enseñar Matemática Hoy.** P. Sadovsky. Libros del Zorzal. Argentina 2005.
- **Aprendizaje Cooperativo en Matemática.** J.M. Serrano y otros. Universidad de Murcia. 1997.
- **El Currículo de Matemática en los inicios del siglo XXI.** J.M. Goñi (Coord.). Editorial Grao. Barcelona. 2000.
- **Las Matemáticas en el entorno.** Revista UNO. Editorial Grao. Barcelona. 1997
- **Encuentros cercanos con la matemática.** M.E. Duhalde, M.T González. Editorial AIQUE. Argentina. 2003.
- **Un club de Matemática para la diversidad.** Luz Callejo. Narcea. Madrid. 1994.
- **Heurística Geométrica.** G. García Talavera Editorial Limusa. México. 1998.
- **Las Matemáticas, perejil de todas las salsas.** R. Berlanga, C. Bosch, J. Rivaud Fondo de Cultura Económica. México. 2000.
- **Matemática Educativa.** C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro Edit. Díaz de Santos. Madrid. 2007.
- **Desarrollo del pensamiento Matemático.** R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanis, R. Rodríguez, A. garza 2003.
- **"Una introducción a la didáctica de la matemática",** en *Enseñanza de la Matemática*, Artigue, M., Selección bibliográfica, traducción para el PTFD, MCyE 1994.

- **Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática**, Johsua S., Dupin J. (2005), Buenos Aires, Colihue.
- **La matemática: su contenido, métodos y significado. Tres volúmenes.** Aleksandrov, A; Kolmogorov, A; Laurentiev, M y otros. Alianza universidad. Madrid. 1976.
- **Materiales para construir la geometría.** Alsina Catalá, C., Burgués Flamerich, C., Fortuny Aymeny, J. M. Editorial Síntesis. 1988.
- **Invitación a la didáctica de la geometría.** Alsina Catalá, C.; Fortuny Aymeni, J. M.; Burgués Flamerich, C. Editorial Síntesis. Madrid.
- **Simetría dinámica.** Alsina Catalá, C. Y otros. Editorial Síntesis. 1990.
- **Historia de la matemática.** Argüelles Rodríguez, J. Editorial Akal. 1989.
- **Hoja de Cálculo en la enseñanza de las matemáticas en Secundaria.** Arias, Nafría, Domínguez, Santiso, Díez, Garrán, Timón, Caravantes, Martínez, Villarino, Sáenz Y González. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid. 1992.
- **Funciones y gráficas.** Azcárate Giménez, C.; Deulofeu Piquet, J. Editorial Síntesis. 1990.
- **Historia de las Matemáticas.** Boyer, C.B. Alianza Universidad Textos. Madrid. 1987.
- **Curso de Álgebra y Geometría.** Burgos De, J. Alhambra Longman. Madrid. 1994.
- **La matemática creación y descubrimiento.** Cañón, C. Universidad Pontificia de Comillas. Madrid. 1993.
- **Retorno a la Geometría.** Colección "La Tortuga de Aquiles". Coxeter, H.S.M. y S.L. Greitzer. DLS-Euler Editores. Madrid. 1994.
- **El ingenio en las Matemáticas.** Colección "La Tortuga de Aquiles". Honsberger, R. DLS-Euler Editores. Madrid. 1994.

Páginas Web recomendadas:

- Ministerio de Educación de Chile
<http://www.mineduc.cl>
- Instrumentos Curriculares (Mapas de Progreso, Programas de estudio, etc)
<http://www.curriculum-mineduc.cl/>
- Instituto Nacional de Estadísticas
<http://www.ine.cl>
- Red Maestros de Maestros (MINEDUC)
<http://www.rmm.cl>
- Sitio Key Curriculum Press de textos de matemática Geometría:
<http://www.keypress.com/x19850.xml> (Ver capítulos de lecciones en español)
Álgebra
<http://www.keypress.com/x19578.xml> (Ver capítulos de lecciones en español)
- Textos para el docente y el estudiante educación secundaria México:
<http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/recdidactico.html>
http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mat_ed/mat_ed_01.php

Recursos digitales interactivos en la Web:

