Articulos: Brousseau, Guy

- Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. Traducción con fines de trabajo educativo sin referencia. Reeditado como documento de trabajo para el PMME de la UNISON por Hernández y Villalba. 1999.

Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas

Por Guy Brousseau

1. Introducción

1.1 Tema del Estudio

Un alumno no hace matemáticas si no plantea y no resuelve problemas. Todo mundo está de acuerdo con lo anterior. Las dificultades comienzan cuando se trata de saber cuáles problemas él debe plantearse, quién los plantea y cómo.

1.2 Concepciones Clásicas de la Noción de Problema

Para simplificar estas dificultades, parece que los especialistas en didáctica de las matemáticas ensayan, desde hace algún tiempo, proyectar la colección de problemas imaginables sobre un sub-espacio producto de los componentes siguientes:

1.2.1 Las intenciones Metodológicas del Profesor

Es la componente descrita al principio del "libro del problema" de Glaeser y de sus colaboradores (problemas de investigación, de entrenamiento, de introducción, etc.).

1.2.2 Las intenciones didácticas y los objetivos (por ejemplo los de Bloom): adquisiciones de conocimientos, mejor comprensión, análisis, etc.

1.2.3 El contenido matemático: casi siempre la cuestión consiste en requerir del alumno el establecer una fórmula verdadera dentro de una teoría en curso de estudio. El contenido de un problema es entonces a priori definible como una pareja (T, f); siendo T una teoría supuesta explicitada en el curso y f la fórmula a encontrar, a establecer o a colocar los problemas unos con relación a otros, a condición de tener una axiomática conveniente de la teoría por enseñar: las discusiones sobre la selección de la mejor axiomática sustentan la mayor parte de las investigaciones sobre los programas desde hace años. "La mejor axiomática" sería aquella que permitiría con el mínimo esfuerzo de aprendizaje o enseñanza, engendrar la colección de los teoremas-problemas, de examen o de control, fijados por un consenso social.

Es necesario prever varias teorías particulares que uno relacionará enseguida (tendencia "clásica"), o una teoría unitaria general de la cual uno deduce las otras, (¿tendencia "moderna"?). ¿Hacen falta muchos axiomas débiles y bien ordenados (Dieudonné: Álgebra Lineal y Geometría Elemental)? ¿Pocos axiomas potentes (Choquet: La enseñanza de la Geometría)?, ¿Axiomas "evidentes" o axiomas "muy elaborados"?

En la ausencia de una teoría del conocimiento apoyándose sobre una teoría pertinente del aprendizaje, las discusiones no han dado jamás lugar a estudios experimentales científicos.

Esta concepción permite, por otra parte, distinguir dos cosas: La pareja (T , f) que caracteriza al problema, y la demostración de $T \mapsto f$, la cual puede ser el objeto de un estudio matemático o metamatemático. Y esta distinción va a servir de base a una nueva descomposición del contenido matemático, siguiendo dos criterios diferentes, pero vecinos:

- • El dominio de aplicación: (la teoría T), opuesto a la "estructura" matemática o lógica que opera sobre T.
- • El modelo matemático (en el sentido de los logicistas), opuesto al lenguaje.

Estos pares de caracteres opuestos corresponden a los rasgos distintivos sobre los cuales los profesores se apoyan espontáneamente: abstracto - concreto, contenido formal, teórico-práctico, etc., pero su puesta en obra no ha proporcionado jamá´s ni tipologías utilizables ni índices objetivos.

1.2.4 Componentes metamatemáticos. De hecho, todas las tentativas de descripciones racionales y formales de las matemáticas son utilizadas para tratar de construir variables intermedias que, sin ser el contenido mismo, permitirán engendrarlo a menor costo.

La concepción de los problemas sobre la forma $T \mapsto f$ conduce frecuentemente a asimilar las hipótesis a lo que es conocido, las conclusiones a lo que se busca (o a la inversa) y la resolución a un camino que coincidiría fácilmente con la demostración buscada.

Ciertas demostraciones pueden ser obtenidas, sin mucha reflexión, por la aplicación de una sucesión finita de especificaciones conocidas de antemano: existe entonces un algoritmo, autómata productor de la demostración particular buscada.

En este caso, puede hacerse la descripción, clásica y maravillosamente simple y gratificante para el profesor, de la actividad cognitiva del alumno, del aprendizaje y del rol del que enseña. El maestro enseña al alumno, quien lo memoriza, el algoritmo que permite establecer los teoremas.

1.2.5 La componente heurística. Pero para otras demostraciones, no existen tales algoritmos. Para no renunciar al modelo de adquisición precedente, uno va a imaginar que la demostración puede ser conducida por "intuiciones" que jugarán un poco el papel de los algoritmos. Estas intuiciones podrán ser racionalizadas localmente, una vez que la puesta en obra de una teoría ya constituída proporcione la demostración buscada o una parte de ésta (uno aplicará un teorema) - la selección de las teorías o de las estructuras estando igualmente guiada por heurísticas, que uno puede, después, invocar para justificar el procedimiento seguido. A pesar de su carácter un poco *ad hoc*, estos conceptos no son faltos de interés, como lo muestran en este encuentro (ref. a la CIEAEM, 1976) las exposiciones de G. Glaeser, de G. Paquette, M. Ciosek, F. Wilson, de C. Janvier, etc..

1.3 Crítica de estas Concepciones

Yo contesto la validez de tal descomposición clasificatoria, a pesar de las facilidades que procura, porque conduce a aceptar pre-supuestos lamentables, separando los elementos que funcionan juntos.

