

FUNDAMENTACIÓN COGNITIVA DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS¹

Luis Moreno Armella, Guillermina Waldegg
Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México

1. INTRODUCCIÓN.....	3
2. APRENDIZAJE Y CONDUCTA	5
2.1. El conductismo.....	5
2.2. Aportaciones y límites del conductismo.....	6
3. EL NIÑO COMO CENTRO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE: EL ENFOQUE PIAGETIANO	7
3.1. Antecedentes	7
3.2. La componente estructuralista	9
3.3. La componente interaccionista	9
3.4. La componente constructivista	10
3.5. Aportes de la teoría piagetiana a la educación.....	10
3.6. Los límites del modelo piagetiano	11
4. ASPECTOS SOCIOCOGNITIVOS DEL APRENDIZAJE: LA TEORÍA DE VYGOTSKY.....	12
4.1. El modelo sociocultural	12
4.2. Los sistemas semióticos de representación.....	12

¹ Segunda Edición del Documento Publicado por el Ministerio de Educación de Colombia en el libro “Seminario Nacional de Formación de Docentes: en el Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas”. Bogotá D.C. Colombia. 2002. Pág. 40 – 66. La primera edición del Documento fue publicado en Capítulo 3 del libro Didáctica de las Matemáticas, Editorial Síntesis, Madrid, España, Luis Rico (Ed.).

4.3. De lo inter-individual a lo intra-individual	13
4.4. Desarrollo cognitivo y educación	14
4.5. La zona de desarrollo próximo	14
4.6. Preguntas para la Educación.....	15
5. LAS INTERACCIONES COGNITIVAS EN EL APRENDIZAJE ESCOLAR	16
5.1. El conflicto sociocognitivo.....	16
Las condiciones del conflicto sociocognitivo	17
Los progresos cognitivos	17
5.2. Interacciones sociocognitivas simétricas	18
La cooperación.....	18
5.3. Las interacciones sociocognitivas asimétricas	19
La interacción tutorial.....	19
5.4. La teoría de las situaciones didácticas.....	19
La situación problema.....	20
6. COGNICIÓN Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA.....	21
6.1. La Mediación Instrumental	21
6.2. La cognición situada.....	22
6.3. Nuevos sistemas de representación.....	23
6.4. El significado de las situaciones escolares.....	24
6.5. A modo de síntesis: el aprendizaje como un fenómeno individual y social	25
7. MATEMÁTICAS Y COGNICIÓN: UNA VISIÓN CLÁSICA E	
INFORMÁTICA	26
7.1. Generalización y Contextualidad	26
7.2. Reflexión sobre la abstracción.....	27
7.3. Los recursos computacionales en la educación.....	28
A modo de conclusión.....	30
REFERENCIAS	31

1. INTRODUCCIÓN

Las expectativas de cambio en las sociedades contemporáneas se han visto afectadas, en mayor o menor medida, por la apertura hacia un nuevo siglo, y es la educación el campo en donde confluyen mayormente estas expectativas. Las sociedades han comprendido que el futuro está íntimamente ligado a la educación. Ya escuchamos de manera reiterada las voces que nos invitan a imaginar *la sociedad de la información y del conocimiento*.

Si se quiere que estas expectativas se vean colmadas, los sistemas educativos tendrán que entrar en resonancia con los inmensos desarrollos científicos y tecnológicos de las últimas décadas y así, prepararse para dar respuesta a las necesidades educativas inmediatas y abrirse a lo nuevo e inesperado. Por lo tanto, los sistemas educativos tienen un gran desafío: lograr la transformación de sus estructuras curriculares, entendiendo que éstas ya no pueden depender totalmente de los contenidos temáticos, como ha sido tradicional, sino de un desarrollo cognitivo en sus individuos que incorpore el fortalecimiento de actividades como la generalización, la sistematización y la abstracción. Los estudiantes, cada vez más, tienen necesidad de enfrentarse a la resolución de problemas, no sólo en el ámbito escolar sino en sus futuros lugares de trabajo, en donde la creatividad y la innovación serán la moneda de cambio. Los estudiantes necesitan instrumentos de aprendizaje, es decir, estructuras cognitivas con alto grado de adaptabilidad a lo nuevo. Esta necesidad refleja una dimensión central del proceso de educación continua en el que cada día estaremos inmersos.

Cuando la sociedad discute los fines de la educación, incluye entre sus propósitos acciones que conducen a modelar las conductas, vocaciones, conocimientos y valores de sus miembros, en función de las capacidades individuales. Desde luego, esto lo hace a partir de sus propios objetivos: si una sociedad se propone educar sólo a sus élites, el profesor, como único recurso, puede bastar para la consecución de estos fines. Empero, el problema se hace más complejo cuando una sociedad se ve a sí misma como una sociedad en desarrollo que busca dotar a todos sus miembros de una educación que privilegie los valores democráticos y la confianza en un bienestar salido del progreso científico y tecnológico.

Es en este último caso en el que la psicología ha tenido un papel principal en el curso del siglo veinte. La psicología ha puesto el énfasis en la necesidad de conocer las capacidades intelectuales, tanto individuales como compartidas, de los estudiantes para, a partir de ese conocimiento, garantizar las condiciones mínimas de acceso a la educación a todos los miembros de la sociedad. Con ello se hace manifiesta el compromiso de esta disciplina con las sociedades democráticas y con los avances científicos y tecnológicos.

La psicología hace su aparición en el campo de la educación por la vía de los tests. Su propósito, en aquel momento, era detectar a los niños que no estaban en posibilidades de seguir una escolaridad “normal”, para proponerles una formación específica alternativa. La base teórica de los tests era restringida: se trataba de escalas esencialmente descriptivas que permitían ubicar al

individuo entre otros semejantes en función de su nivel de desarrollo. La evaluación diagnóstica se proponía, adicionalmente, hacer una predicción del comportamiento y del éxito individual, valorando la medida en la que un niño o un adolescente podría alcanzar tal o cual nivel de ejecución. Estos tests diagnósticos todavía juegan un papel importante al interior de la institución escolar, aunque su impacto disminuye progresivamente.

Los instrumentos elaborados con fines diagnósticos dieron un gran espacio a los conocimientos culturales y a la adaptación a la vida cotidiana, surgiendo de allí aplicaciones más directamente relacionadas con el desempeño escolar y con el currículo.

Hacia mediados del presente siglo, surgieron, en el panorama internacional, los primeros encuentros que se proponían discutir resultados de la investigación psicológica en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, dando lugar con ello a un nuevo campo de investigación. Inicialmente, esta nueva investigación se orientó hacia los llamados errores de comprensión. Siguiendo la antigua tradición normativa de la didáctica, estos resultados condujeron a la decisión de tratar de modificar, no las estrategias de aprendizaje, sino las estrategias de enseñanza que permitieran superar las deficiencias.

En este caso, el enfoque tenía como hipótesis de base una concepción del conocimiento matemático según la cual, el significado de un enunciado es único y, en consecuencia, lo importante es saber transmitirlo para que un estudiante lo comprenda. Sin embargo, el hecho de que los estudiantes desarrollen formas de conocimiento que no coinciden con los contenidos escolares oficiales está en abierto contraste con aquella supuesta transparencia del conocimiento.

El reconocimiento de que el problema no es exclusivamente atribuible a la enseñanza inclinó el interés investigativo hacia el estudio de las *construcciones intelectuales del estudiante*, es decir, de las maneras en las que el estudiante recoge, procesa e interpreta la información que recibe por diversas vías, en particular, dentro de un contexto escolar. El movimiento *constructivista* en la educación fue ganando terreno, en buena medida, porque encontró una base de sustentación teórica en las tesis epistemológicas constructivistas de la escuela piagetiana.

Como veremos más tarde, la psicología de la educación se encuentra hoy en una posición muy distinta a la que le dio origen, e incluso a la que floreció dentro del paradigma piagetiano. Tanto las investigaciones como la práctica docente han puesto en evidencia que:

- i) Los estadios del desarrollo individual, propuestos por la teoría de Piaget, contienen una parte muy importante de resultados que apelan a conocimientos culturales. Por ello, no pueden evaluarse los logros cognitivos de los alumnos al margen de las influencias del medio.
- ii) Ciertas actividades escolares pueden presentar dificultades específicas, por ejemplo, el aprendizaje de la lectura, que con frecuencia da lugar a un tipo de fracaso en alumnos intelectualmente muy dotados.
- iii) El nivel intelectual medido por los tests aumenta regularmente cada cincuenta años, lo que conduce a preguntarse por los orígenes de este crecimiento y, de hecho, por las relaciones entre las capacidades que se pueden definir con independencia de las influencias del medio y de sus demandas, aportes y sanciones.

Estos hechos se encuentran entre los que han conducido a la psicología cognitiva a estudiar un cierto número de actividades complejas, como la lectura, la composición de textos, la numeración, la resolución de problemas, y otras, menos conocidas en este campo, como la música o el dibujo. Estos estudios han puesto en evidencia hechos que proporcionan resultados nuevos y fundamentales para los aprendizajes escolares. Así, la investigación en psicología cognitiva no sólo ha contribuido a acrecentar nuestra comprensión de las dificultades de ciertos aprendizajes escolares, sino que ha permitido concebir actividades e instrumentos que pueden — de manera modesta pero real— prevenir el fracaso escolar.