- **Portal Educar Chile:**
<http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119>
- **Enlaces:**
http://www.catalogored.cl/recursos-educativos-digitales?nivel_educativo=50&subsector_basica=65
- **Proyecto Descartes**, España:
<http://recursostic.educacion.es/descartes/web/>
- **Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales**, applets de la Universidad de UTAH:
<http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>
- **EDUTEKA**, Portal Educativo, Colombia:
 - <http://www.eduteka.org/directorio>, luego elegir la carpeta "Matemáticas" o bien desde el enlace directo:
 - http://www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=204
 - Actividades sugeridas por temas: <http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/>

Referencias bibliográficas para el alumno

- **Heurística Geométrica.** G. García Talavera Editorial Limusa. México. 1998.
- **Desarrollo del pensamiento Matemático.** R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanis, R. Rodríguez, A. garza 2003.
- **Historia de la matemática.** Argüelles Rodríguez, J. Editorial Akal. 1989.
- **Hoja de Cálculo en la enseñanza de las matemáticas en Secundaria.** Arias, Nafría, Domínguez, Santiso, Díez, Garrán, Timón, Caravantes, Martínez, Villarino, Sáenz Y González. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid. 1992.
- **Funciones y gráficas.** Azcárate Giménez, C.; Deulofeu Piquet, J. Editorial Síntesis. 1990.
- **Historia de las Matemáticas.** Boyer, C.B. (1987). Alianza Universidad Textos. Madrid.
- **Curso de Álgebra y Geometría.** Burgos De, J. Alhambra Longman. Madrid. 1994.
- **La matemática creación y descubrimiento.** Cañón, C. Universidad Pontificia de Comillas. Madrid. 1993.
- **Retorno a la Geometría.** Colección "La Tortuga de Aquiles". Coxeter, H.S.M. y S.L. Greitzer. DLS-Euler Editores. Madrid. 1994.
- **El ingenio en las Matemáticas.** Colección "La Tortuga de Aquiles". Honsberger, R. DLS-Euler Editores. Madrid. 1994.
- **El hombre que calculaba.** Júlio César de Mello e Souza (Malba Tahan). Editorial Limusa S.A. De C.V., 2002.
- **Buscando un orden para el azar. Proyecto Enlaces Matemática.** Araya S. Roberto y Matus Claudia. Editado por Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile. 2008. 2ª edición.
- **Introducción a la Estadística.** Portus Govinden L. Editorial Mc Graw Hill, 1998. 2ª Edición.
- **El poder de la generalización. Primero Medio. Material del Estudiante. Enlaces Matemática Aprender Matemática Creando Soluciones.** Moya, M.; Troncoso, M.; Yañez, M. 2008.

Páginas Web sugeridas:

- Textos para el docente y el estudiante educación secundaria México:
<http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/reccdidactico.html>
http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mat_ed/mat_ed_01.php

Recursos digitales interactivos en la Web:

- **Portal Educar Chile:**
<http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119>
- **Enlaces:**
http://www.catalogored.cl/recursos-educativos-digitales?nivel_educativo=50&subsector_basica=65
- **Proyecto Descartes, España:**
<http://recursostic.educacion.es/descartes/web/aplicaciones.php>
- **Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales**, applets de la Universidad de UTAH:
 - El enlace genérico es <http://nlvm.usu.edu/es/nav>, o bien puede escoger los enlaces directos:
 - **Números y operaciones:**
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_q_4_t_1.html
 - **Álgebra:**
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_q_4_t_2.html
 - **Geometría:**
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_q_4_t_3.html
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_q_4_t_4.html
 - **Análisis de Datos y Probabilidad:**
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_q_4_t_5.html
- **EDUTEKA**, Portal Educativo, Colombia:
 - Actividades sugeridas: <http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/>
 - El enlace genérico de las unidades temáticas es <http://www.eduteka.org/directorio> o bien puede escoger los enlaces directos:

- Números y operaciones:

http://www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=362

- Geometría

http://www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=363

http://www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=364

- Probabilidad y Estadística

http://www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=365

- Álgebra

http://www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=366

Referencias bibliográficas CRA

Unidad	Autor	Título	Sello
Unidad 1	Baldor, Aurelio	Aritmética	Publicaciones Cultural
Unidad 1	Gardner, Martin	Carnaval matemático	Alianza Editorial
Unidad 1 y 2	Varios Autores	Aritmética y álgebra	Santillana
Unidad 1, 2, 3 y 4	Argüelles, Juan	Historia de la matemática	Akal
Unidad 1, 2, 3 y 4	Argüelles, Juan	Matemática recreativa	Akal
Unidad 1, 2, 3 y 4	Berlanga ; otros	Las matemáticas, perejil de todas las salsas	Fondo de Cultura Económica
Unidad 1, 2, 3 y 4	Corbalán, Fernando	La matemática aplicada a la vida cotidiana	Graó
Unidad 1, 2, 3 y 4	Galdós, L	Consultor matemático	Cultural de Ediciones
Unidad 1, 2, 3 y 4	Gardner, Martin	Los acertijos de Sam Loyd	Zugarto
Unidad 1, 2, 3 y 4	Gardner, Martin	Magia inteligente	Zugarto
Unidad 1, 2, 3 y 4	Gardner, Martin	Matemática para divertirse	Zugarto
Unidad 1, 2, 3 y 4	Guedj, Denis	El imperio de las cifras y los números	Ediciones B
Unidad 1, 2, 3 y 4	Heber Nieto, José	Olimpiadas matemáticas: el arte de resolver problemas	Los libros de El Nacional
Unidad 1, 2, 3 y 4	Irizo, Constanza ; López, Jorge	De la prensa a las matemáticas	Octaedro
Unidad 1, 2, 3 y 4	Jiménez, Douglas	Matemáticos que cambiaron al mundo	Los libros de El Nacional
Unidad 1, 2, 3 y 4	Kline, Morris	Matemáticas para los estudiantes de humanidades	Fondo de Cultura Económica
Unidad 1, 2, 3 y 4	Mataix, Mariano	Esbozos biográficos y pasatiempos matemáticos	Marcombo
Unidad 1, 2, 3 y 4	Nomdedeu, X	Mujeres, manzanas y matemáticas, entretejidas	Nivola Libros
Unidad 1, 2, 3 y 4	Pérez-Ruiz Soberón, Mario	Pitágoras. El misterio de la voz interior. Una investigación de arqueología filosófica	Océano
Unidad 1, 2, 3 y 4	Serrano, Esteban	¡Ojalá no hubiera números!	Nivola Libros
Unidad 1, 2, 3 y 4	Tahan, Malba	El hombre que calculaba	Pluma y Papel
Unidad 1, 2, 3 y 4	Tahan, Malba	Matemática curiosa y divertida	Pluma y Papel
Unidad 1, 2, 3 y 4	VanCleave, Janice	Matemáticas para niños y jóvenes	Limusa
Unidad 2	Moreno, R.	Alhacén, el arquímides árabe	Nivola Libros
Unidad 2	Rojano, T. ; Ursini, S.	Aprendiendo álgebra con hojas electrónicas de cálculo	Iberoamérica
Unidad 3	Baldor, Aurelio	Geometría y trigonometría	Publicaciones Cultural
Unidad 3	Baldor, Aurelio	Geometría y trigonometría (santillana)	Publicaciones

			Cultural
Unidad 3	Filloy, E. ; Hitt, F.	Geometría analítica	Iberoamérica
Unidad 1, 2, 3 y 4	Carreño, Ximena ; Cruz, Ximena	Algebra	Arrayán Editores

Documento borrador

Anexo 1: Uso flexible de otros instrumentos curriculares

Existe un conjunto de instrumentos curriculares que los docentes pueden utilizar de manera conjunta y complementaria con el programa de estudio. Estos pueden ser usados de manera flexible para apoyar el diseño e implementación de estrategias didácticas y para evaluar los aprendizajes.

Orientan sobre la progresión típica de los aprendizajes

Mapas de progreso⁷. Ofrecen un marco global para conocer cómo progresan los aprendizajes clave a lo largo de la escolaridad⁸.

imagen
mapas

Pueden ser usados, entre otras posibilidades, como un apoyo para abordar la diversidad de aprendizajes que se expresa al interior de un curso, ya que permiten:

- caracterizar los distintos niveles de aprendizaje en los que se encuentran los estudiantes de un curso.
- reconocer de qué manera deben continuar progresando los aprendizajes de los grupos de estudiantes que se encuentran en estos distintos niveles.