1.3.1 El Sujeto

El sujeto - el alumno- está ausente de este análisis, donde no aparece más que como un receptor, un registrador extremadamente simplificado que el saber adquirido no modifica sensiblemente, ni, sobre todo, estructuralmente.

1.3.2 La Significación y el Sentido

De la misma forma, y por vía de consecuencia, la significación de la matemática desaparece: todo lo que hace, no solamente la verdad, sino el interés de un teorema y con eso, lo que F. Ganseth llamaba el carácter idóneo (idoneidad) de un conocimiento matemático, lo que hace que este conocimiento exista como solución óptima dentro del campo definido por un cierto número de restricciones (relativas al sujeto conociente o al conocimiento mismo), lo que hace de él un objeto en el sentido de R. Thom, una solución a un problema y en fin, lo que dice el interés del problema mismo.

El sentido de un conocimiento matemático se define - no solamente por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado en tanto que teoría matemática (semántica en el sentido de Carnap) - no solamente por la colección de situaciones donde el sujeto la ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones, de elecciones anteriores que rechaza, de los errores que evita (yo agregaría: las economías que procura, las formulaciones que retoma y muchas otras cosas que forman también parte de su sentido.)

1.3.3 El Aprendizaje

La construcción axiomática sugiere también un aprendizaje férico donde el volumen de conocimientos - inmediatamente adquiridos, estructurados, utilizables y transferibles - se infla en un espacio virgen. Pero ...

- Una noción aprendida no es utilizable más que en la medida en que ella está relacionada a otras, estas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación.

- Pero ella no es aprehendida más que en la medida en la que ella es utilizable y utilizada efectivamente, es decir solamente si ella es una solución del problema. Estos problemas, conjunto de restricciones a las cuales responde, constituyen la significación de la noción. Ella no es aprendida más que si ella "tiene éxito" y hace falta, por tanto, un territorio de puesta en práctica. Este territorio no es más que raramente general y definitivo.

- Del hecho de este empleo localizado, la noción recibe particularizaciones, limitaciones, deformaciones del lenguaje y de sentido: - si esta concepción particular de la noción es inmediatamente eliminada por otra más económica, o más general, o menos falsa, ella no es aprendida y no puede servir para crear el sentido de las adquisiciones posteriores.

- Si tiene éxito suficientemente bien y por un tiempo suficiente, toma un valor, una consistencia, una significación, un desarrollo que hacen cada vez más difícil su modificación, su reconsideración, su generalización o su rechazo: se convierte a la vez, para las adquisiciones posteriores, un obstáculo pero también un punto de apoyo. Esto muestra:

- Por qué el aprendizaje no puede hacerse según el esquema clásico de la adquisición progresiva y continua (tal que para toda adquisición existe una sucesión finita de adquisiciones que aportan, cada una, una cantidad de información tan pequeña como se quiera y como le sea equivalente).

- Por qué la confusión entre algoritmo y establecimiento de una fórmula y algoritmo de adquisición de un saber está desprovista de fundamento.

1.3.4 Algoritmo y Razonamiento

He estudiado sobre varios ejemplos todas las consecuencias nefastas de esta confusión sobre el aprendizaje de las operaciones en N.

Enseñando por los mismos procedimientos, a la misma edad, tanto una teoría sofisticada, la de probabilidades y de estadísticas, como esos pretendidos "mecanismos" de operación, creo haber mostrado que esta separación entre mecanismo y razonamiento no era ni necesaria ni, aún, útil; el aprendizaje se hace por la puesta a prueba de concepciones sucesivas, provisoria y relativamente buenas, que será necesario rechazar sucesivamente o retomar en una verdadera epistemología, nueva cada vez.

Si las condiciones lo exigen, el alumno puede él mismo resumir en "automatismo" actividades complejas, retirando sentido y posibilidades de elección a su actividad. Pero para que estos automatismos puedan ser "utilizados" es necesario que sean establecidos por el sujeto mismo.

1.3.5 Obstáculos

Los trabajos conformes a las concepciones de Bachelard y Piagen muestran también que el error y el fracaso no tiene el rol simplificado que en ocasiones uno quiere hacerles jugar. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertitud, del azar que uno cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, están constituidos de obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido.

1.4 Importancia de la noción de obstáculos en la enseñanza por los problemas

1.4.1 Intersecciones

Admitiremos por tanto que la constitución del sentido, tal como lo entendemos, implica una interacción constante del alumno con situaciones problemáticas, interacción dialéctica (porque el sujeto anticipa, finaliza sus acciones) donde él compromete conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar concepciones nuevas. El objeto principal de la didáctica es justamente estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o los problemas propuestos al alumno para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de esas concepciones.

Puede deducirse de ese régimen discontinuo de adquisiciones que los caracteres informacionales de esas situaciones deben también variar por saltos.

1.4.2 Condiciones

En esas condiciones el interés de un problema va a depender esencialmente de lo que el alumno comprometerá ahí, de lo que ahí meterá a prueba, de lo que invertirá, de la importancia para él de los rechazos que será conducido a hacer, y de las consecuencias previsibles de esos rechazos, de la frecuencia con la cual arriesgaría cometer esos errores rechazados y de su importancia.

Así los problemas más interesantes serán aquellos que permitirán franquear un verdadero obstáculo. Es por qué, a propósito de problemas, he querido examinar la cuestión de los obstáculos en didáctica.

