Alcuni esempi per determinare l'equazione di un 'iperbole.

1. Determinare l'equazione dell'iperbole che ha come asintoti le rette di equazione y=$\pm\, 2x$e tale che i vertici hanno coordinate ($\pm$3,0).

L' iperbole ha i fuochi sull'asse x, quindi ha equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Affinché soddisfi le condizioni richieste deve essere :

$$\begin{cases} \frac{b}{a}=2 \quad (Gli\ asintoti\ che\ hanno\ equazione\ y=\pm\frac{b}{a}x, devono\ coincidere\ con\ y=\pm 2x) \\ a=3 \qquad (\ I\ vertici, che\ hanno\ coordinate\ (\pm a,0), devono\ coincidere\ con\ (\pm 3,0) \end{cases}.$$

Sostituendo il valore di a nella prima equazione, si ricava subito b=6, quindi a^2=9 e b^2=36.

L'iperbole cercata ha allora equazione : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}$=1.

Esempio1iperbole

2. Determinare l'equazione dell'iperbole che ha eccentricità e=2 sapendo che ha un fuoco nel punto di coordinate (0,2).

L'iperbole ha i fuochi sull'asse y, quindi ha equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$. Affinchè soddisfi le condizioni richieste deve essere:

$$\begin{cases} \frac{c}{b}=2 \qquad (L'eccentricit\grave{a} deve\ essere\ uguale\ a\ 2) \\ c=2\ (\ Poich\grave{e}\ uno\ dei\ due\ fuochi\ \grave{e}\ F(0,2=, la\ semidistanza\ focale\ deve\ essere\ uguale\ a\ 2\ ) \end{cases}$$

Da questo sistema si ricava immediatamente b=1. Dalla relazione c^2= a^2+b^2 segue poi 2^2= a^2+1^2 e quindi a^2=3 .

L'iperbole cercata ha equazione : $\frac{x^2}{3}-y^2=-1$.

Esempio2 iperbole

3. Determinare l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi sapendo che passa per il punto P (3,4) .

Un' iperbole equilatera riferita agli assi ha equazione del tipo $x^2-y^2= k$. Affinché l'iperbole passi per P(3,4), la sua equazione deve essere soddisfatta dalle coordinate di P, quindi deve essere $3^2-4^2=k \rightarrow k=-7$.

L'iperbole cercata ha perciò equazione: $x^2-y^2=-7$.

Esempio3 iperbole

4. Scrivere l'equazione della retta tangente all'iperbole di equazione $x^2-y^2=4$ passante per il suo punto del primo quadrante di ascissa $\sqrt{5}$.

Sostituendo $\sqrt{5}$ al posto di x nell'equazione dell'iperbole, otteniamo : $(\sqrt{5})^2-y^2=4 \rightarrow y=\pm 1$. Poiché P deve appartenere al primo quadrante, sarà $P(\sqrt{5}, 1)$. L'equazione della retta tangente in P, per la formula di sdoppiamento $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ è allora $x\cdot \sqrt{5}-y\cdot 1=4$, ovvero $y=\sqrt{5}\,x-4$

Esempio 4 iperbole