MATRICES

CONCEPTOS BÁSICOS

Definición: Matriz

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos. Por ejemplo:
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz de 3 x 2 (que se lee “3 por 2”) pues es un arreglo rectangular de números con tres filas y dos columnas. En este caso los elementos son 2, 3, 4, 0, 7, 1.

En términos más generales,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \|a_{ij}\|$$

es una matriz de orden m x n, donde $a_{11}, \dots, a_{mn}$ representan los elementos de esta matriz dispuestos en m filas y n columnas (m y n pertenecientes a los enteros positivos)

Notación:

a) $A \in \mathbb{R}_{mn}$, forma abreviada $A = \|a_{ij}\|$
b) a_{ij}: elementos de la matriz, para $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$
c) $A_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}]$ denota la i-ésima fila de A.
d) $A^{(j)} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ denota la j-ésima columna de A.

Ejemplo:

Sea $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & \pi \\ 2 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1 & {}^{1}/_{2} \end{bmatrix}$

a) $B \in \mathbb{R}_{3x4}$
b) $b_{23} = 0$
$b_{32} = 1$
c) $B_2 = [2 \quad 1 \quad 0 \quad \sqrt{2}]$

d) $B^{(4)} = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Igualdad de matrices

Sean $A = \|a_{ij}\|$ y $B = \|b_{ij}\|$ matrices del mismo orden m x n. decimos que A = B si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

Ejemplo:

Sean $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

Las matrices A y B tienen orden 2 x 2, y además A = B si se cumple:

$x = 7,\ \ y = 9, z = 5, w = -2$

TIPOS ESPECIALES DE MATRICES

Matriz Cuadrada: es aquella que tiene el mismo número de filas y columnas. Se dice que tiene orden n, pues $n = m$. La *diagonal principal* está conformada por los elementos a_{ii}; la suma de estos elementos se llama *Traza de la matriz* y se nota $tr(A)$.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

A es una matriz de orden 2 x 2, tiene el mismo número de filas y de columnas. Los elementos de la diagonal principal son: $a_{11} = 7$ y $a_{22} = 2$, luego la traza de A es: $tr(A) = 7 + 2 = 9$

Matriz Identidad: es una matriz cuadrada en la cual los elementos situados sobre la diagonal principal son iguales a uno y el resto de los elementos son iguales a cero. Para cualquier matriz A, se cumple $IA \ = \ A \ = \ AI$

Ejemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Nula: es una matriz que tiene cualquier tamaño con todos los elementos iguales a cero. Por lo tanto para cualquier matriz A,

$$A + 0 = A\,, \quad A - A = 0, \quad y \quad 0A = 0 = 0A$$

Ejemplo:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vector fila: matriz que tiene una sola fila. Es de orden o dimensión $1\ x\ n$.
Ejemplo:

$$F = [f_{11} \quad f_{12} \cdots \quad f_{1n}]$$

Vector Columna: matriz que tiene una sola columna. Es de orden o dimensión $m\ x\ 1$.
Ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior: es una matriz cuadrada en la cual todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son iguales a cero. La matriz $A = \|a_{ij}\|$ es triangular superior si $a_{ij} = 0\ para\ i > j$.
Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior: es una matriz cuadrada en la cual todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son iguales a cero. La matriz $A = \|a_{ij}\|$ es triangular inferior si $a_{ij} = 0\ para\ i < j$.
Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal: una matriz cuadrada es diagonal si los elementos no diagonales son todos nulos.
Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRANSPUESTA

Sea $A = \|a_{ij}\|$ una matriz de orden m x n. La matriz transpuesta de A, denotada por A^T, se obtiene al intercambiar las filas por las columnas, donde $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Ejemplo:

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}_{3\ x\ 2}$

Al intercambiar las filas por las columnas se obtiene: $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x3}$

Propiedades de la matriz Transpuesta

Si A y B son matrices y k un número real, entonces:

a) $(A^T)^T = A$
b) $(kA)^T = kA^T$
c) $(A+B)^T = A^T + B^T$
d) $(AB)^T = B^T A^T$

MATRIZ SIMÉTRICA Y ANTISIMÉTRICA

Sea A una matriz cuadrada:

1) Decimos que A es simétrica si $A^T = A$, entonces $a_{ij} = a_{ji}$
2) Decimos que A es antisimétrica si $A^T = -A$, entonces $a_{ij} = -a_{ji}$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 2 & -5 & 9 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 2 & -5 & 9 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

La matriz A es simétrica porque $A = A^T$

Sea $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

La matriz B es antisimétrica porque $B = -B^T$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma de matrices

Sean $A = \|a_{ij}\|$ y $B = \|b_{ij}\|$ matrices del mismo orden m x n. La suma de A y B, denotada A + B es una matriz de orden m x n, cuya componente ij-ésima es $a_{ij} + b_{ij}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{Entonces: } A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \vdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la adición de matrices