Gracias a las competencias técnicas que ha elaborado durante las últimas décadas, la psicología puede contribuir a diagnosticar dificultades y a proponer actividades, pero también puede ayudar a concebir situaciones y herramientas pedagógicas nuevas, adaptando los resultados de la investigación y poniéndolos a disposición de los profesores. Más aún, el cuerpo de conocimientos desarrollado por la psicología cognitiva permite extender el papel de los equipos pedagógicos, al proporcionar elementos teóricos y metodológicos para la elaboración de planes y programas de estudio y de secuencias didácticas.

A continuación, proponemos una revisión de las principales teorías que han explicado el aprendizaje durante el último siglo. Con ellos no intentamos agotar el tema, sino dar al lector un mapa que le permita reconocer el panorama teórico en el que se sitúa la definición y el desarrollo de los contenidos escolares que debe enseñar.

2. APRENDIZAJE Y CONDUCTA

Las diversas teorías de la cognición están de acuerdo en atribuir al individuo una capacidad esencial: la capacidad de aprender. Los puntos de vista divergen, empero, en lo que respecta a la naturaleza del aprendizaje.

Para los conductistas, los aprendizajes están regidos por una serie de leyes generales que pueden ser descubiertas a partir de hechos observables. El aprendizaje está definido como la modificación de la conducta por la experiencia y el estudio del aprendizaje, como la ciencia del comportamiento. No obstante, gradualmente los psicólogos han reconocido la necesidad de ir más allá de los fenómenos observables y de ocuparse de los procesos mentales que subyacen a los comportamientos. El concepto de conducta se vio entonces cuestionado, acotando las teorías conductistas clásicas.

2.1. El conductismo

El conductismo se instauró, hacia los años cincuenta del siglo veinte, como una propuesta metodológica y como una teoría del aprendizaje. Inspirado en el paradigma positivista de la física clásica, el conductismo propuso un modelo de aprendizaje de tipo asociativo: $E \rightarrow R$. Los Estímulos (externos) llegan al individuo quien produce las Respuestas (internas o conductuales). La instalación de nuevas conductas por repetición de asociaciones $E \rightarrow R$ define el aprendizaje

por condicionamiento. Éste es un proceso mecánico en el que el repertorio de comportamientos del aprendiz está determinado por los reforzamientos que el medio proporciona: se recompensan y reproducen las “buenas” respuestas y las “malas” se castigan y son abandonadas. Bajo esta perspectiva, el proceso constituye una forma elemental de aprendizaje cuyo campo de aplicación se vincula tanto con el desarrollo de hábitos y conductas relacionadas con las emociones, como con aprendizajes complejos.

El condicionamiento instrumental (Skinner, 1904-1990) se distingue del condicionamiento clásico pues incorpora la actividad del individuo. El aprendiz establece, él mismo, la relación entre dos sucesos, entre un comportamiento y una respuesta. Si el comportamiento da lugar a una satisfacción, será reproducido. En caso contrario, será abandonado. Esta concepción del aprendizaje proporcionó a Skinner los principios de la enseñanza programada.

2.2. Aportaciones y límites del conductismo

El esquema E → R permitió hacer progresos en el conocimiento de las leyes funcionales y elementales que rigen los aprendizajes simples, pero se constituyó en un reduccionismo de la realidad psicológica. El hecho de haber sido puesta a prueba en el comportamiento animal y, principalmente, en conductas motrices, limita la aportación de la teoría conductista. Al excluir del análisis los procesos mentales de los individuos, y al excluir de su interés los procesos mentales internos que les da sustento, el conductismo no permite dar cuenta de aprendizajes complejos, como la adquisición del lenguaje o del razonamiento lógico–matemático.

El conductismo puso el acento en la dimensión cuantitativa de los saberes; de ahí que privilegió la fragmentación de los contenidos y de las tareas, y la jerarquización de los conocimientos, que debían ser adquiridos en un orden lineal y acumulativo, a menudo carente de una visión de conjunto.

El punto más débil de este enfoque radicaba en el hecho de que se desatendía de las condiciones en las cuales se realizan las adquisiciones. Sin embargo, las nuevas tendencias del conductismo, conocidas como neoconductismo, aunque mantienen las tesis básicas que les dieron origen, conceden que se debe otorgar un peso en las explicaciones al papel de los factores emotivos y mentales del individuo; de esta manera, buscan no sólo comprender el patrón E-R, sino explicar también los factores de *mediación* que intervienen entre el estímulo y la respuesta.

3. EL NIÑO COMO CENTRO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE: EL ENFOQUE PIAGETIANO

Los trabajos de Piaget y de sus seguidores inauguraron una perspectiva para el estudio del aprendizaje radicalmente nueva. Desde ese momento el niño pasó a ocupar el centro de las preocupaciones de los psicólogos de la educación y aun del sistema educativo en su conjunto. Se puso el acento en las capacidades cognitivas del niño que le permiten comprender las situaciones y sacar provecho de las enseñanzas. Sin embargo, todo sucedía como si el desarrollo del niño siguiera un curso autónomo, poco o nada sensible a las influencias del lenguaje, de la sociedad y de la cultura. Desde la perspectiva piagetiana, la determinación del nivel de desarrollo del niño se volvió crucial, en tanto que este nivel condicionaba la posibilidad del niño para aprovechar tal o cual aporte de conocimientos y para operacionalizar tal o cual modo de funcionar.

3.1. Antecedentes

Para entender la presencia de la teoría piagetiana como una nueva manera de mirar los fenómenos de la cognición (y eventualmente de la educación), que reacciona ante el reduccionismo conductista, conviene ubicarnos en una perspectiva histórica.

En su *Crítica de la Razón Pura*, Kant afirma que, al entrar en contacto con su objeto de conocimiento, el sujeto recibe impresiones sensibles que somete a un proceso organizador. Esto lo hace, según Kant, mediante sus estructuras cognitivas innatas. Así como un líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, así también las impresiones sensoriales adoptan las formas que les son impuestas por las estructuras cognitivas que las procesan; el resultado de este procesamiento es el conocimiento. La capacidad cognoscitiva (lo que es capaz de aprender y comprender) del sujeto tiene como límites aquellos que le son impuestos por el dominio de su experiencia.

De manera muy abreviada, podemos decir que hay dos consecuencias fundamentales del enfoque kantiano que incumben al proceso educativo. La primera es que el conocimiento deja de ser concebido como representación, como copia de una realidad externa y, en su lugar, el conocimiento se concibe como resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus estructuras o instrumentos cognitivos) y sus experiencias sensoriales. La segunda consecuencia es que el sujeto ya no es pasivo frente al objeto de su conocimiento. A esta solución kantiana le hacía falta contestar a la pregunta: ¿de dónde provienen los instrumentos cognitivos que sirven para transformar en conocimiento las experiencias del sujeto?

La epistemología constructivista piagetiana ha sido una de las respuestas más elaboradas a este interrogante. Sin proponérselo explícitamente, dicha epistemología se constituyó en una base de sustentación para el constructivismo desde la perspectiva de la educación. Sin embargo, las tesis epistemológicas de este constructivismo fueron, con frecuencia, trasladadas mecánicamente al

campo educativo dando como resultado una especie de "deslizamiento" desde la epistemología hacia la didáctica.

En su versión constructivista, la epistemología viene provista de una base experimental constituida por la historia de la ciencia y ciertos experimentos psicológicos, que quedan enmarcados en la llamada psicología genética.

Es muy importante diferenciar con precisión esta doble naturaleza del soporte experimental propio de esta versión de la epistemología, que surgió con pretensiones de sacar a la epistemología del terreno de la especulación filosófica y colocarla en el campo de la reflexión científica.

La epistemología piagetiana está construida alrededor de categorías básicas de la ciencia: espacio, tiempo, causalidad, principio de conservación de la materia, el número, etc. Piaget realizó investigaciones decisivas sobre estas categorías, desde la perspectiva de la historia de las ideas, que lo llevaron a una explicación de la racionalidad científica con características identificables por lo menos en el pensamiento occidental.

Sin embargo, Piaget siempre consideró necesario dar una sustentación experimental a sus aseveraciones de orden epistemológico. Entonces, su "laboratorio epistemológico", constituido por la historia de la ciencia se vio ampliado con las investigaciones psicológicas que le dieron un lugar en la historia de la psicología infantil. En este campo, Piaget dio la demostración empírica de que la mente infantil tiene su propia lógica y no es, como se pensaba, una versión a escala de la mente adulta. Por el papel evolutivo que Piaget otorga al desarrollo cognitivo del niño, su teoría psicológica fue bautizada como *psicogenética*.

Uno de los resultados más conocidos de este acercamiento teórico, que tuvo mayores repercusiones en la enseñanza de las matemáticas, se refiere a la evolución del concepto de número en el niño: el acceso a la llamada *conservación* parecía determinante para la comprensión de la cardinalidad y de las operaciones aritméticas. Se concluía entonces que los usos anteriores de conteo y numeración sólo eran manifestaciones verbales, sin interés y sin repercusión para el aprendizaje. Con ejemplos como éste, la psicología se encontró así, durante un breve periodo, en posición de determinar, al menos para ciertos sectores disciplinarios, los contenidos y la organización curricular de aquello que se debía enseñar.