Apoyan el trabajo didáctico en el aula

Textos escolares. Desarrollan los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios para apoyar el trabajo de los alumnos en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación.

Imagen
texto

Los docentes pueden enriquecer la implementación del currículum haciendo también uso de los recursos entregados por el Mineduc a través de:

- Los **Centros de Recursos para el Aprendizaje (CRA)** y los materiales impresos, audiovisuales, digitales y concretos entregados a través de éstos.
- El **Programa Enlaces**, y las herramientas tecnológicas que éste ha puesto a disposición de los establecimientos.

⁷ En la página web del Ministerio de Educación se encuentra disponible el documento **“Orientaciones para el uso de los Mapas de Progreso del Aprendizaje”** y otros materiales que buscan apoyar el trabajo con los mapas (<http://www.curriculum-mineduc.cl/ayuda/documentos/>).

⁸ En una página describen en 7 niveles el crecimiento típico del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector a lo largo de los 12 años de escolaridad obligatoria. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel I corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de Segundo Básico; el nivel 2 corresponde al término de Cuarto Básico, y así sucesivamente. El nivel 7 describe el aprendizaje de un alumno o alumna que al egresar de la Educación Media es “sobresaliente”, es decir, va más allá de la expectativa para Cuarto Medio, que describe el nivel 6 en cada mapa.

ANEXO 2: Planificación y evaluación: Orientaciones específicas

1. Planificación

Planificación anual, por unidad y plan de clase

Se sugiere que la forma de plantear la planificación arriba propuesta sea utilizada tanto en la planificación anual como en la correspondiente a cada unidad y al plan de cada clase.

La planificación anual: En este proceso el docente debe distribuir los aprendizajes esperados a lo largo del año escolar considerando su organización por unidades, estimar el tiempo que se requerirá para cada unidad, y priorizar las acciones que conducirán a logros académicos significativos

Para esto el docente debe:

Realizar este proceso considerando una visión realista de los tiempos disponibles durante el año

- Lograr una visión sintética del conjunto de aprendizajes a lograr durante el año, dimensionando el tipo de cambio que se debe observar en los estudiantes. Esto debe desarrollarse a partir de los aprendizajes esperados especificados en los programas. Adicionalmente, los mapas de progreso pueden resultar un apoyo importante.
- Identificar, en términos generales, el tipo de evaluación que se requerirá para verificar el logro de los aprendizajes. Esto permitirá desarrollar una idea de las demandas y requerimientos a considerar para cada unidad.
- Sobre la base de esta visión, asignar los tiempos a destinar a cada unidad. Para procurar que esta distribución resulte lo más realista posible se recomienda realizar lo siguiente:
 - Listar días del año, número y horas de clase por semana para estimar el tiempo.
 - Hacer una calendarización tentativa de todo el año de los aprendizajes esperados incluyendo los feriados, y considerando los días de prueba, de repaso, así como la realización de evaluaciones formativas y retroalimentación.
 - Hacer una planificación gruesa de las actividades a partir de la calendarización.
 - Ajustar permanentemente la calendarización o las actividades planeadas (ver ejemplo en tabla adjunta).

La planificación de la unidad: Implica la toma de decisiones más precisas sobre qué enseñar y cómo enseñar, considerando la necesidad de ajustarlas a los tiempos asignados a la unidad.

La planificación de la unidad debiera seguir los siguientes pasos:

Realizar este proceso sin perder de vista la meta de aprendizaje de la unidad

- Especificar la meta de la unidad. Al igual que la planificación anual, esta visión debe sustentarse en los aprendizajes esperados de la unidad, y se recomienda complementarla con los mapas de progreso.
- Crear una evaluación sumativa para la unidad
- Calendarizar los aprendizajes esperados por semana
- Crear una herramienta de diagnóstico de comienzos de la unidad
- Establecer el tipo de actividades de enseñanza que se desarrollarán
- Crear un sistema de seguimiento de los aprendizajes esperados, especificando los tiempos y las herramientas para realizar evaluaciones formativas y realizar retroalimentación.
- Ajustar el plan continuamente ante los requerimientos de los estudiantes.

