PROGRAMACIÓN LINEAL

MÉTODO GRÁFICO

Dado un problema de programación lineal se debe:

1. Graficar cada una de las restricciones.
2. Encontrar el "Polígono de factibilidad", que es la intersección de los hiperplanos generados al graficar las restricciones.
3. Encontrar las coordenadas de los vértices del polígono.
4. Evaluar la función objetivo en cada vértice del polígono
5. Hacer el análisis de eficiencia y eficacia.

Ejemplo 1. Problema de producción.

La compañía Sigma produce bibliotecas y escritorios para los cuales ha establecido un precio de venta por unidad de $9.000 y $10.000 respectivamente. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad mensual de 700 metros de madera, 800 metros de tubo y 900 pliegos de papel lija. ¿Qué cantidad de bibliotecas y escritorios se debe fabricar mensualmente si se sabe que una biblioteca consume 7 metros de madera, 10 metros de tubo y 6 pliegos de papel lija; mientras que para producir un escritorio se requieren 10 metros de madera, 8 metros de tubo y 15 pliegos de papel lija?

Solución

Para la construcción de modelos tenga en cuenta: hacer un análisis de la información, definir las variables, establecer la función objetivo y determinar las restricciones.

Definición de variables

La compañía debe decidir cuántas bibliotecas y escritorios se deberán producir mensualmente para lograr una máxima utilidad, por tanto las variables son:

$$x_1: cantidad\ de\ bibliotecas\ a\ fabricar\ por\ mes$$
$$x_2: cantidad\ de\ escritorios\ a\ fabricar\ por\ mes$$

Función objetivo

Se trata de maximizar el ingreso de la compañía, pues nos dan información de precios de venta de cada uno de los artículos que producen.

$$Max\ Z\ =\ 9000\ x_1 + 10000x_2$$

Restricciones

La compañía debe tener en cuenta las siguientes limitaciones en los 3 recursos que tiene para fabricar dichos productos:

Madera: $7\ x_1 + 10x_2 \leq 700$

Tubo: $10\ x_1 + 8x_2 \leq 800$

Papel lija: $6\,x_1 + 15x_2 \leq 900$

También se deben considerar las restricciones de no negatividad, ya que en este caso no se deben producir unidades negativas de ningún producto:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El modelo matemático completo queda así:

$Max\,Z \;=\; 9000\,x_1 + 10000x_2$
Sujeto a
$7\,x_1 + 10x_2 \leq 700$ metros de madera
$10\,x_1 + 8x_2 \leq 800$ metros de tubo
$6\,x_1 + 15x_2 \leq 900$ pliegos de papel lija
$x_1, x_2 \geq 0$ restricciones de no negatividad

Ahora resolverlo por el método gráfico:

1. Se debe graficar cada restricción, inicialmente suponiendo una igualdad y luego en el plano se le da el sentido:

Primera restricción:
Se supone la igualdad y se hallan los puntos de corte con los ejes, dándole valores de cero a cada incógnita. Por ejemplo, si $x_1 = 0$, despejando x_2 es igual a 70, esto conforma el par ordenado $((x_1, x_2) = (0{,}70)$. De igual forma se calcula el otro punto, cuando $x_2 = 0$, entonces x_1 es igual a 100, y se genera el par ordenado $(100{,}0)$

$$7\,x_1 + 10x_2 = 700 \;\Rightarrow \begin{cases} si\; x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 70 \;\therefore (0{,}70) \\ si\; x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 100 \;\therefore (100{,}0) \end{cases}$$

Estos puntos se marcan en el gráfico y se juntan mediante una línea recta. Y dado que la restricción es menor o igual, se sombrea la región comprendida desde la recta hasta el origen, que garantiza consumir como máximo 700 metros de madera.