2.1 Obstáculos Epistemológicos

El mecanismo de la adquisición de conocimientos tal como lo hemos descrito antes puede aplicarse tanto a la epistemología o a la historia de las ciencias, como al aprendizaje y a la enseñanza. En un caso como en el otro, la noción de obstáculo aparece como fundamental para plantear el problema del conocimiento científico. Hay que referirse a Bachelard quien, el primero, ha adelantado esta idea.

> "No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad, la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano; es en el acto mismo de conocer íntimamente que aparecen por una suerte de necesidad funcional lentitudes y problemas... Uno conoce contra un conocimiento anterior."

2.1.1 Bachelard estudia esos obstáculos en las ciencias físicas: la experiencia primera, el conocimiento general, el obstáculo verbal, la utilización abusiva de las imágenes familiares, el conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo substancialista, realista, animista, aquel del conocimiento cuantitativo.

Son grandes obstáculos que han resistido largo tiempo. Es probable que tengan su equivalente en el pensamiento del niño. El mediio ambiente material y cultural actual ha, sin duda, modificado poco las condiciones dentro de las cuales los niños encuentran esos obstáculos, y los estudios de ese sujeto están en curso.

2.1.2 En matemáticas, un trabajo muy importante de epistemología ha sido emprendido en direcciones vecinas de las de Bachelard, en el ámbito deAlthusser, por gente como P. Raymond, Baiou, Ovaert, Hanzel,... .

No proporciona, de momento, una lista de obstáculos tan simple como la de Bachelard; pero, grandes rasgos se desprenden así como clases de obstáculos, porque la noción de obstáculo misma está en vías de constituirse y de diversificarse; no es fácil decir generalidades pertinentes sobre el tema, vale más hacer estudios caso por caso. Puede decirse que al lado del trabajo de registro y descripción de los grandes obstáculos a la constitución de conceptos, se desarrollan estudios que tratan sobre las características de funcionamiento de los conocimientos, a la vez como apoyo y como obstáculo (alternativa y dialécticamente). Además, la noción de obstáculo tiene tendencia a extenderse fuera del campo estricto de la epistemología: en didáctica, en psicología, en psico-sociología, etc.

2.2 Manifestación de los obstáculos en didáctica de las matemáticas

2.2.1 Errores

Un obstáculo se manifiesta, por tanto, por sus errores, pero esos errores no son debidos al azar. Fugaces, erráticos, son reproducibles, persistentes. Además esos errores, en un mismo sujeto, están ligados entre ellos por una fuente común, una manera de conocer, una concepción característica, coherente sino correcta, antigua y que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones.

Esos errores no son forzosamente explicitables.

Sucede que no desaparecen radicalmetne, de un solo golpe, que resisten, que persisten, luego resurgen, se manifiestan mucho tiempo después que el sujeto haya rechazado de su sistema cognoscitivo consciente el modelo defectuoso.

Ejemplo: Un estudiante utiliza el "teorema" siguiente:

"Si el término general de una serie tiende a cero, la serie converge"

¿Está distraído? ¿Recita mal - invirtiendo hipótesis y conclusión- un teorema del curso? ¿Ha comprendido mal la noción de límite? ¿o la de serie? ¿Es un error sobre las condiciones necesarias y suficientes?

Aproximando este error a algunos otros, se comprende que de manera inconsciente este estudiante haya hecho un cierto razonamiento, falseado por una representación incorrecta de las reales que remonta a la enseñanza primaria y secundaria.

El razonamiento es más o menos éste: "Si x_i tiende a cero, existe un rango n a partir del cual los x_i son despreciables; a partir de ese n uno no suma prácticamente nada, luego la serie converge".

Puede ser que este estudiante no escribiría este razonamiento sin percatarse de que es falso, pero le parece evidente, porque reposa sobre una práctica constante en la enseñanza primaria y secundaria: el teorema siguiente:

$$„ \forall x \in R \text{ (o en Q)}, \forall \varepsilon > 0 \exists d \in D \mid |x-d| < \varepsilon „$$

es interpretado implícitamente y en ocasiones explícitamente por:

"En todo cálculo práctico $\exists n \in N$ tal que $\forall x \in R, \exists d \in D$ tal que `[$|x-d| < 10^{-n} \Rightarrow (x-d)$ es "prácticamente despreciable", es decir nulo]". (*D* es el conjunto de los decimales).

Esta idea se apoya sobre una "mala" definición de los decimales vehiculada desde la enseñanza elemental y sobre la cual regresaremos más adelante.

2.2.2 Franqueamiento

El obstáculo está constituido como un conocimiento de objetos, relaciones, métodos de aprehensión, previsiones con evidencias, consecuencias olvidadas, ramificaciones imprevistas,... Va resistir el rechazo, tentará, como se debe, de adaptarse localmente, de modificarse al menor precio, de optimizarse sobre un campo reducido siguiendo un proceso de acomodamiento bien conocido.

Es por eso que hace falta un flujo suficiente de situaciones nuevas, no asimilables por él, que van a desestabilizarlo, a rendirlo ineficaz, inútil, que van a hacer necesaria la reconsideración o el rechazo, el olvido, la "scottomisation" hasta en sus últimas manifestaciones.

También franquear un obstáculo exige un trabajo de igual naturaleza que el establecimiento de un conocimiento, es decir, interacciones rechazadas, dialécticas del alumno con el objeto de su conocimiento.

Esta observación es fundamental para distinguir lo que es un verdadero problema; es una situación que permite esta dialéctica y que la motiva.