Procurar que los estudiantes sepan qué y por qué van a aprender, y qué aprendieron y de qué manera

La planificación de una clase: Es imprescindible que cada clase sea diseñada considerando que todas sus partes estén alineadas con los aprendizajes esperados que se busca promover y con la evaluación que se utilizará.

Adicionalmente, se recomienda que en cada clase sea diseñada distinguiendo su inicio, desarrollo y cierre, especificando claramente qué elementos se considerarán en cada una de estas partes. Para cada uno de estos momentos de la clase resulta necesario considerar aspectos como los siguientes:

Inicio: En esta fase se debe procurar que los estudiantes conozcan el propósito de la clase, es decir, qué se espera que aprendan. A la vez se debe buscar captar el interés de los estudiantes, y que visualicen cómo esto se relaciona la clase con lo que ya saben y con las clases anteriores.

Desarrollo: En esta etapa el docente lleva a cabo la actividad contemplada para la clase.

Cierre: Esta etapa puede ser breve (5 a 10 minutos), pero es central. En ella se debe procurar que los estudiantes logren formar una visión sobre qué aprendieron, así como sobre la utilidad de las estrategias y experiencias desarrolladas para efectos de promover su aprendizaje.

Ejemplo de calendarización Anual de Matemática 5º año Básico

Marz		May o		Julio					
M 2	Presentación del curso.	M 3	gráficos de barras múltiples.	V 1	Evaluación expresiones algebraicas.	Mi14	Estimación de áreas de superficies planas	Mi1 0	Repaso de los temas vistos en geometría.
Mie 3	Diagnóstico	Mi 4	Escalas y variables.	M 5	Revisión de la evaluación.	J 15	estrategias para estimar áreas y formas de rectángulos .	J 11	Ejercicios adicionales acerca de áreas.
J 4	Lectura de números de más de 6 cifras.	J 5	Construcción de gráficos de línea	Mi 6	Repaso de los temas tratados.	V 16	Calculo de áreas de figuras planas.	V 12	Repaso números naturales, fraccionarios y decimales.
V 5	Escritura de números de más de 6 cifras.	V 6	Construcción de gráficos de barras múltiples	J 7	Repaso de los temas tratados.	M 13	Áreas de triángulos rectángulos.	M 15	Repaso
M 8	Posición de los dígitos	M 10	Gráficos de líneas o barras múltiples.	V 8	Prueba global.	V 16	Ejercitación de áreas rectángulos y triángulos rectángulos.	Mi 16	Repaso
Mie 9	Números naturales.	Mi 11	gráficos de líneas o barras múltiples usando herramientas tecnológicas.	11 a 24	Revisión de la prueba global.	M 20	Evaluación acerca de cálculos de áreas en rectángulos y triángulos rectángulos.	J 17	Repaso
J 10	Números naturales.	J 12	Variables en contexto.	M 26	de fracciones propias, impropias y números mixtos.	Mi21	Revisión de la evaluación.	V 18	Repaso acerca e temas referentes a datos.
V 11	Estimar	V 13	Predicción gráficos de barras y de líneas del comportamiento de variables.	Mi27	Lectura y escritura de decimales positivos.	J 22	Estrategias Cálculo áreas en paralelogramos.	M 15	Repaso acerca e temas referentes a datos.
M 15	Múltiplos.	M 17	Evaluación de la materia tratada referente a datos.	J 28	fracciones propias o impropias y números mixtos en magnitudes.	V 23	Calculo áreas paralelogramos,.	Mi 16	Repaso datos.
Mie 16	MCM.	V 18	Revisión de la evaluación.	V 29	Fraccionamientos a nivel concreto y gráfico.	M 27	Ejercitación acerca de áreas en paralelogramos.	J 17	Repaso probabilidades.
J 17	Divisores.	M 19	Descripción de situaciones de incerteza.	Agos to	Ejemplos números decimales.	Mi2 8	Ejercicios y revisión áreas en paralelogramos.	V 18	Repaso probabilidades.
V 18	MCD.	V 20	Justificación de la probabilidad de ocurrencia	M 2	fracciones y decimales.	J 29	estrategias calculo áreas de triángulos acutángulos.	M 22	Repaso probabilidades.

