Esercizio sulla posizione reciproca tra retta e circonferenza

* Verificare che la retta di equazione 2x-y+7=0 è esterna alla circonferenza di equazione x2+y2-x+y=0

Primo metodo.

Verifichiamo che il sistema formato dalle due equazioni della retta e della circonferenza non ha soluzioni: $\left\{\begin{matrix}2x-y+7=0\\x^{2}+y^{2}-x+y=0\end{matrix}\right.$ $\rightarrow $ … $\rightarrow $ $\left\{\begin{array}{c}y=2x+7\\5x^{2}+29x+56=0\end{array}\right.$ .

L’equazione $5x^{2}+29x+56=0$ , risolvente il sistema ha discriminante $∆$=292-4$∙$5$∙$56=-279<0.

L’equazione è impossibile e quindi anche il sistema è impossibile. La retta è perciò esterna alla circonferenza .

[Vedi grafico](retta-circonferenza.ggb)

Secondo metodo.

Verifichiamo che la distanza tra il centro della circonferenza e la retta è maggiore del raggio. Dall’equazione $x^{2}+y^{2}-x+y=0$ si ricava che il centro della circonferenza è il punto C $\left(\frac{1}{2} , -\frac{1}{2}\right)$ e che il raggio è $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}-0}=\frac{1}{2}∙\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\~0.7$.

La distanza tra C $\left(\frac{1}{2} , -\frac{1}{2}\right)$ e la retta di equazione $2x-y+7=0$ è $d=\frac{\left|2∙\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+7\right|}{\sqrt{2^{2}+\left(-1\right)^{2}}}=\frac{17}{\sqrt{5}}\~3.8$

Poiché d>r, la retta è esterna alla circonferenza .

* Verificare che la retta di equazione 2x-y+5=0 è tangente alla circonferenza di equazione x2+y2-2x-4y=0 e determinare il punto di contatto.

Risolviamo il sistema formato dalle equazioni della retta e della circonferenza : $\left\{\begin{matrix}2x-y+5=0\\x^{2}+y^{2}-2x-4y=0\end{matrix}\right.$ $\rightarrow $ … $\rightarrow $ $\left\{\begin{matrix}y=2x+5\\x^{2}-6x+9=0\end{matrix}\right.$ $\rightarrow $ $\left\{\begin{matrix}x\_{1}=x\_{2}=3\\y\_{1}=y\_{2}=1\end{matrix}\right.$ .

Poiché il sistema ha due soluzioni coincidenti, la retta è tangente alla circonferenza e il punto di tangenza è il punto (3, 1 ).

OSSERVAZIONE : Per verificare che la retta è tangente alla circonferenza potevamo anche verificare che la distanza tra il centro e la retta è uguale al raggio ( Primo metodo ). in questo caso, però, essendo richiesto anche il punto di tangenza conviene risolvere il sistema formato dall’equazione della retta e della circonferenza e così dedurre che retta e circonferenza sono tangenti.

[Vedi grafico](retta-circonferenza1.ggb)

* Determinare i punti di intersezione tra la retta di equazione y=-2x+6 e la circonferenza di equazione x2+y2+x+y-12=0

I punti richiesti si ottengono risolvendo il sistema $\left\{\begin{matrix}y=-2x+6\\x^{2}+y^{2}+x+y-12=0\end{matrix}\right.$ $\rightarrow $ … $\rightarrow $ $\left\{\begin{matrix}y=-2x+6\\x^{2}-5x+6=0\end{matrix}\right.$ L’equazione di secondo grado ammette un $∆>0 \rightarrow $ $\left\{\begin{matrix}x\_{1}=2\\y\_{1}=2\end{matrix}\right.$ e $\left\{\begin{matrix}x\_{2}=3\\y\_{2}=0\end{matrix}\right.$

La retta quindi è secante la circonferenza nei punti (2,2) e (3,0)

[Vedi grafico](retta-circonferenza2.ggb)