2.2.3 Características informacionales de un obstáculo

Un conocimiento, como un obstáculo, es siempre el fruto de una interacción del alumno con su medio y más precisamente con una situación que hace el conocimiento "interesante", quiero decir "óptima" en un cierto dominio definido por características numéricas "informacionales " de este conocimiento.

El conocimiento, el hombre y el medio siendo lo que son, es inevitable que esta interacción desemboque a concepciones "erróneas". De todos modos estas concepciones son comandadas por las condiciones de la interacción que uno puede más o menos modificar. Es el objeto de la didáctica.

Esta declaración tiene importantes consecuencias, en principio para la enseñanza: así, si uno quiere desestabilizar una noción bastante enraizada, será ventajoso que el alumno pueda invertir suficientemente sus concepciones dentro de situaciones

- • Bastante numerosas e importantes para él
- • Y, sobre todo, son condiciones informacionales suficientemente diferenciadas para que un salto cualitativo sea necesario.

Ejemplo: un niño de seis años sabe distinguir los números hasta 4 ó 5 con la ayuda de procedimientos basados sobre la percepción. Estos procedimientos se vuelven rápidamente "muy costosos" y poco fiables desde que el número de objetos pasa a 6 ó 7. Fracasan más allá. Si uno trata de enseñar en orden los números 6, luego 7, enseguida 8, uno se encuentra con dificultades numerosas y crecientes y un periodo de desarrollo aparece.

Al contrario, si uno propone el comparar colecciones del orden de 10 a 15 objetos, el modelo perceptivo es tan evidentemente desventajoso que el niño renuncia de inmediato y establece nuevas estrategias (correspondencia término a término). Lo que uno quiere llamar intuición no es, a menudo, más que la aprehensión inconsciente de los límites informacionales de los modos de conocimiento.

2.3 Origen de los diversos obstáculos didácticos

2.3.1 Origen de un obstáculo

Vamos ahora a considerar los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico. Esos obstáculos a la apropiación por el alumno de ciertas nociones pueden ser debidos a varias causas. Es difícil incriminar solamente a uno de los sistemas de interacción. Es otra consecuencia de la concepción del aprendizaje evocada anteriormente.

La noción de obstáculo epistemológico tiende a substituirse por la de error de enseñanza, de insuficiencia del sujeto o de dificultad intrínseca de los conocimientos.

En todo caso, se pueden distinguir los orígenes de los obstáculos didácticos: éste será el sistema tal que, modificándolo, se podría evitar el obstáculo, mientras que ninguna modificación de los otros sistemas permitiría de evitarlo.

Uno encontrará así obstáculos didácticos

- • De origen ontogenético
- • De origen didáctico
- • De origen epistemológico

Para el ejemplo anterior (relativo a la adquisición de la noción de número) hablaremos más bien de limitación neurofisiológica que de obstáculo.

2.3.2 Origen ontogenético

Los obstáculos de origen ontogenético son los que sobrevienen del hecho de las limitaciones (neurofisiológicas entre otras) del sujeto a un momento de su desarrollo: él desarrolla conocimientos apropiados a sus medios y a sus objetivos.

La epistemología genética pone en evidencia etapas, acomodamientos y asimilaciones, que, a la vez, se asemejan a las etapas del desarrollo de los conceptos por las leyes de regulación que los hacen aparecer, y difieren de ellas por la naturaleza exacta de las limitaciones que determinan esas regulaciones.

2.3.3 Obstáculos de origen didáctico

Los obstáculos de origen didáctico son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo. Por ejemplo, la presentación actual de los decimales en el nivel elemental es el resultado de una larga evolución en el marco de una selección didáctica hecha por los enciclopedistas y luego por convención (conforme a una concepción que remonta a S. Stevin mismo): teniendo en cuenta su utilidad, los decimales iban a ser enseñados a todo mundo lo antes posible, asociados a un sistema de medida, y refiriéndose a las técnicas de operación en los enteros. Así, hoy, los decimales son, para los alumnos "enteros naturales con un cambio de unidad", por lo tanto "naturales" (con un punto) y medidas. Y esta concepción, apoyada por una mecanización del alumno, va a hacer obstáculo hasta el D.E.U.G. (Diploma de Estudios Universitarios Generales).

Es característico que el principal factor de discriminación de los alumnos en un cuestionario reciente (IREM de Rouen) sea el cálculo haciendo intervenir, a la vez, decimales y productos de una potencia por diez. Así, es la "comprensión" misma de la definición de los decimales lo que explica los comportamientos de los alumnos. Pero actualmente, un obstáculo tal se ha convertido, a la vez didáctico y sociocultural.

2.3.4 Obstáculos didácticos de origen epistemológico

Los obstáculos de origen propiamente epistemológico son aquellos a los cuales uno no puede, ni debe escapar, del hecho mismo de su rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta. Uno puede encontrarlos en la historia de los conceptos mismos. Eso no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que deban reproducirse en el medio escolar las condiciones históricas en las que han sido vencidos.

2.4 Consecuencias para la organización de situaciones problemáticas

La concepción del aprendizaje, que se apoya sobre el estudio del desarrollo de los conocimientos en términos de obstáculos, difiere sensiblemente de la concepción clásica, sobre todo en lo que concierne al rol y a la organización de las situaciones de problemas. Y esto, tanto más que el problema va a jugar, en el proceso, un rol fundamental.

2.4.1 Motivaciones-condiciones

Plantear un problema consiste en encontrar una situación con la cual el alumno va a emprender una sucesión de intercambios relativos a una misma cuestión que forma un "obstáculo" para él, y sobre el cual va a apoyarse para apropiarse, o construir, un conocimiento nuevo.