La psicología piagetiana surgió en oposición a la concepción conductista, buscando construir una ciencia de la cognición a partir del estudio empírico de la estructura y funcionamiento del sistema cognitivo. Este acercamiento se presenta, ante todo, como una psicología del conocimiento. Podemos pasar la psicología piagetiana por el cristal de la epistemología correspondiente. Dicha psicología, como hemos visto, responde a las necesidades del programa epistemológico como parte sustancial de su metodología. Lo que vemos, una vez pasada la psicología por ese cristal, son las componentes estructuralista, constructivista e interaccionista de dicha teoría psicológica.

3.2. La componente estructuralista

Para Piaget, el aprendizaje consiste en el pasaje de un estado de menor conocimiento a un estado de mayor conocimiento. Piaget postula la existencia de una serie de organizaciones internas de la experiencia y de la información previa del sujeto (sus *estructuras cognitivas*), que son cada vez más poderosas y permiten integrar la información de modos crecientemente complejos. Las estructuras cognitivas evolucionan hacia un pensamiento cada vez más estable, que es capaz de incorporar en sus explicaciones un número creciente de situaciones del mundo físico y del entorno cognitivo. Piaget intenta explicar los mecanismos de adquisición y de utilización de los conocimientos a partir de la génesis de las operaciones lógico–matemáticas subyacentes a toda actividad intelectual.

Las etapas sucesivas del desarrollo cognitivo del niño, son el resultado –según Piaget- de la experiencia y de la acción del sujeto que actúan como motores de la construcción, e incluso de la reconstrucción, de las representaciones internas que el niño se hace del medio físico, inicialmente percibido y comprendido de manera intuitiva.

Piaget sostiene que, en lo esencial, el desarrollo cognitivo parte de la puesta en marcha de conocimientos concretos, sostenidos primero en representaciones inmediatas y posteriormente en hipótesis (construcción de la inteligencia abstracta). Se trata de un largo proceso de organización del mundo marcado por adquisiciones relacionadas con los conocimientos y con la utilización de sistemas de relaciones entre los objetos (clasificaciones, seriaciones), entre los objetos y el sujeto (el tiempo y el espacio), y finalmente entre los objetos, el sujeto, el tiempo y el espacio.

3.3. La componente interaccionista

Los progresos en la adquisición del conocimiento resultan, en realidad, de una construcción en la que el sujeto es responsable directo de su aprendizaje. Actuando sobre el medio, el sujeto reconstruye el mundo físico y social que le rodea, lo representa y lo objetiviza. En uno de sus primeros libros (1923), Piaget logró expresar esta posición de manera muy elocuente:

(...) el conocimiento del mundo exterior comienza por una utilización inmediata de las cosas (...) la inteligencia no comienza así ni por el conocimiento del yo ni por las cosas en cuanto tales sino por su interacción y orientándose simultáneamente hacia los dos polos de esa interacción, la inteligencia organiza al mundo organizándose a sí misma (Piaget, 1983).

El conocimiento se define entonces como el producto de la elaboración de la experiencia a la que se confronta el sujeto.

El ser humano está condicionado por su entorno físico y social. Las perturbaciones que resultan de la interacción con su entorno, tanto social como material, le plantean la necesidad de construir estructuras cognoscitivas, que cada vez respondan mejor a los problemas que le plantea su medio.

La adaptación del sujeto al medio (social y material) pone en juego dos mecanismos fundamentales: la *asimilación* y la *acomodación*. La asimilación consiste en una familiarización de los datos del mundo exterior con el fin de hacerlos integrables a la estructura propia del sujeto;

el entorno entonces “tiende a conformar” la estructura del niño. A la inversa, la acomodación corresponde a un ajuste del sujeto a los datos del entorno.

Los dos procesos, asimilación y acomodación, son indispensables e interactuantes a lo largo de todo el desarrollo pues van contribuyendo al logro de estructuras cognoscitivas que progresivamente permiten al sujeto una mejor interacción con su mundo material y sociocultural.

3.4. La componente constructivista

Al señalar el lugar de la actividad como factor determinante del incremento en los conocimientos, Piaget recuerda que la maduración y la influencia social no son ajenas a este proceso. El desarrollo de los aprendizajes es igualmente la consecuencia de un cuarto factor: la *equilibración*.

La equilibración de las estructuras cognitivas traduce el pasaje de un estado de menor equilibrio que resulta de respuestas del sujeto a las perturbaciones exteriores, hacia un estado de equilibrio superior que corresponde a posibilidades nuevas derivadas de una estructura cognitiva más poderosa. Así, en el dominio del desarrollo lógico-matemático, ilustrado por la adquisición de las conservaciones, Piaget muestra que, en el curso del desarrollo, el niño pasa por tres momentos claves: las perturbaciones (en el caso de la conservación de la sustancia, constata el alargamiento de una salchicha de arcilla y su adelgazamiento, pero no conecta todavía estos dos fenómenos); las compensaciones (el niño puede ahora asociar o coordinar los dos datos: alargamiento y adelgazamiento), finalmente, la puesta en correspondencia matemática (*no se quita ni se agrega nada*, el alargamiento de la salchicha proviene de lo que ha perdido de espesor). En el conjunto del desarrollo, los progresos en el conocimiento resultan de una construcción en la que el sujeto es actor de sus aprendizajes en interacción con el mundo. La concepción del aprendizaje es resueltamente *constructivista*. Actuando sobre el medio, el sujeto reconstruye el mundo físico y social que le rodea, lo objetiviza y lo representa.

3.5. Aportes de la teoría piagetiana a la educación

Aunque Piaget se haya interesado mucho en la educación, su trabajo no contempla explícitamente este campo de acción. No obstante, el modelo de desarrollo intelectual que propone, ofrece un cuadro de reflexión útil para la educación. Tan es así que la puesta en evidencia, que logra Piaget, del papel del conflicto cognitivo confiere al acercamiento piagetiano una dimensión educativa considerable. El conflicto cognitivo expresa la idea según la cual la toma de conciencia por parte del individuo de que existe una respuesta diferente a la suya en una situación particular provoca una tensión interna de naturaleza cognitiva.

Piaget proporciona un ejemplo de esta situación con el *concepto de conservación*. Las conservaciones ponen al descubierto la existencia de algo invariante bajo el efecto de alguna transformación. En la práctica, se presenta al sujeto dos entidades A y B, perceptualmente iguales (por ejemplo, dos recipientes idénticos que contienen la misma cantidad de líquido). Se obtiene el acuerdo del niño sobre esta igualdad. Después se mantiene A sin cambio mientras que B se transforma en B' por una modificación que sólo afecta la apariencia perceptual (por ejemplo se trasvasa el líquido de B a B' que es un recipiente más largo y más estrecho). Se le pregunta al

niño si B' es igual a A. Las respuestas varían en función del estadio de desarrollo: en un primer estadio (estadio pre-operatorio), el niño se centra en una sola de las dos dimensiones sin coordinarlas entre sí (por ejemplo, toma en cuenta la altura del recipiente, pero “olvida” constatar que lo más alto es también más estrecho). A partir de cierto momento en su desarrollo, el niño se centra en dos dimensiones a la vez y logra coordinarlas. De este modo logra vencer al conflicto cognitivo suscitado por la situación que se le ha presentado.

Piaget definió a la escuela como un entorno que debe estimular y favorecer el proceso de auto-construcción; el profesor, convertido en un mediador entre los conocimientos y el aprendiz, debe facilitar el descubrimiento de nociones y la elaboración del saber y del saber-hacer, más que presentarlos bajo una forma preestablecida. El maestro tradicional pone el acento en los aspectos figurativos del pensamiento y considera el desarrollo cognitivo como una acumulación lineal de conocimientos o técnicas enciclopédicas. La concepción heredada del modelo piagetiano es muy diferente: se refiere a aprender a pensar y a valorar los aspectos operativos del pensamiento (procesos internos, operaciones mentales), a hacer experimentar al niño, a favorecer la manipulación con el fin de hacer surgir leyes generales. Según esta concepción, la simple observación de la realidad es insuficiente para la estructuración de los conocimientos. La actividad desplegada por el aprendiz se convierte así en una poderosa fuente de motivación, necesaria para la construcción del conocimiento.

3.6. Los límites del modelo piagetiano

El modelo piagetiano tiene sus límites. Uno de ellos, que surge cuando se trata de trasladar sus aportes al campo educativo, consiste en *que no es una teoría de la construcción escolar*. La teoría piagetiana es esencialmente una teoría epistemológica, y como tal minimiza el papel de la cultura en la cognición. Muchos de sus resultados cognitivos son presentados como independientes de la cultura a la cual pertenezcan las personas. Se supone que el pensamiento es algo que ocurre exclusivamente en la cabeza de los individuos, que la comprensión del mundo depende sólo de las estructuras lógicas dentro de las cuales se integra toda la experiencia. Esta posición es altamente reminiscente de la posición kantiana según la cual toda la experiencia se pasa por el molde de las estructuras cognitivas que son intrínsecas a los individuos. Al subordinar de este modo el aprendizaje, Piaget desestima el papel de los sistemas de representación (lenguaje, memoria,...). Ahora bien, un sujeto que busca adaptarse a situaciones del entorno debe, ante todo, manipular la información simbólica. De allí la importancia del lenguaje y de los demás sistemas semióticos de representación. Por otra parte, al dar un lugar predominante a la actividad del sujeto Piaget no concede toda la importancia al papel que juegan las diferencias entre individuos y que son resultado de las influencias sociales.