Para la segunda restricción se aplica el mismo procedimiento de la primera restricción para hallar los puntos de corte con los ejes:

$$10\,x_1 + 8x_2 = 800 \;\Rightarrow \begin{cases} si\; x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 100 \;\therefore (0{,}100) \\ si\; x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 80 \;\therefore (80{,}0) \end{cases}$$

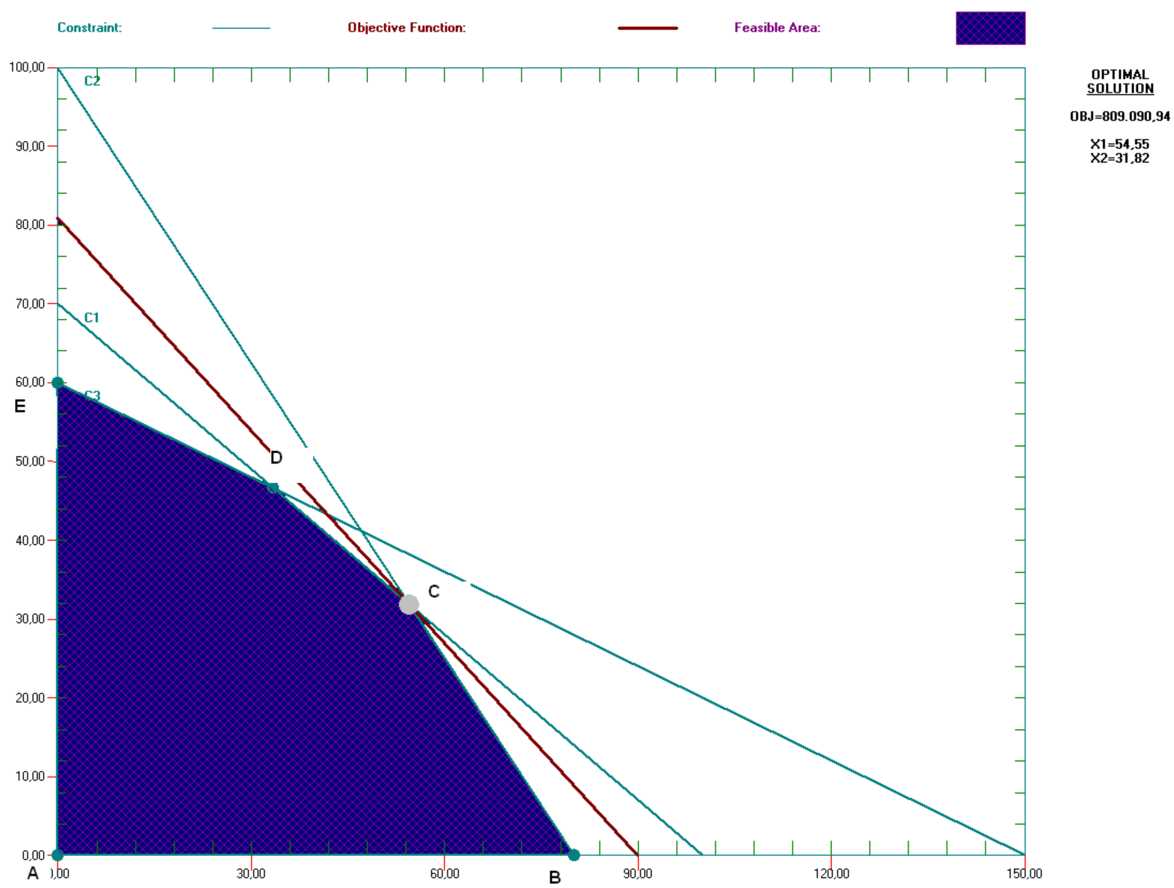
El área factible para el recurso del tubo también se encuentra desde la recta hasta el punto de origen (0,0).

Y para la tercera restricción, se utiliza el mismo procedimiento, obteniendo:

$$6\,x_1 + 15x_2 = 900 \;\Rightarrow \begin{cases} si\; x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 60 \;\therefore (0{,}60) \\ si\; x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 150 \;\therefore (150{,}0) \end{cases}$$

El área sombreada corresponde a la disponibilidad de 900 pliegos de papel lija (se puede consumir menos de esto, pues la restricción es menor o igual)

2. Polígono de factibilidad: es la intersección de los hiperplanos generados al graficar las restricciones.



Donde

c_1: es la primera restricción

c_2: es la segunda restricción

c_3: es la tercera restricción

Los puntos A, B, C, D, y E son los vértices de la región factible (ó polígono de factibilidad)