M 22	Determinar reglas de divisibilidad.	M 24	Comparación y descripción de eventos	Mi 3	Fracciones en números decimales.	V 30	estrategias cálculo de las áreas.	Mi 23	Repaso álgebra.
Mie 23	factores, divisores y múltiplos. Conjeturas	Mi2 5	Ejemplos probabilidad segura, posible, probable o imposible.	J 4	decimales finitos positivos a fracciones.	Oct	Revisión estrategias	J 24	Repaso álgebra.
J 24	Verificar conjeturas	J 26	Repaso a probabilidades.	V 5	Comparar fracciones positivas y decimales positivos.	M 4	Ejercicios triángulos acutángulos.	V 25	Repaso álgebra.
V 25	Dividir Relación .	V 27	Repaso probabilidades.	M 9	Orden de fracciones positivas.	Mi5	Evaluación triángulos acutángulos.	M 29	Resolución de ejercicios prueba de síntesis.
M 29	Evaluación	M 31	Trabajo a probabilidades. Computador	Mi 10	Orden en los decimales positivos.	J 6	Revisión de la evaluación.	Mi 30	Ejercicios para la prueba de síntesis.
Mie 30	Revisión de la evaluación	Juni o		J 11	Resolución de problemas fracciones y decimales.	V 7	triángulo obtusángulo.	Dic	
J 31	Problemas de divisiones.	Mi 1	Actividad grupal acerca de probabilidades de eventos.	V 12	Estimación de cantidades o medidas.	M 11	Trabajo áreas de triángulos obtusángulos.	J 1	ejercicios para la prueba de síntesis.
Abril		J 2		M 16	Resolución de problemas con estimaciones.	Mi1 2	Trabajo calcular áreas de triángulos obtusángulos.	V 2	Prueba de síntesis.
V 1	Estimación resolución de un problema.	V 3	Evaluación probabilidad.	Mi 17	números naturales, fracciones y decimales en la recta numérica.	J 13	Revisión de las estrategias formuladas.	M 6	Revisión prueba de síntesis.
M 5	Composición y descomposición suma y resta	M 7	Revisión de la evaluación.	J 18	fracciones equivalentes	V 14	Justificación de resultados en I problema.	Mi 7	
Mie 6	sumar y restar mentalmente	Mi 8	Introducción al álgebra.	V 19	Justificación de resultados en función del contexto del problema.	M 18	Trabajo grupal áreas en triángulos obtusángulos.	J 8	Feriado
J 7	Calculo mental de adiciones y sustracciones múltiplos de 100 mil millón y aplicación en la resolución de problemas.	J 9	numéricos de expresiones algebraicas.	M 23	Adición y sustracciones de fracciones simplificando fracciones.	Mi1 9	Revisión del trabajo.	V 9	
V 8	Composición y descomposición aditiva de factores para multiplicar números.	V 10	Ejercitación algebraicas y ejercicios propuestos.	Mi24	Adición y sustracción de fracciones mediante factorización prima.	J 20	Concepto de variación.	M 13	
M 12	cálculo mental en que se reemplaza un factor por un cuociente equivalente.	M 14	Revisión de los ejercicios propuestos.	J 25	Calculo de adiciones y sustracciones con decimales , propiedades	V 21	Conjeturas . área de paralelogramos. al variar la medida de lados.	Mi 14	

2. Evaluación

¿Cómo diseñar la evaluación ?

La evaluación debe diseñarse a partir de los aprendizajes esperados, con el objeto de observar el grado en que éstos son logrados. Para lograr esto se recomienda diseñar la evaluación junto a la planificación y considerar al desarrollarla las siguientes preguntas:

Partir estableciendo los aprendizajes esperados a evaluar ...

- ¿Cuáles son los aprendizajes esperados del programa que abarcará la evaluación? (Si debe priorizar piense en aquellos aprendizajes que serán duraderos y prerequisites para desarrollar otros aprendizajes. Para esto los mapas de progreso pueden ser de especial utilidad).
- ¿Qué evidencia necesitaría que sus estudiantes exhiban para demostrar que dominan los aprendizajes esperados? (Para esto se recomienda utilizar como apoyo los indicadores de logro que presenta el programa).