Las teorías educativas actuales sostienen que las personas han de ser concebidas dentro del marco de una relación dialéctica con sus tradiciones, bajo la influencia de valores e ideas y, al tiempo, como modeladoras de esas tradiciones. Quizá pueda decirse que la cultura es resultado de las interacciones dialécticas entre la cognición y las tradiciones. Una persona no alcanza su mayor grado de desarrollo cognitivo si no existe una dinámica externa a ella que la estimula a lograrlo. No puede explicarse el desarrollo cognitivo sólo desde la perspectiva de una dinámica que proviene de la intimidad del individuo.

4. ASPECTOS SOCIOCOGNITIVOS DEL APRENDIZAJE: LA TEORÍA DE VYGOTSKY

Comprender el papel del entorno social en el aprendizaje del individuo es una de las ambiciones mayores de la psicología de la educación.

Las corrientes de investigación que comparten la tesis de que la interacción del individuo con el medio social es determinante de sus adquisiciones cognitivas, se apartan de los acercamientos que privilegian la dimensión intra-individual del aprendizaje (como la teoría piagetiana). Al hacer explícita la influencia de variables sociales y culturales en el funcionamiento cognitivo del individuo, las corrientes sociocognitivas renuevan la reflexión sobre la organización de las situaciones escolares.

4.1. El modelo sociocultural

Las tesis desarrolladas por Vygotsky sobre la construcción social de las funciones cognitivas tienen hoy día una repercusión importante en la psicología del desarrollo. Igualmente, inspiran el campo de la educación por el papel relevante que atribuyen a la intervención del adulto en la progresión de los aprendizajes del estudiante.

Vygotsky inscribe la pregunta sobre el desarrollo cognitivo en una perspectiva a la vez histórica y cultural. La tesis de la internalización de las capacidades humanas insiste en el hecho de que, en el origen del desarrollo, los conocimientos que se van a adquirir son exteriores al individuo y están materializados en las obras humanas: la literatura, las obras de arte, el lenguaje y demás sistemas semióticos de representación. El desarrollo cognitivo se concibe entonces como la apropiación, por parte del individuo, de las actividades humanas depositadas en el mundo de la cultura. El mundo social influye en el sujeto a través de otros sujetos, de los objetos socioculturales, de las prácticas que han sido creadas por generaciones anteriores. Dos componentes tienen un papel primordial en este proceso: los sistemas semióticos de representación y la interacción social.

4.2. Los sistemas semióticos de representación

Para Vygotsky, el desarrollo de las funciones mentales superiores –la memoria, el lenguaje, la conciencia – sólo es posible a través de los sistemas semióticos, por ejemplo, la escritura, los números, el habla. Verdaderos instrumentos de la construcción psicológica, los sistemas de signos tienen, en el tratamiento del conocimiento, un papel análogo al de las herramientas técnicas en la manipulación del mundo físico. En la perspectiva Vygotskyana, el aprendizaje de los sistemas de signos es una apuesta capital del desarrollo individual. El papel de los signos es fundamental, en la medida en que hacen posible la “duplicación” interna del mundo. Es necesario el recurso de un sistema semiótico de representación (el lenguaje natural es el ejemplo

prototípico) para pensar en las representaciones mentales de la persona. Las representaciones mentales, pues, no son independientes de la asistencia de un sistema de representación externa. Tampoco es posible la comunicación sin dichos sistemas. Tomemos como ejemplo típico la escritura, cuya apropiación y dominio no sólo permite expresar el pensamiento sino, sobretodo, organizarlo y regularlo.

4.3. De lo inter-individual a lo intra-individual

Vygotsky subraya que las actividades llevadas a cabo bajo la tutela del adulto son las que, en primer lugar, permiten los aprendizajes del niño. Los individuos progresan por apropiación de la cultura en las interacciones sociales. El descubrimiento del entorno, la acción sobre los objetos, pero también y sobretodo, la apropiación de los sistemas semióticos dependen de la mediación del otro. También las interacciones con los pares más competentes, lejos de frenar el desarrollo de un pensamiento autónomo, le son necesarias.

Para el conjunto de estas dimensiones, el desarrollo cognitivo resulta de una doble formación: primero externa y después interna, en un movimiento que va de lo social a lo individual. Las capacidades del niño se manifiestan primero en una relación inter-individual donde el entorno social asegura la tutela sobre el niño descrita por Bruner (1983) como “un proceso de asistencia o de colaboración entre el niño y el adulto”. La detonación y el control individual (autorregulación) de las actividades sólo aparecen en un segundo tiempo, como resultado de un proceso de internalización favorecido por la repetición de las interacciones sociales. Así, “cada función aparece dos veces en el desarrollo cultural del niño [...]: primero entre individuos (inter-psicológico) y, después, dentro del niño (intra-psicológico)” (Vygotsky, 1986)

El lenguaje es el instrumento psicológico de primer orden que ocupa un lugar de privilegio en este esquema de desarrollo. Las primeras conductas y formas lingüísticas surgen y se desarrollan en el marco de situaciones iniciales de comunicación del niño con su entorno. Por medio de la interacción con los otros, el lenguaje cumple una función externa, que será progresivamente perfeccionada. Por ejemplo, en el desarrollo de los niños, el lenguaje exterior es internalizado transformándose entonces en lenguaje llamado *egocéntrico*. De este modo, se convierte para el niño en un modo de organizar sus propias acciones sobre el mundo. A medida que evoluciona el lenguaje internalizado, se va tornando una herramienta intelectual, un instrumento de planificación y de regulación de las actividades mentales.

La naturaleza del lenguaje egocéntrico en el desarrollo es un punto de divergencia entre Piaget y Vygotsky: para Piaget, es un signo de inmadurez destinado a evolucionar; para Vygotsky, es el instrumento de pensamiento destinado a progresar. Deben mencionarse, empero, los comentarios de Piaget en respuesta a las críticas de Vygotsky (véase la nota a pie de página, pp. 214-215, en Vygotsky, 1986), en los cuales modifica sus posiciones originales de la década de los veinte, expuestas en su obra *El Lenguaje y el Pensamiento en el Niño*, de 1923.

4.4. Desarrollo cognitivo y educación

El acercamiento Vygotskyano invierte el orden de las relaciones entre desarrollo, aprendizaje y educación, propuesto por Piaget. En la concepción piagetiana, las capacidades de aprendizaje dependen del nivel de desarrollo del individuo. En otras palabras, el desarrollo cognitivo condiciona las capacidades de aprendizaje. Vygotsky sostiene, por su parte, la causalidad inversa: “La característica predominante de nuestra hipótesis es la noción que los procesos de desarrollo no coinciden con los de aprendizaje sino que siguen a estos últimos” (Vygotsky, 1986).

En la edad escolar, los aprendizajes de orden superior, forman la substancia del desarrollo cognitivo. Este último es una consecuencia tributaria de los aportes de la enseñanza: el desarrollo en la edad escolar sólo es posible gracias a la enseñanza, las funciones psíquicas sólo pueden desarrollarse gracias a ella. A partir de aquí, la atención a las necesidades del niño debe identificarse con la satisfacción de sus necesidades cognitivas. En esta lógica, Schneuwly (1995) traza tres líneas directrices para la enseñanza escolar: la ruptura con la experiencia común del sujeto; la descontextualización de los contenidos y la diferenciación de las disciplinas. Por una parte, sólo las situaciones de ruptura con la experiencia cotidiana pueden dar las condiciones de acceso a las formas superiores del saber y del saber-hacer; por otra parte, la generalización de las nociones y su descontextualización sólo pueden ser verdaderamente aprendidas dentro del marco de las disciplinas formales que organizan los conocimientos en sistemas lógicos.

Son los procesos de ruptura con la experiencia cotidiana y los procesos de descontextualización los que aseguran el acceso a los conceptos científicos. En la manipulación cotidiana de los objetos, el niño construye nociones sobre el mundo, los conceptos llamados espontáneos reflejan un conocimiento concreto, una práctica ateórica, con validez sólo local. La actividad escolar, en el marco de las disciplinas, permite al alumno la construcción de los conceptos científicos y su manipulación teórica.

4.5. La zona de desarrollo próximo

Considerar que el aprendizaje es la condición del desarrollo no significa que cualquier aprendizaje es posible en cualquier momento. La tesis de Vygotsky significa sobre todo que las capacidades de aprendizaje de un niño no deben ser confundidas con el nivel cognitivo que tiene en un momento dado. En un dominio cualquiera, existe un espacio potencial de progreso en el que las capacidades individuales pueden ser sobrepasadas si se reúnen ciertas condiciones. La asistencia del otro es una de estas condiciones. Este potencial de aprendizaje que se actualiza en la interacción social, define uno de los conceptos centrales de la teoría de Vygotsky: *la zona de desarrollo próximo*. La zona de desarrollo próximo es una componente crucial del proceso de desarrollo porque “presagia” y prepara lo que el niño más tarde realizará por sí solo: “lo que un niño puede hacer hoy en colaboración con otro, lo podrá hacer solo mañana” (Vygotsky, 1986). El aprendizaje antecede al desarrollo: la zona de desarrollo próximo asegura la vinculación entre ambos.