3. El tercer paso es encontrar las coordenadas de los vértices del polígono:

Las coordenadas de los vértices son:

$A(0,0)$ está ubicado en el origen

$B(80,0)$es el corte de la restricción 2 con el eje x1

$C\left(\frac{600}{11},\frac{350}{11}\right)$ es la intersección entre las restricciones de madera y tubo

Veamos

$7\ x_1 + 10x_2 = 700$ metros de madera

$10\ x_1 + 8x_2 = 800$ metros de tubo

Para hallar el valor de las variables de este sistema 2x2, se puede realizar por igualación, sustitución, eliminación o cualquier otro método conocido.

Utilizando el método de eliminación:

$7\ x_1 + 10x_2 = 700$ multiplicando la ecuación (1) por (-10)

$10\ x_1 + 8x_2 = 800$ multiplicando la ecuación (2) por (7)

Tenemos

$$\begin{array}{r} -70\ x_1 - 100x_2 = -7000 \\ \underline{70\ x_1 + 56x_2 = 5600} \\ -44x_2 = -1400 \end{array}$$

Simplificando se obtiene el valor de $x_2 = \frac{350}{11}$, tomando este valor y reemplazándolo en cualquiera de las ecuaciones del sistema se halla el valor de x_1. Reemplazando en la ecuación (1) tenemos:

$7\ x_1 + 10\left(\frac{350}{11}\right) = 700$

Y despejando x_1 se obtiene:

$$x_1 = \frac{700 - 10\left(\frac{350}{11}\right)}{7} = \frac{4200}{77} = \frac{600}{11}$$

$D\left(\frac{100}{3}, \frac{140}{3}\right)$ es la intersección entre las restricciones de madera y papel lija. Se resuelve de igual manera que el punto anterior:

$7\ x_1 + 10x_2 = 700$ metros de madera

$6\ x_1 + 15x_2 = 900$ pliegos de papel lija

Utilizando el método de eliminación:

$7\ x_1 + 10x_2 = 700$ multiplicando la ecuación (1) por (6)

$6\ x_1 + 15x_2 = 900$ multiplicando la ecuación (2) por (-7)

Tenemos

$$\begin{array}{r} 42\ x_1 + 60x_2 = 4200 \\ \underline{-42\ x_1 - 105x_2 = -6300} \\ -45x_2 = -2100 \end{array}$$

Simplificando se obtiene el valor de $x_2 = \frac{140}{3}$, tomando este valor y reemplazándolo en cualquiera de las ecuaciones del sistema se halla el valor de x_1. Reemplazando en la ecuación (1) tenemos:

$7\,x_1 + 10\left(\frac{140}{3}\right) = 700$

Y despejando x_1 se obtiene:

$$x_1 = \frac{700 - 10\left(\frac{140}{3}\right)}{7} = \frac{700}{21} = \frac{100}{3}$$

$E(0{,}60)$ es el corte de la restricción 3 con el eje x2

4. El cuarto paso es evaluar la función objetivo en cada vértice del polígono. La función objetivo es:

$$Max\,Z = 9000\,x_1 + 10000x_2$$

Por lo tanto, evaluemos cada vértice en la función objetivo:

$Z_A = 9000\,(0) + 10000(0) = 0$

$Z_B = 9000\,(80) + 10000(0) = 720.000$

$Z_C = 9000\,\left(\frac{600}{11}\right) + 10000\left(\frac{350}{11}\right) = 809.090{,}9$

$Z_D = 9000\,\left(\frac{100}{3}\right) + 10000\left(\frac{140}{3}\right) = 766.666{,}67$

$Z_E = 9000\,(0) + 10000(60) = 600.000$

El mayor valor se obtiene en el punto C, por lo tanto, este problema tiene única solución, entonces la compañía Sigma debe producir $\frac{600}{11}$ de bibliotecas y $\frac{350}{11}$ de escritorios. Con estas cantidades de producción se halla el ingreso máximo de $809.090,9.

