Asintoti

Consideriamo ora un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e una retta di equazione *y = mx*. Vogliamo determinare per quali valori di *m* la retta interseca l'iperbole, è esterna all'iperbole o, eventualmente, è tangente all'iperbole. Dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = mx \end{cases}$$

ricaviamo l'equazione risolvente: $(b^2 - a^2m^2)x^2 = a^2b^2 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{a^2b^2}{(b^2 - a^2m^2)}$

Avremo dunque due soluzioni distinte se $b^2 - a^2m^2 > 0$, ossia se , $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$ mentre non abbiamo nessuna soluzione se $b^2 - a^2m^2 \le 0$, ossia se $m \le -\frac{b}{a} \quad m \ge \frac{b}{a}$;

Pertanto abbiamo dimostrato che una retta di equazione *y = mx* non interseca l'iperbole se $m \le -\frac{b}{a} \quad m \ge \frac{b}{a}$; mentre interseca l'iperbole se $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$.

Le rette di equazione $\mathbf{y = \pm\frac{b}{a}x}$ si dicono **asintoti** dell'iperbole. Esse sono, per così dire, le rette di "confine" tra le rette che intersecano l'iperbole e le rette che non intersecano l'iperbole.

Si deduce che i punti della curva sono contenuti nell'angolo formato dai due asintoti e contenente l'asse *x* (asse focale).

Gli asintoti sono le diagonali del rettangolo di vertici (*a,0),(-a,0),(0,b),(0,-b).*