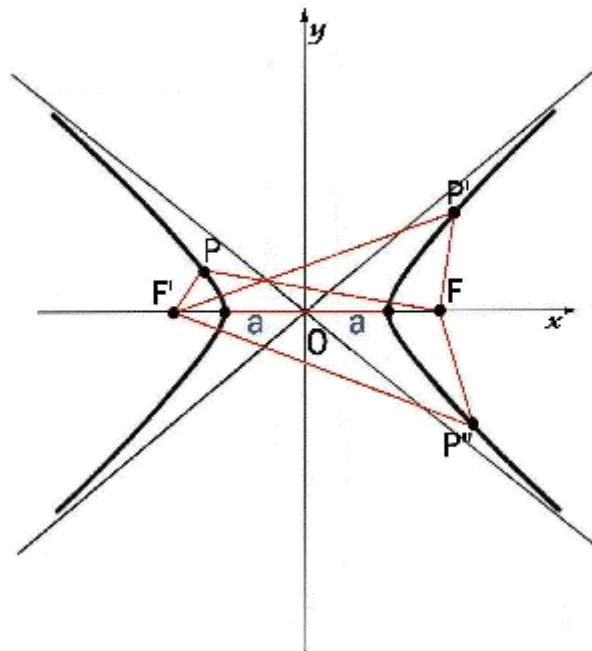


## Dimostrazione dell'equazione canonica dell'iperbole con fuochi sull'asse x.



Denotiamo con  $F$  ed  $F'$  rispettivamente, i due fuochi. Fissiamo un sistema cartesiano  $(OXY)$  tale che l'asse  $x$  passi per i punti  $F'$  ed  $F$  e l'origine sia il punto medio del segmento  $FF'$ . Allora i due fuochi avranno coordinate  $(\pm c, 0)$ . Il punto  $P(x, y)$  verifica la condizione  $d(P, F) - d(P, F') = 2a$  se e solo se

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

da cui segue

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

elevando al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza

$$(x - c)^2 - (x + c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

sviluppando i quadrati di binomio e semplificando

$$-4xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

isolando ancora la radice

$$-a^2 - xc = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elevando di nuovo al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza

$$x^2c^2 + a^4 + 2a^2xc = a^2(x^2 + c^2 + 2xc + y^2)$$

raccogliendo parzialmente

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

si arriva infine all'identità

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1. \quad (1)$$

Adesso consideriamo il triangolo FF'P (con F ed F' i fuochi e P il punto sull'iperbole). Poiché in un triangolo la differenza, in valore assoluto, tra due lati è minore del terzo abbiamo

$$\overline{FF'} > |\overline{PF} - \overline{PF'}|$$

cioè  $2c > 2a$  da cui  $c > a$ . Possiamo allora porre  $b^2 = c^2 - a^2$ , e la (1) rappresenta l'equazione canonica dell'iperbole.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$