Las condiciones en las cuales se desarrolla esta sucesión de intercambios son inicialmente escogidas por el que enseña pero el proceso debe, muy rápido, pasar, en parte, bajo el control del sujeto que va a "cuestionar" a su vez la situación. La motivación nace de esta inversión y se conserva con ella. En lugar de ser un simple motor exterior, de frustraciones equilibrándose, ella es constitutiva a la vez del sujeto (de su palabra) y de su conocimiento. Así, la resolución de un problema tomará para el alumno la apariencia de una especia de proceso experimental, la ocasión dada a la "naturaleza" (aquí, a los conceptos matemáticos) de manifestarse dentro de sus actividades.

2.4.2 Carácter dialéctico del proceso de franqueamiento de un obstáculo

El proceso de franqueamiento de un obstáculo comporta necesariamente una sucesión de interacciones entre el alumno y el medio; esta sucesión de interacciones no toma sentido más que en la medida en que se reportan a un mismo proyecto (en el alumno) a propósito de un concepto en cuya génesis ellas constituyen una etapa y en el cual funden la significación.

Esas interacciones meten en juego sistemas de representación y pueden a menudo ser interpretados como intercambios de mensajes. Además, el maestro y el alumno son capaces de anticipación y finalizan sus acciones. Estas toman, en consecuencia, un carácter dialógico; además las informaciones intercambiadas son recibidas como hechos que confirman o niegan las hipótesis o aún como aserciones.

Si se admite que un conocimiento se establece oponiéndose a otro, sobre el cual se apoya y al cual reemplaza, se comprenderá que podamos decir que los procesos de franqueamiento tiene un carácter dialéctico: dialécticas del a priori y del a posteriori, del conocimiento y de la acción, del yo y de los otros ...

Organizar el franqueamiento de un obstáculo consistirá en proponer una situación susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al alumno según una dialéctica conveniente. Se tratará, no de comunicar las informaciones que se quieren enseñar, sino de encontrar una situación en la cual ellas son las únicas satisfactorias u óptimas - entre aquellas a las cuales ellas se oponen- para obtener un resultado en el cual el alumno se ha involucrado.

Esto no es suficiente, será necesario que esta situación permita de entrada la construcción de una primera solución o de una tentativa donde el alumno invertirá su conocimiento del momento. Si esta tentativa fracasa o va modificada por este fracaso de forma inteligible pero intrínseca, es decir que no dependa de manera arbitraria de las finalidades del maestro.

La situación debe permitir la repetición o voluntad de la puesta a prueba de todos los recursos del alumno. Ella deba automotivarse por un juego sutil de sanciones intrínsecas (y no por sanciones extrínsecas ligadas por el maestro a los progresos del alumno). Ella no puede, por tanto, ser programada, es solamente su elección la que puede serlo.

Se trata, para el dialéctico, de identificar al mismo tiempo que una etapa de un concepto, una situación que pone al alumno una pregunta (del alumno) a la cual esta etapa sea una respuesta "construible" en el sistema del alumno.

Hemos sido conducidos a distinguir en el funcionamiento del alumno tres tipos de preguntas que comandan tres tipos de situaciones didácticas.

2.4.3 Diferentes tipos de problemas: validaciones, formulaciones, acciones

a) a) Las cuestiones de validación: el alumno debe establecer la validez de una afirmación: debe dirigirse como un sujeto a otro sujeto susceptible de aceptar o de rehusar sus afirmaciones, de pedirle administrar pruebas de lo que anticipa, de oponerle otras afirmaciones.

   Esos intercambios contribuyen a hacer explicitar las teorías matemáticas pero también a establecer las matemáticas en tanto que medio de Se trata menos de aprender las pruebas aceptadas que de poner a prueba aquellas que uno concibe. Un proceso de prueba se construye en una dialéctica de la validación que conduce al alumno, sucesivamente, a usar espontáneamente figuras de retórica y enseguida a renunciar a ellas. Las relaciones que el alumno debe poder establecer para ello son específicas de esta dialéctica (ver Brousseau 70).

   Un problema de validación es mucho más un problema de comparación, de evaluación, de rechazo de pruebas, que de búsqueda de la demostración.

b) b) Las cuestiones de formulación: para sus procesos de validación, el pensamiento debe apoyarse sobre formulaciones previas. Los lenguajes se elaboran también dentro de dialéctica menos específicas que las de la validación. La comunicación (y sus restricciones) juega ahí un gran papel independiente, en parte, de los problemas de validez. Es dentro de ese marco que se manifiestan mejor las restricciones de economía que comandan las selecciones matemáticas juiciosas.

c) c) Las cuestiones de acción o de decisión matemática son aquellas donde el único criterio es la adecuación de la decisión - el sistema de elaboración de esta decisión puede quedar totalmente implícito, así como su justificación. No hay, a ese respecto, restricción alguna: ni de formulación ni de validación. Es la dialéctica más general, las otras son sólo casos particulares.

Ella desemboca en la construcción, en el sujeto, de regularidades, de esquemas, de modelos de acción, lo más frecuentemente inconscientes o implícitos.

2.4.4 Dialéctica y obstáculos

Bien entendido, ninguna de esas dialécticas es independiente de las otras, al contrario.

La formulación se facilita, a menudo, si existe un modelo implícito de acción: el sujeto debe formular mejor un problema que ha sabido resolver.

La acción se facilita mediante una formulación conveniente (como lo ha mostrado Vigotski). El lenguaje "recorta" la situación en objetos y relaciones pertinentes. La acción proporciona un tipo de validación implícita fundamental y la formulación, otro.