Favorecer las adquisiciones en el niño significa para el adulto llevar a cabo una transición de la actividad tutelar (o de conducción externa) a la actividad autónoma (de auto-conducción). Para hacer esto, debe ajustar los contenidos y las condiciones de instrucción, no a las capacidades

actuales del niño, sino a su potencial de progreso. Así, para el conjunto de las adquisiciones, el adulto (en particular, el maestro) tiene la tarea compleja de trabajar sobre la base de la experiencia y de las posibilidades del niño. Relacionadas con la enseñanza escolar, estas orientaciones designan las interacciones maestro–alumno como el eje esencial de la organización pedagógica del aula.

4.6. Preguntas para la Educación

La tesis Vygotskyana tiene el interés principal de considerar la intervención social como el factor predominante del progreso cognitivo. Es necesario medir las implicaciones de tal posición para la educación escolar. La organización sociocognitiva de las situaciones escolares es una de las preocupaciones centrales de los autores que se inspiran hoy en Vygotsky e intentan prolongar sus tesis. Por ejemplo, para autores como Wertsch (1993) y Cole (1999), la psicología cultural tiene entre sus ejes articuladores el que las personas son agentes activos pero actúan en contextos que no son siempre de su elección –como la escuela, por ejemplo.

Los investigadores tienen la tarea de comprender cómo se articulan las dinámicas sociales e individuales en el desarrollo cognitivo. Particularmente, en relación a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje en el aula, hay dos temas que merecen particular atención. El primero es la interacción tutelar maestro–alumno(s), situación de enseñanza y aprendizaje muy difícil de operacionalizar. Los ejemplos suministrados por la orientación de los aprendizajes iniciales del niño pequeño en el ambiente familiar se pueden transponer sólo parcialmente al aula; las modalidades de organización de la tutela escolar requieren de investigaciones específicas en profundidad. El segundo tema que es necesario estudiar en detalle es el de la zona de desarrollo próximo como “espacio de intervención didáctica”. La evaluación del potencial de aprendizaje del alumno, es decir, la estimación del progreso del que es capaz en una situación tutorial, es una de las dimensiones críticas de la puesta en funcionamiento escolar de esta noción.

La influencia del contexto escolar sobre los desempeños cognitivos del alumno ha sido analizada, en el pasado reciente, sólo en función de las condiciones de trabajo del alumno. Hoy en día, la atención se dirige hacia las características sociales de las situaciones escolares y hacia los significados que tienen estas situaciones para el alumno. Los trabajos de la psicología social de la cognición proponen un análisis relevante de esta problemática.

La actividad cognitiva no depende sólo de las propiedades intrínsecas del objeto de conocimiento, sino también de las condiciones sociales en las que tiene lugar. Pero la dimensión epistémica y la dimensión social no están desvinculadas: los objetos de nuestros aprendizajes siempre están social y culturalmente definidos. Se aprende en contextos sociales en donde no hay “objetos intrínsecos”, sino objetos que tienen funciones y significaciones atribuidas por la sociedad. Además, la cognición necesita un fuerte soporte de los instrumentos de representación y mediación, como lo son el lenguaje natural y los sistemas semióticos de representación. Desde esta perspectiva, hay que ampliar la noción de cognición y no verla tan sólo como “algo que ocurre en la cabeza del individuo” sino como algo que tiene una indudable connotación sociocultural. La cognición de un individuo se articula dialécticamente con la cognición de los demás, dando lugar a aquello que podemos llamar la *mentalidad* de una sociedad.

5. LAS INTERACCIONES COGNITIVAS EN EL APRENDIZAJE ESCOLAR

Las teorías seminales de Piaget y Vygotsky han dado lugar a una serie de variantes teóricas, ya clásicas, que buscan resolver las insuficiencias de los acercamientos iniciales para explicar, sobretodo, los procesos escolares.

La influencia benéfica de las interacciones sociales para las adquisiciones cognitivas ha sido demostrada experimentalmente por las corrientes de la psicología social del desarrollo cognitivo. El aporte principal de este punto de vista, es haber puesto en primer plano el papel que tiene el conflicto cognitivo para la construcción del conocimiento. En el plano de la educación escolar, la demostración de la efectividad de las confrontaciones entre los alumnos abre perspectivas de gran interés didáctico.

5.1. El conflicto sociocognitivo

El acercamiento social del desarrollo cognitivo considera las interacciones sociales como centrales para las adquisiciones cognitivas. En ciertos momentos claves para el desarrollo, se sostiene, las adquisiciones encuentran su origen principalmente en la confrontación de las acciones o de las ideas entre personas. Las adquisiciones engendradas socialmente en las interacciones, serán interiorizadas para su posterior movilización individual (de lo inter a lo intra-individual).

Los estudios experimentales realizados en este marco teórico (por ejemplo, los trabajos de Perret-Clermont, 1996) han mostrado que, para alcanzar el progreso cognitivo, las interacciones sociales deben dar lugar al conflicto sociocognitivo. Ante una situación-problema por resolver, los participantes en una interacción deben, por una parte, presentar diferentes centraciones cognitivas (puntos de vista, métodos, respuestas,...) y, por otra parte, buscar una respuesta común al problema. La oposición social de puntos de vista caracteriza al conflicto sociocognitivo y es el pivote de la interacción.

El conflicto sociocognitivo integra dos conflictos:

- a) Por una parte, un conflicto inter-individual (y por lo tanto social) generado por la oposición de respuestas al problema planteado, y por otra parte,
- b) Un conflicto intra-individual, de naturaleza cognitiva, resultante de la toma de conciencia por el individuo de una respuesta contradictoria, que le incita a dudar de la suya.

La dimensión social del conflicto es fundamental. La expresión y la confrontación directa de los argumentos en la interacción social vuelven más tangible y más dinámico al conflicto cognitivo intra-individual. Adicionalmente, la superación del desequilibrio cognitivo intra-individual, probablemente se facilita por la búsqueda de una respuesta común que resuelva el conflicto interindividual. En suma, el conflicto sociocognitivo favorece la actividad cognitiva.

Las condiciones del conflicto sociocognitivo

Para que el conflicto sociocognitivo sea eficaz y dé lugar a progresos individuales, su funcionamiento debe cumplir otras condiciones además de la heterogeneidad inicial de respuestas y la coordinación final de los participantes. Las investigaciones han puesto en evidencia la importancia de dos grupos de restricciones, uno relacionado con las capacidades individuales de los protagonistas, y el otro con el desarrollo de la interacción.

En cuanto a las capacidades individuales, el conflicto sociocognitivo sólo puede ser fuente de progreso a partir del momento en el cual se dispone de capacidades mínimas, unas de orden cognitivo, necesarias para tomar conciencia de las diferentes respuestas y para establecer la naturaleza de la contradicción; y otras de orden sociocognitivo que le permitan insertarse en una interacción sociocognitiva.

El conflicto sociocognitivo no implica, como solución, la adopción mimética o complaciente de un punto de vista diferente. La interacción debe dar lugar a un compromiso activo de cada uno de los participantes en la confrontación de argumentos y su coordinación en una respuesta única. La negociación debe desarrollarse bajo la forma de intercambios que permita una co-elaboración real de la respuesta final. Ciertas modalidades relacionales pueden obstaculizar la expresión del conflicto sociocognitivo y su efectividad: trabas en la comunicación, acuerdos por complacencia o por sumisión, etc. Estas formas de regulación del intercambio reducen la confrontación interindividual y resultan ineficaces. De ahí la importancia de organizar las interacciones de acuerdo a una relación de simetría entre los participantes, es decir, sobre la base de una igualdad de roles en los intercambios, una disposición que puede ser difícil de obtener cuando hay algún participante muy aventajado. En este último caso, se produce una colonización del universo mental del estudiante menos aventajado a manos del más aventajado.

En suma, si la heterogeneidad de respuestas de los participantes es una condición ineludible para la instalación de un conflicto sociocognitivo, ésta no garantiza su efectividad. En el marco experimental, algunas veces el adulto se ve obligado a intervenir para suscitar una dinámica de conflicto, hacer explícitas las oposiciones, impulsar los intercambios, etc. Es decir, la existencia de un conflicto no genera automáticamente la dinámica que conduce a su superación.

Los progresos cognitivos

Cuando se satisfacen las condiciones de desarrollo de un conflicto sociocognitivo, las interacciones entre los alumnos permiten a cada uno de los participantes progresar más allá que los sujetos del mismo nivel inicial que actúan solos. Los efectos de la interacción se ponen de manifiesto en el progreso individual y no en la mejoría en la actuación colectiva, que podría buscarse en ciertas situaciones de trabajo en grupo. La solidez de los progresos se aprecia en función de tres criterios:

- a) la generalización de la adquisición de nociones similares
- b) la estabilidad de la adquisición en el tiempo

- c) el perfeccionamiento de los argumentos y de las justificaciones (la producción de argumentos nuevos representa un progreso cognitivo auténtico).

5.2. Interacciones sociocognitivas simétricas

La utilización del término “interacciones simétricas” corresponde esencialmente a las situaciones cognitivas en donde los roles y estatus de los participantes se conciben de manera equitativa. La igualdad de los roles, sin embargo, no implica necesariamente que los individuos pongan en acción funcionamientos cognitivos similares.

