Derivata

***Definizione** Dunque data la funzione y=f(x) definita in un intorno completo di x_0 e costruito il rapporto incrementale, se **esiste finito**[1] il $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ prende il nome di **derivata della funzione nel punto** x_0 e lo si indica con uno dei seguenti simboli: $f'(x_0)$ oppure* $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$

Definiamo funzione derivata della funzione f(x), la funzione che associa ad ogni elemento x_0 del dominio la derivata della funzione f(x) in x_0.
E la indicheremo $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$

Definiamo una funzione si dice **derivabile** in x_0 se in tal punto essa ha derivata finita

Derivate delle funzioni elementari e teoremi per il calcolo delle derivate

Funzione	Derivata	Alcune osservazioni sul calcolo di $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$
f(x)=k costante	f'(x)=0	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{k-k}{h}=0$; $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$
f(x)=x	f'(x)=1	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x+h-x}{h}=1$; $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=1$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x+h$; $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	**Attenzione**: questa derivata vale sia per $n\in\aleph$ che per $n\in Q^+$ (ovvero sia per potenze che per radici). Ma la sua dimostrazione è diversa nei due casi.
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{(x+h)}-\sqrt{x}}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{x-x-h}{h(x+h)x}=-\frac{1}{x(x+h)}$; $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=e^x$	$f'(x_0)=e^x$	Si ricava dalla precedente ricordando che $\ln e=1$
$f(x)=\sin x$ $f(x)=\cos x$ **x in radianti**	$f'(x)=\cos x$ $f'(x)=-\sin x$	
$f(x)=\tan x$ **x in radianti**	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	

[1] E' importante ricordarsi che affinchè il limite esista deve esistere sia il limite destro che il limite sinistro.

Altre derivate!

Derivata $f(x)=x^{\alpha}$ $\frac{d}{dx}f(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$ con $\alpha\in\Re^{+}$

Teoremi per il calcolo delle derivate

1) La derivata della somma $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$

La derivata della somma di due funzioni derivabili è uguale alla somma delle derivate delle funzioni.

2) La derivata del prodotto $\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x))=\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\cdot g(x)+f(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)$

La derivata del prodotto di due funzioni derivabili è uguale al prodotto della derivata della prima funzione per la seconda non derivata, sommato al prodotto della derivata della seconda per la prima non derivata.

3) La derivata del quoziente $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\cdot g(x)-f(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{(g(x))^2}$

4) La derivata di una funzione composta $\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Dai precedenti teoremi si ricavano:

6) $\frac{d}{dx}(f(x)+c)=\frac{d}{dx}f(x)$

7) $\frac{d}{dx}(f(x)\cdot k)=\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\cdot k$ Se abbiamo una costante che moltiplica la funzione, lasciamo invariata la costante e deriviamo solo la funzione.

8) $\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$ La derivata della differenza di due funzioni è uguale alla differenza delle derivate.

9) $\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))=\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\cdot g(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)\cdot h(x)+\left(\frac{d}{dx}h(x)\right)f(x)g(x)$ Ovvero la derivata del prodotto di più funzioni è uguale alla somma dei prodotti delle derivate di ciascuna funzione per tutte le altre non derivate.

Dal teorema 4, sulla derivata della funzione composta, si ricavano le seguenti regole:

10) $\frac{d}{dx}(f(x))^{\alpha}=\alpha(f(x))^{\alpha-1}\cdot\frac{d}{dx}f(x)$

11) $\frac{d}{dx}\sin(f(x))=\cos(f(x))\cdot\frac{d}{dx}f(x)$; $\frac{d}{dx}\cos(f(x))=-\sin(f(x))\cdot\frac{d}{dx}f(x)$;

$\frac{d}{dx}\tan(f(x))=\frac{1}{\cos^2(f(x))}\cdot\frac{d}{dx}f(x)$

12) $\frac{d}{dx}e^{f(x)}=e^{f(x)}\cdot\frac{d}{dx}f(x)$; $\frac{d}{dx}a^{f(x)}=a^{f(x)}\cdot\ln(a)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$