5. Análisis de eficiencia y eficacia

Con base en la solución obtenida se puede calcular cuánto de cada recurso se consume y cuánto sobra; tan solo basta reemplazar los valores de las variables en cada una de las restricciones. Veamos la siguiente tabla:

Recurso	Disponibilidad	Consumo	Sobrante
Madera	700 metros	7(600/11)+10(350/11)=700	0
Tubo	800 metros	10(600/11)+8(350/11)=800	0
Lija	900 metros	6(600/11)+15(350/11)=8850/11	1050/11

Estos datos indican que se consume toda la madera y todos los metros de tubo, y se consumen 8850/11 pliegos de papel lija, es decir se usa en un 89.39%

Ejemplo 2

La fábrica de calzado "Épsilon" produce zapatos para hombre y zapatos para dama a un costo de \$20.000 cada uno de ellos. Además, se ha establecido, mediante un estudio de mercado que habrá una venta mínima de 20 zapatos para dama y que la venta mínima entre los dos artículos será de 50 unidades. También se sabe que hay una disponibilidad de 540 horas-hombre por semana para la producción de dichos artículos. ¿Qué cantidad de cada tipo de zapato se debe fabricar si se sabe que producir un par de zapatos para hombre se requieren 6 horas y un par de zapatos para dama requiere 9 horas?

Modelo matemático

Variables de decisión. La compañía debe decidir cuántos zapatos para hombre y para dama se deberán producir con la disponibilidad horaria y demanda que tienen:

$$x_1: cantidad\ de\ zapatos\ de\ hombre\ a\ fabricar$$
$$x_2: cantidad\ de\ zapatos\ de\ dama\ a\ fabricar$$

Función objetivo. Se trata de minimizar el costo de producción.

$$Min\ Z\ =\ 20.000\ x_1 + 20.000 x_2$$

Restricciones. La compañía debe tener en cuenta las siguientes limitaciones:

Horas- Hombre: $6x_1 + 9x_2 \leq 540$

Venta mínima entre los dos artículos: $x_1 + x_2 \geq 50$

Venta mínima zapatos dama: $x_2 \geq 20$

Restricciones de no negatividad: $x_1, x_2 \geq 0$

Modelo matemático completo:

$$Min\ Z\ =\ 20.000\ x_1 + 20.000 x_2$$

Sujeto a

$$6x_1 + 9x_2 \leq 540$$
$$x_1 + x_2 \geq 50$$
$$x_2 \geq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solución por el método gráfico.

