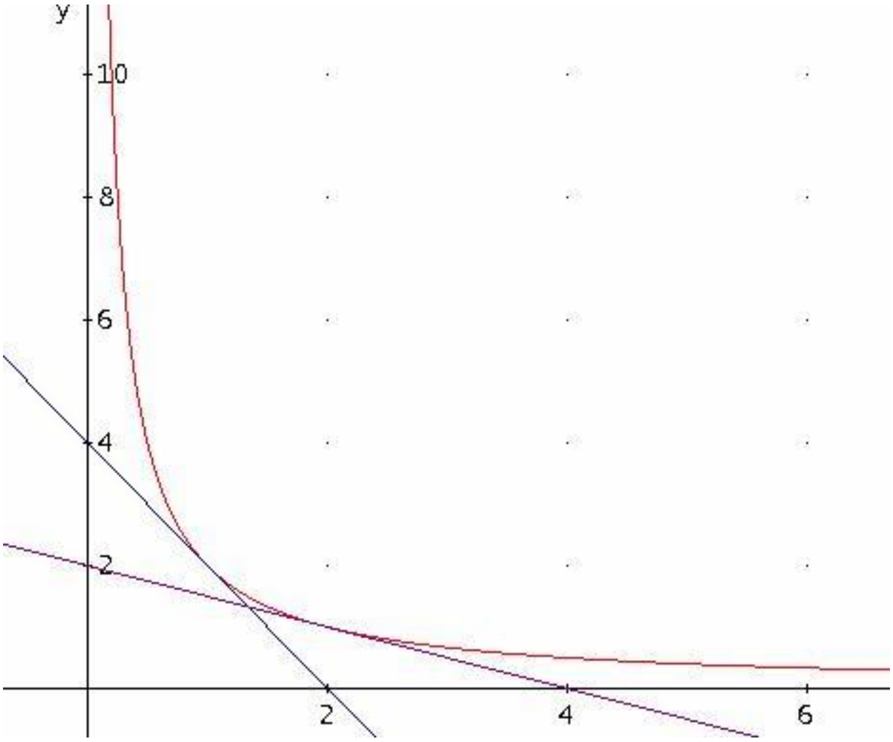
Proprietà geometriche dell'iperbole equilatera

L'iperbole equilatera gode della seguente proprietà:

1) Sia P un punto dell'iperbole equilatera. Al variare di P, l'area del triangolo delimitato dalla retta tangente all'iperbole in P e dagli asintoti è costante.



Dimostrazione

Sia $P\,(x_0, y_0)$ un generico punto dell'iperbole di equazione $xy = k$. Ricaviamo l'equazione della retta t tangente all'iperbole in P utilizzando la legge dello sdoppiamento:

$$\frac{xy_0 + x_0y}{2} = k$$

da cui,

$$y = -\frac{y_0}{x_0}x + \frac{2k}{x_0}$$

Poiché P appartiene all'iperbole, $y_0 = \frac{k}{x_0}$, quindi sostituendo si ha l'equazione di t : $y = -\frac{k}{x_0^2}x + \frac{2k}{x_0}$

Determiniamo ora i punti A e B di intersezione di t con gli assi cartesiani:

A: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2k}{x_0} \end{cases}$ B: $\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{x_0^2}{k} \cdot \frac{2k}{x^0} = 2x_0 \end{cases}$ quindi

$A(0, \frac{2k}{x_0})$, $B(2x_0, 0)$

L’area di *AOB*, che è rettangolo in *O,* risulta quindi:

Area *AOB =* $\frac{1}{2}\left|\frac{2k}{x_0}\cdot 2x_0\right| = 2|k|$

Si noti che *P* è il punto medio del segmento di estremi *A* e *B*

Pertanto non dipende da *P*.

Più in generale, si potrebbe dimostrare che:

L’area di un triangolo delimitato dal centro dell’iperbole e dai punti di intersezione della tangente all’iperbole in un suo punto P e gli asintoti è uguale al prodotto dei semiassi

Analogamente si può facilmente dimostrare che:

2) *Ogni rettangolo avente per vertici un punto P dell’iperbole equilatera, le proiezioni di P sugli assi e l’origine ha area uguale a* $|k|$*.*

3) La tangente a un’iperbole in un suo punto P taglia gli asintoti in due punti equidistanti da P