... y luego decidir qué se requiere para su evaluación en términos de evidencias, métodos, preguntas y criterios

- ¿Qué método empleará para evaluar? Es recomendable utilizar instrumentos y estrategias de diverso tipo (ej., pruebas escritas, guías de trabajo, informes, ensayos, entrevistas, debates, mapas conceptuales, informes de laboratorio, investigaciones).

En lo posible presentar situaciones que pueden ser resueltas de distintas maneras y con diferente grado de complejidad, para que los diversos estudiantes puedan resolverlas evidenciando sus distintos niveles y estilos de aprendizaje.

- ¿Qué preguntas incluirá en su evaluación? Debe formular preguntas rigurosas y alineadas con los aprendizajes esperados y que permitan demostrar la real comprensión del contenido evaluado.
- ¿Cuáles son los criterios de éxito ¿ Cuáles son las características de una respuesta de alta calidad?
Esto se puede responder utilizando distintas estrategias, como por ejemplo:
 - Comparar las respuestas de sus estudiantes con las mejores respuestas de otros alumnos de edad similar. Para esto se pueden utilizar los ejemplos presentados en los mapas de progreso.
 - Identificar respuestas de evaluaciones previamente realizadas que expresen el nivel de desempeño esperado, y utilizarlas como modelo para otras evaluaciones realizadas en torno al mismo aprendizaje.
 - Desarrollar rúbricas que indiquen los resultados explícitos para un desempeño específico y muestra los diferentes niveles de calidad para dicho desempeño.

Anexo 3: Objetivos Fundamentales por semestre y unidad

Objetivo Fundamental	Semestre 1		Semestre 2	
	Unidades:		Unidades:	
	1	2	1	2
1. Comprender que los números racionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números enteros y caracterizarlos como aquellos que pueden expresarse como un cociente de dos números enteros con divisor distinto de cero.	x			
2. Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.	x			
3. Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.	x			
4. Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual o usando herramientas tecnológicas.		x		
5. Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.			x	
6. Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones y utilizarlos para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas.			x	
7. Conocer y utilizar conceptos y propiedades asociados al estudio de la congruencia de figuras planas, para resolver problemas y demostrar propiedades.			x	
8. Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.				x
9. Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones.				x
10. Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población.				x
11. Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.				x
12. Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.				x
13. Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables, diferenciar entre verificación y demostración de propiedades y analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos, para fundamentar opiniones y tomar decisiones.	x	x	x	

ANEXO 4: Contenidos Mínimos Obligatorios por semestre y unidad

Contenidos Mínimos Obligatorios	Semestre 1		Semestre 2	
	Unidades:		Unidades:	
	1	2	1	2
NÚMEROS:				
1. Identificación de situaciones que muestran la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros al conjunto de los números racionales y caracterización de éstos últimos.	x			
2. Representación de números racionales en la recta numérica, verificación de la cerradura de la adición, sustracción, multiplicación y división en los racionales y verificación de la propiedad: "entre dos números racionales siempre existe otro número racional".	x			
3. Justificación de la transformación de números decimales infinitos periódicos y semiperiódicos a fracción.	x			
4. Sistematización de procedimientos de cálculo escrito y con ayuda de herramientas tecnológicas de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales y su aplicación en la resolución de problemas.	x			
5. Aproximación de racionales a través del redondeo y truncamiento, y reconocimiento de las limitaciones de la calculadora para aproximar decimales.	x			
6. Extensión de las propiedades de potencias al caso de base racional y exponente entero y aplicación de ellas en diferentes contextos.	x			
7. Resolución de problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero, enfatizando el análisis crítico de los procedimientos de resolución y de los resultados obtenidos.	x			
ALGEBRA:				
8. Establecimiento de estrategias para transformar expresiones algebraicas no fraccionarias en otras equivalentes, mediante el uso de productos notables y factorizaciones.		x		
9. Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado.		x		
10. Análisis de las distintas representaciones de la función lineal ⁹ , su aplicación en la resolución de diversas situaciones problema y su relación con la proporcionalidad directa.		x		
11. Estudio de la composición de funciones, análisis de sus propiedades y aplicación a las transformaciones isométricas.			x	
12. Uso de un software gráfico en la interpretación de la función afín, análisis de las situaciones que modela y estudio de las variaciones que se producen por la modificación de sus parámetros ¹⁰ .		x		
GEOMETRÍA:				
13. Identificación del plano cartesiano y su uso para representar puntos y figuras geométricas manualmente y haciendo uso de un procesador geométrico.			x	
14. Notación y representación gráfica de vectores en el plano cartesiano y aplicación de la suma de vectores para describir traslaciones de figuras geométricas.			x	
15. Formulación de conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de traslaciones, reflexiones y rotaciones sobre figuras geométricas en el plano cartesiano y verificación, en casos particulares, de dichas conjeturas mediante el uso de un procesador geométrico o manualmente.			x	
16. Relación del concepto de congruencia de figuras planas con las transformaciones isométricas, formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de criterios de congruencia en triángulos y utilización de estos criterios en la resolución de problemas y en la demostración de propiedades en polígonos.			x	