Pero inversamente, cada dominio puede obstaculizar un progreso dentro de los otros. Ciertas cosas se hacen mejor de lo que ellas dicen. Los modelos implícitos toman mejor, juntos, un gran número de datos y son más dóciles, más fáciles de re-estructurar. Las condiciones demasiado favorables a la acción vuelven inútil la explicación: por ejemplo, en tanto que se utilizaron los sistemas sexagesimales babilónicos para los cálculos astronómicos, el punto no se impuso, ni el nombre de la unidad de referencia, pues un error de 1 a 60 era impensable para quien sabía de lo que hablaba.

Igualmente, un lenguaje demasiado fácil de manejar puede bloquear por mucho tiempo una reformulación necesaria... (Es el obstáculo verbal de Bachelard).

El franqueamiento de un obstáculo implica, muy a menudo, a la vez una re-estructuración de los modelos de acción, del lenguaje y del sistema de pruebas. Pero el dialéctico puede precipitar las rupturas, favoreciendo la multiplicación y la alternancia de dialécticas particulares.

Nos hemos entretenido demasiado sobre las generalidades. No es posible comprender las relaciones recíprocas de los obstáculos y de los problemas sin un estudio específico.

3 Problemas en la Construcción del Concepto de Decimal

3.1 Historia de los decimales

3.1.1 No es posible, en el cuadro de este artículo, presentar una epistemología de los decimales. Tel epistemología queda por hacerse.

Es difícil a causa del "reguero" sobre quince o veinte siglos de hechos a tomar en cuenta. En cada "etapa" uno cree que no hay más que un paso a franquear, pero no es así, y es raramente por falta de haber tratado. Hay que comprender lo que ese paso tenía de inconcebible; y a menudo, también lo que él hacía perder con respecto al estado precedente.

3.1.2 Los chinos tenían un sistema de medida decimal en el siglo XII a.C.; los Babilonios la numeración de posición; los Pitagóricos concebían el conjunto de las fracciones y Arquímedes ha contribuido a concebir las fracciones como razones; sin embargo será necesario esperar a los Árabes (Abu'l-Wafa, segunda mitad del siglo X) para ver la noción de razón aplicarse a las fracciones y esa razón tenderá a identificarse a los números. Pero hay que esperar a Al Kashi (1427) e independientemente a S. Stevin (1585) para que los decimales aparezcan.

3.1.3 Este último utilizaba la misma notación para el estudio de los números geométricos - de hecho, los polinomios con coeficientes enteros - y no es por azar. Se habían utilizado los decimales antes de él (Bonfils de Tarascón(1350); Regiomantanus (1563);...). Pero él es el primero en proponer sustituir las fracciones decimales a las fracciones racionales y de denotarlas de manera de permitir llevar los cálculos a las reglas conocidas en los naturales, "cosa tan simple que no merece el nombre de invención", dice modestamente este nativo de Brujas, ella "enseña fácilmente a expedir por números enteros, sin "rompuz", todas las cuentas que se encuentran en los negocios de los hombres". Pero ve todo el interés y pide que "se ordene además la susodicha décima partición a fin de que cualquiera que quisiera la pudiese usar".

3.2 Historia de la enseñanza de los decimales

3.2.1 La "vulgarización" de los decimales se convierte entonces en un problema de didáctica, y serán necesarios dos siglos para franquear el primer paso: Gobán en 1711 no da cuenta en una obra destinada a los mercaderes; D'Alembert en 1779, presenta en la Enciclopedia (en el artículo Decimal) la cuestión en su forma matemática. En la edición de 1784 el abad Bossut presenta los decimales a manera de un naturalista: son enteros con un punto para presentar las medidas. El aspecto fracción decimal es relegado a un "apéndice". Una fractura se anuncia entre las fracciones decimales y los "decimales populares". A los algoritmos tan maravillosamente simples, que van a permitir vulgarizar totalmente la contabilidad comercial. La cuestión no está regulada por la decisión de la convención; lo que está en juego es demasiado grande a lo largo de todo el siglo XIX, el aspecto político del problema didáctico se impone: Hay que luchar. Así, Carlos X reintroduce nuevas medidas de longitud de 6 nuevos pies y no conserva del sistema métrico más que sus normas arbitrarias.

3.2.2 Los esfuerzos de vulgarización fueron facilitados por la elección del sistema métrico. La generosidad de las intenciones revolucionarias ha conducido a enseñar los "mecanismos" independientemente de las justificaciones matemáticas (había que lograr en tres años, dar todo lo que era esencial para el ciudadano). Esas conquistas del sigo XIX van a crear obstáculos en el siglo XX, en el cual ya no se trata de comunicar la instrucción, sino de educar, de hacer comprender.

> Los métodos activos, aplicados al sistema métrico van a ser, progresivamente, en tanto que razón, que fracción, quedaba algo a propósito de los cambios de unidad, pero la eficacia para unos la no directividad de otros, contribuyen a hacer desaparecer los últimos discursos justificadores.

3.2.3 Hoy, en Francia al menos, la ruptura está consumada oficialmente. Los programas de 1970 han introducido una construcción (no acabada) de los racionales que consiste en construir esas excelentes aplicaciones a partir de los malos operadores que son los naturales.

> Esta construcción no sirve para nada, ni a la introducción ni a la comprensión ni al estudio de los decimales: dos continente se han separado. Y los son sobre todo en las concepciones mismas de los maestros y de los padres.