La cooperación

Esta interacción es parecida al conflicto sociocognitivo por la semejanza de objetivos entre los participantes, pero se diferencia por la ausencia de conflicto en la interacción. La situación de cooperación se manifiesta como un factor de progreso si equivale a una combinación real de esfuerzos y no una simple yuxtaposición de acciones individuales. Si una interacción colaborativa parece a priori más fácil de lograr que una interacción con conflicto, alcanzar una colaboración auténtica, es decir una co-acción coordinada, concertada y no conflictiva, plantea a menudo serios problemas, tanto a niños como a adultos. La colaboración no se impone desde el exterior; es posible reducir las divergencias cognitivas o sociales, y hacer necesarias las estrategias colaborativas entre los participantes, en función de lo que está en juego y de la naturaleza de la tarea. En el marco escolar, la edad de los sujetos puede representar el obstáculo principal. Los estudios del desarrollo social del niño indican, en efecto, que habría que esperar el principio de la adolescencia para observar una predominancia de conductas colaborativas sobre las conductas egocéntricas.

El aprendizaje en grupo

De manera general, los resultados de las investigaciones favorecen la conclusión según la cual el trabajo colectivo es un factor de progreso cognitivo.

Sin embargo, en ciertas situaciones de co-acción, los aportes de cada uno de los miembros del grupo son menores que las de los sujetos cuando trabajan solos. Esto ocurre cuando en situaciones de cooperación, la acción colectiva corresponde a la adición de las contribuciones aisladas de los participantes. Con cierta frecuencia aparecen condiciones de orden social que son difíciles de trasladar a los contextos escolarizados tradicionales. En el plano cognitivo, por ejemplo, son raras las nociones que pueden provocar una oposición de puntos de vista. Esto se debe, en parte, a los estrictos controles que se ejercen durante el desarrollo de las actividades consideradas como “educativas”. Enfatizamos que esto, más que una limitación del enfoque articulado alrededor de la presencia de un conflicto cognitivo, es resultado de la inercia del sistema educativo más tradicional, que no favorece la discrepancia (véanse por ejemplo los estudios realizados por Cobb y Yackel, PME Brasil 199x, sobre las normas “sociomatemáticas” del salón de clase).

En suma, si bien numerosos resultados revelan el interés del trabajo colectivo para mejorar las competencias cognitivas individuales, no hay que idealizar su papel y sus efectos en el contexto escolar cotidiano, por lo menos mientras estos contextos no sufran modificaciones de fondo. Sería ilusorio, en las actuales condiciones, considerar que el simple hecho de “poner a trabajar” juntos a los alumnos garantiza automáticamente un progreso, si no se modifican sustancialmente las relaciones y los acuerdos de trabajo en el salón de clases.

Los límites de la eficacia del trabajo en grupo no deben alejar al maestro del interés que ofrece el tratamiento social de los conocimientos y de las tareas escolares. La organización de situaciones tutoriales puede permitir a los alumnos poco aventajados, beneficiarse del trabajo con los alumnos más avanzados. Dado el interés de los maestros por el trabajo en grupo, es deseable tener mayor investigación sobre el tema, que retome los estudios psicológicos, para trazar los marcos de adecuación de las interacciones sociocognitivas en el aula. Estas investigaciones son tanto más necesarias cuanto que una orientación sociocognitiva de la enseñanza implica una evolución bastante radical del modo de aproximarse al alumno y de la concepción de la clase.

5.3. Las interacciones sociocognitivas asimétricas

A diferencia de las anteriores, las interacciones asimétricas corresponden a circunstancias cognitivas en donde se pone el énfasis en la imitación o la tutela que reproduce una situación experto-novicio o maestro-aprendiz. Este tipo de situaciones están ancladas en el concepto vygotskyano de zona de desarrollo próximo.

La interacción tutorial

Este tipo de interacción se caracteriza por una asimetría del estatus y de los roles entre los participantes: un tutor (el experto) se encuentra en interacción sociocognitiva con un aprendiz (el novicio) para ayudarlo a realizar una tarea o a adquirir una noción. Las diferencias en el saber y en el poder entre los participantes puede ser de una importancia variable. Así por ejemplo, en una interacción entre alumnos, los participantes pueden provenir de niveles escolares sucesivos o muy alejados.

Las situaciones tutoriales reúnen procesos de transmisión y de adquisición de saber y de saber-hacer. Si bien el objetivo prioritario de esta interacción es el “efecto novicio”, es decir el progreso del aprendiz, un beneficio secundario que se alcanza es el “efecto tutor”, es decir un mejoramiento de las capacidades cognitivas del tutor. Los progresos del tutor se explican por la movilización de procesos cognitivos subyacentes a actividades sociocognitivas (de interacción con el aprendiz) y metacognitivas (explicaciones, reformulaciones) requeridas por una situación tutorial.

5.4. La teoría de las situaciones didácticas

Con una clara influencia piagetiana, G. Brousseau (1986) desarrolló una teoría del aprendizaje matemático fuertemente anclada en los contenidos y la estructura lógica de la matemática, pero

que recoge algunas de las características de los acercamientos interaccionistas mencionados arriba.

Para Brousseau, desde la concepción más general de la enseñanza, el saber es una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas. Sobre esta base, el énfasis del acercamiento radica en la identificación y el diseño de las “buenas preguntas” que generen los conflictos cognitivos y sociocognitivos detonadores del aprendizaje; estas “buenas preguntas” constituyen las *situaciones didácticas*.

La teoría de las situaciones didácticas pone al profesor en una interacción asimétrica con respecto a los estudiantes puesto que es él quien conoce los propósitos y efectos didácticos de la situación presentada. Sin embargo, en el desarrollo de la actividad cognitiva, los participantes desarrollan una interacción simétrica en la búsqueda de soluciones a la situación planteada.

La teoría se completa con un estudio minucioso de los distintos factores que determinan el sistema educativo en su conjunto: el obstáculo didáctico, la situación-problema, el contrato didáctico, las paradojas de la interacción didáctica, la situación adidáctica, etc.

La situación problema

La situación-problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas. Definida como una situación didáctica fundamental, pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el alumno debe aprender. La situación-problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:

- a) Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
- b) Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.
- c) Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores
- d) Debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones
- e) Debe contener su propia validación.

La resolución de la situación-problema supone una serie de interacciones simétricas entre estudiantes y de interacciones asimétricas entre los estudiantes y el profesor, pero también supone la superación de un conflicto cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación planteada.

6. COGNICIÓN Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Es difícil analizar, por su profusión, todas las corrientes teóricas sobre el aprendizaje que han tomado cuerpo en la educación matemática; describiremos someramente algunas de las más significativas.

6.1. La Mediación Instrumental

La especie humana elabora herramientas con propósitos deliberados. Mediante la producción de herramientas hemos alterado nuestra estructura cognitiva y adquirido, por así decirlo, *nuevos órganos para la adaptación* al mundo exterior. Existen evidencias sólidas que muestran cómo, el desarrollo del cerebro en nuestra especie constituye una adquisición tardía, posterior al bipedalismo y en consonancia con el empleo de herramientas. A partir de la fabricación y empleo de herramientas, el tamaño del cerebro se triplicó (Brunner 1995, p. 46). Puede decirse que el cambio más importante ocurrido al hombre durante el último medio millón de años ha sido *aloplástico*, es decir, ha sido un cambio producido por sus relaciones con sistemas externos de ejecución, herramientas materiales primero, y posteriormente signos y sistemas de representación orales y de registro escrito.

En la actualidad, las teorías de la cognición de mayor impacto en los contextos educativos, han reconocido la pertinencia del *principio de mediación instrumental* que podemos expresar de la siguiente manera: todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico.

En este principio (Wertsch, 1993) convergen tanto la naturaleza mediada de la actividad cognitiva, como la inevitabilidad de los recursos representacionales para el desarrollo de la cognición. No hay actividad cognitiva al margen de la actividad representacional.

La fuerza de este principio puede ilustrarse de diversos modos. Por ejemplo, en términos filogenéticos (desarrollo de la especie) se puede describir ampliamente toda la historia de construcción de instrumentos y utensilios en las culturas que solemos llamar primitivas; puede ilustrarse fehacientemente la inseparabilidad de la actividad cognitiva y el desarrollo de una forma de *tecnología*.

En términos más cercanos a nosotros, el desarrollo de las ciencias naturales y de las matemáticas constituye un escenario rico en ilustraciones del principio. Pensemos, por ejemplo, en el desarrollo de la biología. ¿Sería concebible en este momento imaginar el estado actual de estas disciplinas sin los recursos tecnológicos que se han desarrollado simultáneamente con sus cuerpos conceptuales? El microscopio no solamente es un instrumento que “ayuda” al patólogo experimental, digamos, sino que le da acceso a un nivel de estructuración de la realidad imposible de alcanzar sin dicho instrumento. Entonces, su acción cognitiva (la del patólogo, en nuestro

ejemplo) está mediada por el microscopio y el conocimiento producido está afectado de modo sustancial por el mencionado instrumento.

Conviene recalcar que el instrumento a que se refiere este principio, puede ser un instrumento material o simbólico.