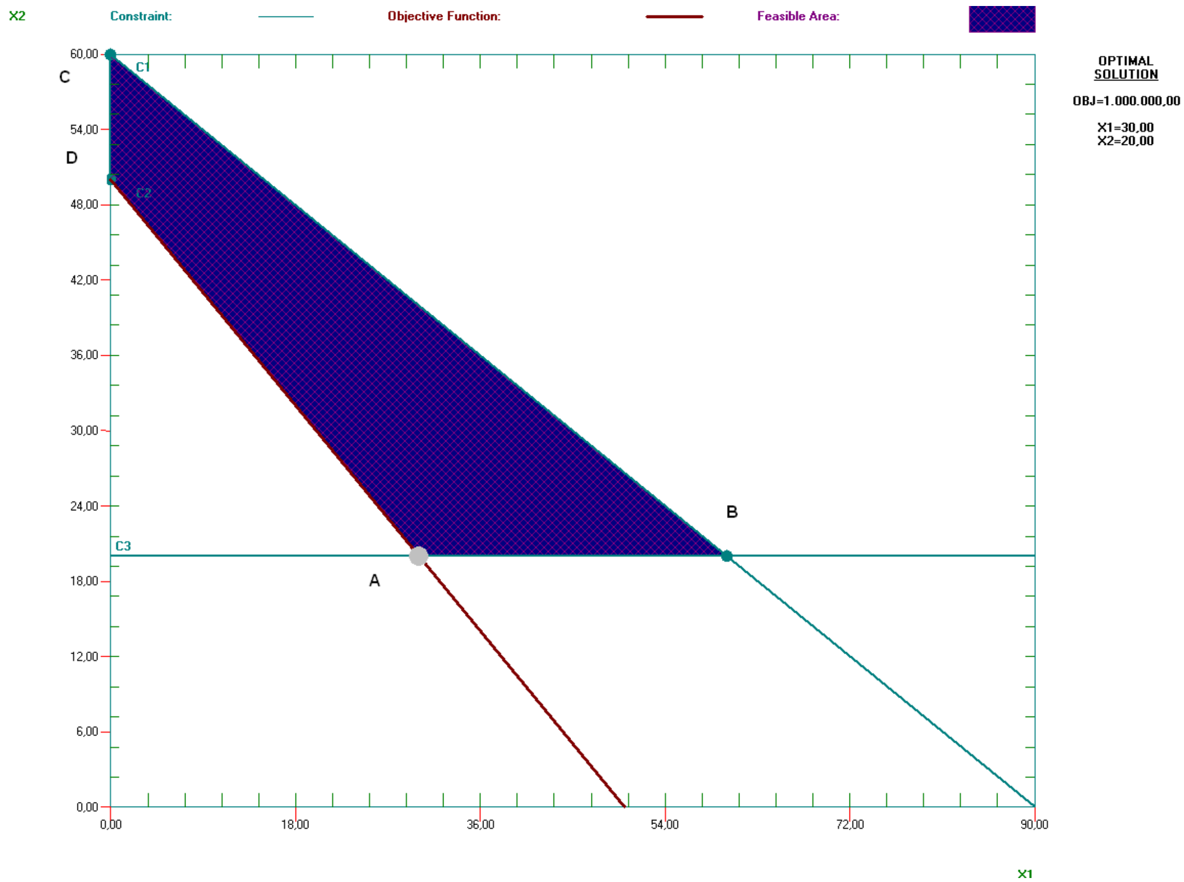
Graficar cada restricción:

$$6x_1 + 9x_2 = 540\ \Rightarrow \begin{cases} si\ x_1 = 0\ \Rightarrow\ x_2 = 60\ \therefore (0,60) \\ si\ x_2 = 0\ \Rightarrow\ x_1 = 90\ \therefore (90,0) \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 50\ \Rightarrow \begin{cases} si\ x_1 = 0\ \Rightarrow\ x_2 = 50\ \therefore (0,50) \\ si\ x_2 = 0\ \Rightarrow\ x_1 = 50\ \therefore (50,0) \end{cases}$$

$x_2 = 20$

El polígono de factibilidad es el siguiente:



Las coordenadas de los vértices son:

$A(30,20)$

$B(60,20)$

$C(0,60)$

$D(0,50)$

La función objetivo evaluada en cada vértice es:

$Z_A = 20.000\ (30) + 20.000(20) = 1.000.000$

$Z_B = 20.000\ (60) + 20.000(20) = 1.600.000$

$Z_C = 20.000\ (0) + 20.000(60) = 1.200.000$

$Z_D = 20.000\ (0) + 20.000(50) = 1.000.000$

El mínimo valor se obtiene en los puntos A y D, por lo tanto, este problema tiene **múltiples soluciones**, entonces la compañía Épsilon tiene dos alternativas de producción con mínimo costo:

a) producir 30 zapatos para hombre y 20 para dama ó

b) producir sólo 50 zapatos para dama.

Con estas cantidades el costo mínimo es de $1.000.000

Análisis de eficiencia y eficacia

Con base en la solución obtenida $x_1 = 30$ y $x_2 = 20$ se puede calcular cuánto de cada recurso se consume y cuánto sobra; tan solo basta reemplazar los valores de las variables en cada una de las restricciones. Veamos la siguiente tabla:

Recurso	Disponibilidad	Consumo	Sobrante
H-H	540 H-H	6(30)+9(20)=360	180
Venta min dos artículos	50	30 + 20 = 50	0
Venta min dama	20	20 = 20	0

Estos datos indican que hay una subutilización de las H-H, pues sólo se utilizó aproximadamente un 66,66% de la disponibilidad. Se cumplió con la demanda mínima de zapatos para dama y con la cantidad mínima demandada entre los dos artículos que era de 50 zapatos.