3.3 Obstáculos didácticos a la construcción de los decimales

Así una renovación de la enseñanza de los decimales se librará hoy con numerosas dificultades técnicas y socio-económicas: ¿Cuál será el precio?.

No hemos querido estudiar más que las cuestiones de epistemología experimental en condiciones escolares normales para el niño. También, las soluciones que estudiamos no son aplicables, en el actual estado de las cosas, por el conjunto de los maestros. No podemos dar aquí en detalle el análisis de todos los obstáculos, sugiero al lector un texto en preparación actualmente. Por lo tanto me contentaré con evocar los más importantes.

3.3.1 El hecho de ligar los decimales con las medidas conduce a hacer que el alumno los considere como una tercia (*n, p, u*): Por una parte un entero *n* y por otra parte una división por 10^p, es decir un cambio de unidad, y una unidad *u*: 3.25 metros, 325 centímetros expresados en metros.

> La práctica de los "cambios de unidad" hacen que *p* y *u* mantengan relaciones privilegiadas (es suficiente proponer ejercicios, donde, a la vez, se cambie de unidad y se multiplica por una potencia de 10 para percibirlo).
>
> El decimal funciona como un entero y ya no es desprendible de una unidad: el objeto no es el decimal sino la magnitud física. El alumno no puede entonces interpretar el producto de dos decimales más que en el caso, por ejemplo, del producto de dos longitudes, lo que lleva a los obstáculos bien conocidos de los números concretos: tendrá problemas para concebir $a^2 + a$ y arrastrará implícitamente las ecuaciones a las dimensiones.
>
> Los decimales serán limitados implícitamente al rango de las unidades más pequeñas practicadas regularmente (o aún, tendrán dos cifras después del punto, como los francos).
>
> El niño razona como si existieran átomos simplemente más pequeños que la incertidumbre tolerable sobre las medidas y como si todos los números fueran números enteros.

3.3.2 El 3.25 es 325 con la centena como unidad, dicen los comentarios oficiales; todas las relaciones topológicas van a ser perturbadas y por mucho tiempo: el niño no encontrará un decimal entre 3.25 y 3.26; pero en cambio, encontrará un predecesor en *D* para 3.15: este será el 3.14, etc.,... Aún si él corrige su respuesta sobre tal o tal punto, los razonamientos intuitivos van a ser guiados por ese modelo erróneo (encontraremos errores sobre este punto, como lo hemos señalado antes, hasta la universidad).

Esta asimilación a los naturales será evidentemente reforzada por el estudio de las operaciones bajo la forma de mecanismos es decir de acciones que se efectúan de memoria, sin comprender, como en los naturales, con solamente un pequeño complemento para el punto.

De cabeza, el cálculo seguirá otra pendiente. Se calculará el producto de la parte entera y el de la "parte decimal" y se pegarán los pedazos: $(0.4)^2 = 0.16$, pero $(0.3)^2 = 0.9$ y algunas veces $(3.4)^2 = 9.16$.

Es, todavía, el efecto de la medida: lo que más cuenta es la parte entera; la parte decimal hace lo que puede.

3.3.3 Evidentemente, la asimilación a los naturales no va a pasar sin dificultad en el caso de ciertas divisiones que arriman el desorden en el edificio, pero el modelo no será rechazado por ello; serán los números que "no son exactos" de los que uno huirá, índices de que uno se ha equivocado en algún lado. Se aproximarán, a lo mejor, se dirá que "están entre tal y tal números" (sin definirlos) pero el alumnos les temerá. La definición implícita de los decimales "naturales con punto" hará que, para los alumnos, los naturales no sean decimales pero $0.33\bar{3}$ será un número decimal.

Una de las peores consecuencias de este obstáculo será, a menudo, el hacer pasar a los ojos de los humanos, las tentativas demasiado tímidas y demasiado tardías de franquearlo (en 4to por ejemplo) mediante razonamientos y desvaríos sin objetos.

3.4 Obstáculos epistemológicos - Plan didáctico

Los obstáculos arriba mencionados son todos de origen didáctico. Los verdaderos obstáculos epistemológicos e históricos, son otros.

3.4.1 Se trata en principio de simetrizar *N* para la multiplicación. Se pueden concebir algunas fracciones, pero rápidamente se quiere poder obtenerlas "todas" y poder, al menos, sumarlas y multiplicarlas por un entero. Es indispensable, no el enseñar la construcción, sino plantear el problema.

Es necesario que el niño vea que no puede "pasársela" con los naturales y saque todas las consecuencias, sobre todo acerca del orden.

Hemos mostrado que el niño a los 10 años puede inventar Q^+ para resolver ese problema (ver más adelante el problema de las hojas de papel). Yo no creo que *D* pudiera satisfacerlo en ese momento y no veo cómo y por qué él lo inventaría.

3.4.2 En cambio, una vez construido ($Q^+, +, <$) y colocado frente a la necesidad de ordenarlos, por ejemplo, o de sumar muchas fracciones, el niño puede ser conducido a utilizar, de preferencia, las fracciones decimales y a ver que ellas "aproximan" las otras fracciones (que *D* está dentro de Q).

Hemos mostrado también que esto es posible con la ayuda del "problema del explorador" y la dialéctica que de ahí se sigue.

El problema es inverso del precedente. Se trata, ya no de inventar y de combinar los elementos de un conjunto desconocido y nuevo sino al contrario, de aproximar un conjunto conocido con una subfamilia bien escogida.