En el caso de las matemáticas, la mediación se ha dado esencialmente a través de los sistemas semióticos de representación. La historia de dichos sistemas va exhibiendo las transformaciones conceptuales a que han dado lugar en el desarrollo de las matemáticas (Duval, 1998). El proceso de articulación entre el concepto matemático (el “objeto” matemático) y sus representaciones es un proceso de mutua constitución. Podría decirse que la evolución de los sistemas semióticos de representación, en el caso de las matemáticas, han pasado por diversas etapas entre las cuales vale la pena señalar la siguiente: la separación entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas. Hay entonces una predominancia de las representaciones semióticas en cuanto a las relaciones con el objeto. Por ejemplo, enfrentados al estudio de las rectas tangentes, los matemáticos del siglo XVII tuvieron que abandonar la idea de la recta tangente como ese objeto ideal que “sólo toca en un punto a la curva” ante los ejemplos de puntos de inflexión en los cuales la tangente atraviesa a la curva. Hubo que tomar una decisión entre el objeto mental (ideal) y lo que las representaciones algebraicas imponían como necesario. Otro momento significativo en el desarrollo de los sistemas de representación matemáticos, se da cuando se logra trabajar con las representaciones como si fueran el objeto. La manera de trabajar con los números reales mediante su sistema de representación decimal, es un ejemplo paradigmático de esta etapa.

Los sistemas de representación no cumplen tan solo una función de comunicación sino que también ofrecen un medio para el tratamiento de la información y son fuente de generación de significados.

6.2. La cognición situada

En los años recientes, la investigación en educación matemática ha tenido como uno de sus intereses principales demostrar que el aprendizaje y la práctica de las matemáticas no son actividades individuales, aisladas de los contextos socioculturales en los que tienen lugar. Que la enseñanza y el aprendizaje siempre han tenido lugar dentro de contextos sociales que no sólo tienen una influencia sino que determinan la naturaleza del conocimiento construido. Los estudios que se han organizado alrededor de estas ideas sobre la contextualidad del conocimiento y su importancia para los estudios del acto cognitivo se han denominado, genéricamente, estudios sobre la cognición situada.

Las investigaciones realizadas desde la perspectiva situada sostienen que los factores sociales y lingüísticos son básicos para el estudio de los procesos de aprendizaje. En particular del aprendizaje de las matemáticas.

Añadiremos que tales investigaciones han permitido llevar los estudios sobre la cognición a un ámbito más rico que el tradicional—que ha visto la cognición como un fenómeno que sólo involucra los procesos internos del sujeto.

Hemos pasado pues de concebir la cognición como un fenómeno íntimo del sujeto a verla como un producto eminentemente sociocultural.

6.3. Nuevos sistemas de representación

En la actualidad, los instrumentos computacionales (calculadoras algebraicas como la TI-92, las computadoras) encarnan sistemas de representación que presentan características novedosas: son sistemas ejecutables de representación, que virtualmente ejecutan funciones cognitivas que anteriormente eran privativas de los seres humanos. Por ejemplo, graficar una función. Es un proceso que el estudiante ve desplegándose en la pantalla de su calculadora, sin su intervención directa. Desde luego esto no convierte al estudiante en un “desempleado” pues ahora, su trabajo consiste más en interpretar matemáticamente los fenómenos nuevos que aparecen en la pantalla.

Estos nuevos sistemas de representación (ejecutables) permiten al estudiante trabajar un problema desde diferentes enfoques cognitivos, por ejemplo, tomar un punto de vista concreto al analizar una función (digamos el comportamiento de una función continua sin derivada) o un punto de vista general: en lugar de analizar el comportamiento de un polinomio puede analizarse el comportamiento de una familia de polinomios.

Esto quizá nos esté indicando que un cambio central dentro de la educación consistirá en abandonar el objetivo tradicional de fluidez algorítmica y sustituirlo por el objetivo de fluidez representacional. Esto es, que el estudiante pueda representar un problema en diversos sistemas de representación y sea capaz de interpretar los resultados del tratamiento que se dé a tales sistemas mediante el instrumento ejecutor del que disponga.

Los nuevos sistemas de representación hacen posible también un campo de experiencia que no estaba antes a disposición del estudiante.

Pensemos por ejemplo en los sensores (CBL, CBR) que pueden articularse a las calculadoras. El estudiante puede representar gráficamente fenómenos naturales como las variaciones de temperatura, de intensidad sonora etc. Es decir, todo un mundo de variación y cambio queda a su disposición como parte de su campo de experiencias. Estas nociones de variación y cambio no tienen que ser estudiadas de modo abstracto (en el sentido en que son extrañas a las experiencias del estudiante) sino que puede tejerse alrededor de ellas y con ellas, una red entre ideas y conceptos que dé como resultado una mayor familiaridad con este complejo conceptual.

Las matemáticas, como toda otra actividad intelectual, sufren la profunda influencia de las tecnologías existentes. Con el correr del tiempo, las tecnologías se tornan “invisibles” y las actividades que se generan a partir de ellas se conciben como actividades matemáticas independientes de aquella tecnología. Surge así, por ejemplo, la noción de una actividad matemática “pura”, al margen de su entorno sociocultural. En la escuela las destrezas con los cálculos logarítmicos se conciben como independientes de la herramienta y son “confundidos” con capacidades matemáticas puras. Como si el funcionamiento del sistema cognitivo fuera inmune a las herramientas *mediante* las cuales se despliega la actividad intelectual.

Los sistemas de representación clásicos (álgebra, cálculo, ecuaciones diferenciales etc.) tienen una característica central: son sistemas de representación diseñados para poder actuar sobre ellos mediante reglas de transformación bien definidas. Un caso elemental lo constituye la aritmética. Allí están claras las reglas mediante las cuales realizamos operaciones sobre los números. Son sistemas de representación contruidos para operar con ellos.

En cambio, las representaciones ejecutables necesitan la mediación de un procesador sintáctico, como es un lenguaje de programación. Allí se transforma el trabajo cognitivo del estudiante: la actividad de construcción de significados se torna central.

6.4. El significado de las situaciones escolares

Centradas en el funcionamiento interno del alumno o en el papel de las variables exteriores a la escuela, las investigaciones de psicología educativa han evitado, por mucho tiempo, la influencia de las variables intra-escolares.

Sin embargo, hoy día, bajo la influencia de la teoría de la *cognición situada*, se han realizado muchas investigaciones relativas a los significados que los alumnos dan a las situaciones escolares. Algunas investigaciones se han interesado en la influencia del prestigio social de la disciplina sobre los desempeños de los alumnos. Se pidió a los alumnos que reprodujeran una misma figura geométrica en un contexto de dibujo y en otro de geometría. Los resultados mostraron que los desempeños varían de acuerdo al soporte disciplinario. Mientras que en el contexto de un curso de dibujo alumnos buenos y malos obtienen resultados idénticos, en el marco mejor valorado de un curso de geometría, los buenos alumnos tienen mejores resultados. Los buenos alumnos prestan mayor atención a la tarea cuando se ubica en un contexto más elevado. El significado atribuido por los alumnos a la situación escolar interviene como regulador de su funcionamiento cognitivo.

La *cognición situada* defiende la idea según la cual las conductas cognitivas de un individuo no podrían comprenderse sin tomar en cuenta el entorno en el cual interviene. Los ejemplos anteriores pueden conducir a reconsiderar la interpretación de las dificultades que se encuentran en ciertos alumnos. Un alumno en dificultades no es necesariamente un individuo cuyas capacidades son insuficientes; por el contrario, es quizás un alumno que no percibe el sentido del trabajo escolar o que atribuye a la escuela, a la tarea, o a las expectativas del profesor, otros significados diferentes a los valorados por la institución. El concepto de *claridad cognitiva*, por ejemplo, se ha propuesto en el dominio de la lectura para señalar qué tan importante para el logro del aprendizaje es que los alumnos comprendan la finalidad de las situaciones y de las tareas que les son propuestas. La disonancia entre las expectativas de la escuela y las del alumno puede ser una de las expresiones de la distancia cultural entre el alumno y la escuela, noción lanzada por los sociólogos para dar cuenta de las dificultades que tienen alumnos normales provenientes de medios sociales desfavorecidos. Si se sigue esta tesis, se debería dar la mayor atención a la clarificación de los contextos escolares y, particularmente, a la naturaleza de los acuerdos implícitos y explícitos entre maestro y alumnos.

6.5. A modo de síntesis: el aprendizaje como un fenómeno individual y social

A grandes rasgos, los enfoques sobre el aprendizaje se pueden ubicar entre los acercamientos cognitivos que parten del constructivismo piagetiano y los acercamientos socioculturales desarrollados a partir de la obra de Vygotsky. Si bien ambos aceptan, al menos implícitamente, la existencia de procesos intra-individuales y de influencias sociales, difieren considerablemente en la importancia que cada uno atribuye a estas dimensiones en el desarrollo de los conocimientos y del aprendizaje.

Los acercamientos socioconstructivistas atribuyen a las intervenciones sociales un papel preponderante en el desarrollo cognitivo del niño y cuestionan las explicaciones intra-individuales del desarrollo. Un nivel de análisis estrictamente intra-individual se muestra insuficiente para dar cuenta de adquisiciones y de desempeños cognitivos. Ciertamente, todo aprendiz es un sujeto confrontado individualmente a un cierto número de tareas pero, la mayoría de ellas comprende conocimientos que son fruto de una intervención social. Centrados en el análisis del funcionamiento cognitivo en un contexto social, los acercamientos sociocognitivos pueden parecer más apropiados para la comprensión de los fenómenos educativos.