⁹ Mediante expresiones algebraicas, tablas y gráficos.

¹⁰ Pendiente e intercepto con el eje Y.

DATOS Y AZAR:				
17. Obtención de información a partir del análisis de los datos presentados en histogramas, polígonos de frecuencia y de frecuencias acumuladas, considerando la interpretación de medidas de tendencia central y posición.				x
18. Organización y representación de datos, extraídos desde diversas fuentes, usando histogramas, polígonos de frecuencia y frecuencias acumuladas, contruidos manualmente y con herramientas tecnológicas.				x
19. Análisis de una muestra de datos agrupados en intervalos, mediante el cálculo de medidas de tendencia central (media, moda y mediana) y medidas de posición (percentiles y cuartiles), en diversos contextos y situaciones.				x
20. Uso de técnicas combinatorias para resolver diversos problemas que involucren el cálculo de probabilidades.				x
21. Utilización y establecimiento de estrategias para determinar el número de muestras de un tamaño dado, que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, con y sin reemplazo.				x
22. Formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo.				x
23. Resolución de problemas en contextos de incerteza, aplicando el cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las condiciones del problema.				x

Anexo 5: Relación entre Aprendizajes Esperados, Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO)

Semestre 1:

Aprendizajes Esperados	OF	CMO
Unidad 1: Números		
1.- Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales no enteros.	1	1
2.- Justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales.	2	3
3.- Establecer relaciones de orden entre números racionales.	2	2
4.- Representar números racionales en la recta numérica.	2	2
5.- Utilizar la calculadora para realizar cálculos reconociendo sus limitaciones.	2	4-5
6.- Verificar la densidad de los números racionales.	2	2
7.- Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales.	2	2
8.- Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.	3	6
9.- Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.	2-3	7
Unidad 2: Álgebra		
1.- Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias.	4	8
2.- Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias.	4	8
3.- Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales.	4	9
4.- Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.	4	10-12
5.- Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.	6	11
6.- Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.	4	9

Semestre 2:

Aprendizajes Esperados	OF	CMO
Unidad 3: Geometría		
1.- Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.	5	13
2.- Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.	5 - 6	14
3.- Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.	5 - 6	11- 15
4.- Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.	5	15
5.- Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.	5	15
6.- Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas.	5	16
7.- Formular y verificar conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos.	5	16
8.- Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos.	7	13 - 16
Unidad 4: Datos y Azar		
1.- Obtener información a partir del análisis de datos, en diversos contextos, presentados en gráficos y tablas de frecuencia, considerando la interpretación de medidas de tendencia central.	8	17
2.- Producir información, en contextos diversos, a través de gráficos y tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, manualmente o mediante herramientas tecnológicas.	8	18-19
3.- Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia.	9	20
4.- Calcular la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas desde una población.	10	21-22
5.- Formular conjeturas y verificarlas en casos particulares acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha población.	10	21-22
6.- Interpretar información, en diversos contextos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.	11	19-22
7.- Producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.	11	19-22

8.- Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.	12	20-23
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------	--------------

Documento borrador