3.4.3 Un texto por aparecer dará el detalle de los 25 "problemas" que constituyen la dialéctica (que dura 60 horas), pero soy opuesto a extraer de su contexto los ejemplos que doy en los párrafos siguientes con comentarios insuficientes:

- • Todo ahí es cuestión de equilibrio. Por ejemplo, si los niños mecanizan el cálculo en Q la invención de D tarda y su uso se dificulta. Si no es conocido suficientemente, D no se construye ni se comprende.
- • Hay, por ejemplo, que cuidarse de "reconocer" demasiado aprisa las prácticas conocidas: los niños saben acotar un racional entre dos decimales tan vecinos como ellos quieran, mucho antes de descubrir que esta práctica es "la división" y de la instruir en algoritmo.

- • Sin embargo, no hay que dejar demasiado tiempo los grandes problemas al nivel implícito. Las dialécticas de la formulación y la organización frecuente de debates conduce al nivel consciente aquello que debe ser sabido.

3.4.4 El segundo gran obstáculo, es la concepción de los racionales y los decimales en tanto que razones, en tanto que aplicaciones lineales que operan dentro de Q.

En una situación propicia (ver el problema del rompecabezas) los niños construyen este conjunto de aplicaciones primero; luego, otros que será necesario designar: las fracciones o los decimales o los naturales se prestarán a esta designación.

La suma, la composición de estas aplicaciones, luego la descomposición sobre D, proporcionarán un modelo unificador de Q, de N y de D.

3.5 Tres ejemplos de problemas que permiten el franqueamiento de obstáculos

3.5.1 El problema de las hojas de papel (lecciones 1 a 3)

Es un problema de comunicación porque, los niños deben inventar un lenguaje para indicar a sus compañeros de cuál montón han escogido una hoja de papel. El juego se juega realmente: los niños buscan un sistema para designar el espesor de las hojas. Después de algunos intentos, ellos se imaginan hacer un pequeño montón del cual se puede medir el espesor con un doble decímetro. Envía el número de hojas y el espesor (entero); ejemplo; (19, 3).

Es un ejemplo de dialéctica de la formulación; los errores, las contestaciones, las comparaciones; les conducen a explicitar las condiciones de empleo de esas parejas: equivalencia, errores de medición... y a designar las clases.

Los problemas de previsión (¿Cuál será el espesor de un cartón obtenido al pegar tal, tal y tal hoja?) donde el criterio de éxito es la experiencia y la aceptación por todos los niños, los debates científicos (¿Las parejas son números?) conducen a los niños a explorar Q^+.

3.5.2 El problema del explorador (lecciones 12 a 15)

Dos jugadores (o dos equipos) se enfrentan. Cada uno escoge una fracción comprendida entre 0 y 10, la cual esconde al otro jugador. Ejemplo: *A* escoge $\frac{2}{3}$ y *B*, $\frac{45}{10}$. Por turno, los jugadores escogen un intervalo y lo proponen. Por ejemplo, *A* escribe [3;4]. Si la fracción *B* pertenece al intervalo, éste anuncia, "Tu me ves". Si está en el exterior, "Tu no me ves". Si está en el origen del intervalo, "Tu me atrapas".

En este ejemplo, *B* dice: Tu no me ves.

Para comparar sus fracciones, los alumnos "convierten al mismo número de hojas" (operación conocida sin ser mecanizada). El ganador es aquel que, cuando el juego se para, "ve" al otro dentro del intervalo más pequeño. Al principio, los niños creen poder adivinar todas las fracciones. Desarrollan estrategias de filtración (la filtración lineal y decimal aparecen). Distinguen fracciones fáciles y difíciles de atrapar.

Toda la topología de Q^+ se establece contra la de N, en una dialéctica que podría hacer pensar a la del obús y la coraza.

3.5.3 El problema del rompecabezas (lección 25)

"He aquí rompecabezas de Tangram como los que ustedes han utilizado en el club de matemáticas. Fabriquen algunos semejantes, más grandes. Por ejemplo, este lado mide 4 cm, su imagen deberá medir 7 cm. Trabajen por equipos, pero repártanse el trabajo. Verifiquen enseguida que el rompecabezas funciona como se debe".

Por supuesto, si $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$, el resultado no será, visiblemente, bueno. De lo cual se siguen discusiones, nuevos intentos, rechazo de modelos defectuosos como $f(a) = a + k$.

Las condiciones que debe satisfacer la aplicación lineal (de $Q^2 \text{ en } Q^2$) que éstas sean la conservación de los ángulos o la condición sobre la suma de las imágenes, son fatalmente puestas a prueba, formuladas.

A esta ocasión, la idea persiste mucho tiempo en el alumno (a veces a pesar de varias experiencias) de que una aplicación simplemente creciente proporciona necesariamente un agrandamiento conveniente.

Después, creerá que todas las aplicaciones son lineales... pero esto es otra historia.

4 Conclusión.

¿Cuáles son esos obstáculos que estos problemas permiten franquear?

¿Cómo se organizan las situaciones de acción, de formulación, de validación, anunciadas?

¿Cuáles dialécticas se comprometen y para qué propósitos?

¿Dónde, esas características informacionales de las situaciones, son favorables a la des-estabilización de las nociones?

Pretendo que todas estas cosas son observables en los ejemplos anteriores y cuento mostrarlas en una obra próxima (pueden encontrarse análisis de este género a propósito de la construcción de probabilidades en Brousseau 74).

Mientras, es posible que el lector no vea, en razón de algún obstáculo, la teoría del aprendizaje, del conocimiento, o de cualquier otra cosa. Yo lo comprometo a vencerlos a su vez realizando esas situaciones, estudiándolas, modificándolas, discutiendo.