- *Asociativa*

Dadas las matrices A, B y C de orden m×n: $A + (B + C) = (A + B) + C$

- *Conmutativa*

Dadas las matrices A y B de orden m×n: $A + B = B + A$

- *Existencia de matriz cero o matriz nula:*

Existe una matriz 0_{mxn}, tal que para toda matriz A de orden mxn, se satisface:
$A + 0_{mxn} = 0_{mxn} + A = A$

- *Existencia de matriz opuesta o inverso aditivo:*

Existe una matriz $-A_{mxn}$, tal que para toda matriz A de orden mxn, se satisface:
$A + (-A) = 0_{mxn}$

Producto por escalar

Si A es una matriz de orden m x n y k es un escalar (número real), podemos obtener otra matriz de orden m x n, multiplicando cada componente de A por el escalar k.

$$k \cdot A = [k \cdot a_{ij}] = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \vdots\vdots\vdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Propiedades del producto por escalar

Sean A y B matrices de orden m x n, y *k* y *r* números reales:

- $k(rA) = (kr)A = r(kA)$
- $(k + r)A = kA + rA$
- $k(A + B) = kA + kB$

Multiplicación de matrices

i) Producto de vector fila por vector columna

Sea $A = \|a_{ij}\|$ una matriz de orden 1 x m y $B = \|b_{ij}\|$ una matriz de orden mx 1, entonces:

$$AB = [a_{11} \quad a_{12} \dots \quad a_{1m}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i \in \mathbb{R}$$

ii) Producto de una matriz por un vector columna

Sea $A = \|a_{ij}\|$ una matriz de orden m x n y $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ un vector columna de orden n. El producto AX es un vector columna de orden m.

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots\vdots\vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix}$$

iii) Producto entre matrices

Sea $A = \|a_{ij}\|$ una matriz de orden m x n y $B = \|b_{ij}\|$ una matriz de orden nxr. El producto AB es una matriz de orden m x r, cuya ij-ésima componente es el producto de la matriz fila i de A por el vector columna j de B. Si C denota la matriz producto AB, entonces el elemento ij-ésimo c_{ij} está dado por:

$$c_{ij} = A_i B^{(j)} = [a_{i1} \quad a_{i2} \; \cdots \quad a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Nota: El producto matricial AB se define si y solo si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

Propiedades del producto de matrices

1) Sean A una matriz de orden m x n, B una matriz de orden n x r y λ un escalar, entonces:

$$A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$$

2) Asociativa: Para cualquier matriz A de orden m x n, B de orden n x r y C de orden r x s, se tiene:

$$(AB)C = A(BC)$$

3) Distributiva respecto a la suma: Sean A, B, C y D matrices tales que A es de orden m x n, B y C de orden n x r y D de orden r x s, se tiene:
   - $A(B + C) = AB + AC$
   - $(B + C)D = BD + CD$

4) $A_{m\,x\,n} \cdot 0_{n\,x\,p} = 0_{m\,x\,p}$
5) $I_n \cdot A_n = A_n = A_n \cdot I_n$

Nota: El producto de matrices no conmuta:

i) $A_{m\,x\,n}$ y $B_{n\,x\,p}$ entonces AB existe, pero BA no existe.

ii) $A_{m\,x\,n}$ y $B_{n\,x\,m}$, entonces AB existe y es de orden m x m; BA existe y es de orden n x n, por tanto, $AB \neq BA$.

iii) $A_{n\,x\,n}$ y $B_{n\,x\,n}$, entonces AB existe y es de orden n x n; BA existe y es de orden n x n, sin embargo, usualmente $AB \neq BA$.

Demostraciones

Propiedad asociativa: Debemos mostrar que la ij-ésima componente de $(AB)C$ es igual a la ij-ésima componente de $A(BC)$. Luego,

$$(AB)C = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\left(a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right)$$

$$A(BC) = a_{ij}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk}c_{kl}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\left(a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right)$$

Propiedad distributiva: Debemos demostrar que $(B+C)D = BD + CD$

$$(B+C)D = \left(\|b_{ij}\| + \|c_{ij}\|\right)\cdot\|d_{jk}\| = \|b_{ij} + c_{ij}\|\cdot\|d_{jk}\| = \left\|\sum_{j=1}^{m}\left(b_{ij}+c_{ij}\right)d_{jk}\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{m}\left(b_{ij}d_{jk} + c_{ij}d_{jk}\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{m}\left(b_{ij}d_{jk}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(c_{ij}d_{jk}\right)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{m}\left(b_{ij}d_{jk}\right)\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{m}\left(c_{ij}d_{jk}\right)\right\| = BD + CD$$

Las demás demostraciones se dejan como ejercicio.