Por otro lado, el aprendizaje es también una relación entre un sujeto y un objeto o una tarea. De ahí que para comprender el aprendizaje, hace falta también estudiar los mecanismos que el individuo pone en marcha y con ello, ocuparse de las componentes y restricciones del sistema cognitivo. En este nivel interviene la psicología cognitiva para situar las bases del aprendizaje en el tratamiento cognitivo de la información, los procedimientos, las estrategias y los conocimientos del individuo.

En definitiva, el campo de la psicología del aprendizaje está dividido en acercamientos complementarios, no incompatibles. El aprendizaje puede entenderse, al mismo tiempo, como un fenómeno individual y social. El desafío para la psicología es explicar la articulación de los procesos de adquisición individuales y socioculturales. En el plano de la educación, es razonable pensar que la combinación de situaciones individuales y de interacción social puede ofrecer las condiciones de aprendizaje más favorables si toma en cuenta tanto los estilos cognitivos de los estudiantes como la naturaleza de las relaciones que se establezcan entre ellos.

7. MATEMÁTICAS Y COGNICIÓN: UNA VISIÓN CLÁSICA E INFORMÁTICA

La enseñanza tradicional induce en los estudiantes, la idea de que las matemáticas están referidas a un conjunto de expresiones simbólicas desprovistas de conexión con cualquier fragmento de su conocimiento. La consecuencia natural de esta idea es que el conocimiento matemático se reduce a un conjunto de destrezas para manipular símbolos que, a su vez, permiten la transformación de una expresión simbólica en otra. Y eso es todo. Desde luego, esta es una concepción muy pobre de las matemáticas, que hay que modificar a través de los procesos educativos. Nos proponemos mostrar cómo un entorno computacional puede servir como principio orientador para lograr las modificaciones deseadas en relación a las concepciones matemáticas de los estudiantes.

7.1. Generalización y Contextualidad

Los procesos psicológicos básicos característicos de las matemáticas (por ejemplo, la abstracción, la generalización y la inferencia) son universales, comunes a toda la humanidad. Pero, su organización funcional puede variar sustancialmente dependiendo del entorno sociocultural, de las herramientas que suministra este entorno como mediadores de la acción cognitiva. No olvidemos que la acción cognitiva necesita del soporte instrumental.

La enseñanza de las matemáticas nos plantea un problema delicado:

¿cómo tratar con la naturaleza descontextualizada de las proposiciones matemáticas que forman parte de una cultura matemática universal y, al mismo tiempo, con la necesidad de admitir que el conocimiento que un estudiante construye, produce, asimila, se da siempre mediado por un contexto?

La tradición científica ha mostrado que al avanzar en la organización de una ciencia, las proposiciones del cuerpo teórico que se va produciendo tienen como rasgo característico el de ser enunciados generales, descontextualizados. Basta recordar algunos ejemplos: la ley universal de la gravitación, en la física; el teorema de Pitágoras; la fórmula general para resolver cualquier ecuación de segundo grado etc. Esto se vincula de modo íntimo (Duval, 1998) con la evolución de los sistemas semióticos de representación que se estén empleando.

En la introducción de sus *Fundamentos de la Geometría (1899)*, Hilbert fue muy claro al decir que el significado de los puntos, de las líneas y de los planos es algo que está determinado por las *relaciones* que podemos establecer entre ellos. De esta manera, los postulados de la geometría pueden interpretarse como *definiciones implícitas* de los objetos geométricos. Este punto de vista ha tenido, y sigue teniendo, un éxito enorme en el desarrollo de las matemáticas.

Desde el punto de vista educativo, las dificultades surgen cuando identificamos ese propósito de la matemática, con un principio didáctico. Es decir, cuando confundimos la matemática del matemático con las matemáticas escolares.

La demanda cognitiva que estaríamos haciendo a un estudiante, si de entrada lo enfrentamos al aprendizaje de la geometría, introduciendo la materia con un nivel de formalización elevado, es enorme. Estaríamos suponiendo (aunque de esto no fuésemos conscientes) que la cognición del estudiante se adapta de modo natural, al camino ya organizado de una disciplina. Esto ha sido una tentación permanente pues, de ser factible, representaría un ahorro considerable de esfuerzo: los problemas curriculares, por ejemplo, estarían resueltos a través de la formalización de la matemática.

Pensemos en las circunstancias del aprendizaje en un salón de clases. Para los estudiantes es un obstáculo poder pasar de los dibujos de triángulos particulares a *el triángulo* como objeto geométrico al cual se refieren los teoremas de la geometría. Si la enseñanza de las matemática pretende partir de los enunciados generales, entonces ¿cómo *inyectar* significado en estos enunciados generales, para beneficio de los estudiantes?

La experiencia ha mostrado que el camino de lo general a lo particular está plagado de dificultades. Pero tampoco es posible acceder a los enunciados generales, a los conceptos de una ciencia siguiendo un camino estrictamente inductivo. La construcción del conocimiento participa de ambos enfoques. A veces, se favorece un enfoque inductivo, heurístico, sobre todo cuando se inicia la exploración de un campo de investigación. Históricamente, el trabajo de Euler ha sido puesto como un ejemplo del papel que puede jugar un enfoque heurístico en el desarrollo del conocimiento matemático. Más recientemente, Lakatos (1976) en su célebre libro, *Conjetures and Refutations* (Conjeturas y Refutaciones), ha profundizado sobre la importancia esencial que juega este enfoque. En la didáctica de las matemáticas, estas consideraciones han dado lugar a un amplio campo de investigaciones sobre la resolución de problemas (Santos, L.M., 1997). Desde luego, la sistematización del conocimiento, en última instancia, queda puesta de manifiesto en las re-elaboraciones formales del campo. La didáctica tiene que respetar la epistemología de las matemáticas, es decir, tiene que tomar en cuenta los mecanismos de producción del conocimiento que siempre van a oscilar entre lo heurístico y lo formal, lo riguroso.

En resumen: porque la cognición tiene una naturaleza situada, la didáctica no puede elegir el camino de lo general a lo particular, en sentido estricto, como estrategia didáctica, y porque la ciencia no es resultado de un estricto proceso inductivo, tampoco puede adoptarse el camino de lo particular a lo general como estrategia didáctica. Entonces, ¿qué camino elegir? La construcción de una respuesta a este interrogante pasa por un análisis de lo particular y lo general, de lo concreto y lo abstracto. Iniciaremos la construcción de la respuesta en la siguiente sección.

7.2. Reflexión sobre la abstracción

La breve referencia al ideal formalista de Hilbert puede reformularse así: el significado de los enunciados y de los conceptos del cuerpo teórico, surge de las relaciones entre ellos y no ya de las relaciones entre un concepto, digamos, y la realidad que refleja. Sólo importa la lógica interna del sistema al margen de los significados “intuitivos” que podamos asociar a los términos.

La manera usual como entendemos la naturaleza abstracta de la matemática proviene de este enfoque. La didáctica tiene que hacer posible que los estudiantes puedan acceder a estos niveles de complejidad sin descuidar la naturaleza situada del conocimiento. La clave parece estar en

imaginar una forma de abstracción que esté más cerca de lo que ocurre realmente en términos cognitivos y que no contradiga, sino que complemente, la noción clásica de abstracción. La noción clásica incorpora la idea de extracción pero también la idea de re-organización a un nivel superior de aquello que ya se había aprendido.

Los significados extra-matemáticos de una situación se derivan de un escenario que incluye la experiencia previa de quien aprende. Entonces, los recursos que el medio pone a disposición de un estudiante estimulan la construcción de significados. El medio funciona como un soporte para el establecimiento de conexiones entre fragmentos de conocimiento. Desde esta perspectiva, se trata entonces de conectar el conocimiento informal del estudiante con sus fragmentos de conocimiento matemático. En un sentido que puede hacerse más preciso, el medio funciona como una especie de dominio de abstracción.

El trabajo de Carraher et al (1991), sobre las estrategias aritméticas de los oficios, muestra cómo lo general puede existir dentro de lo particular. Cómo las prácticas de las matemáticas de los oficios pueden servir para expresar relaciones matemáticas más generales. Esas relaciones matemáticas más generales que todavía dependen del medio de expresión empleado, son ejemplos de abstracciones situadas (Noss y Hoyles, 1996).

Utilizando los recursos estructurantes del medio, se abre la posibilidad de que puedan establecerse conexiones entre distintos fragmentos de conocimiento y así producir versiones más generales, objetos abstractos en el sentido clásico del término. Objetos que son síntesis de múltiples determinaciones. Para un topólogo, un espacio de Hausdorff, que evidentemente es abstracto, puede ser al mismo tiempo, tan concreto como una guayaba.

Lo abstracto y lo concreto no son, en consecuencia, propiedades del objeto de conocimiento sino de la relación que uno logra establecer con el objeto de conocimiento.

7.3. Los recursos computacionales en la educación

Cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que no es esa tecnología en sí misma el objeto central de nuestro interés sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología.

La importancia de las herramientas computacionales para la educación matemática está asociada a su capacidad para ofrecernos medios alternativos de expresión matemática. A su capacidad para ofrecer formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos.

Tomemos como ejemplo el universo virtual de la geometría dinámica (*Cabri*). Allí podemos transformar un triángulo en otro, mediante el desplazamiento (*dragging*) de la figura geométrica. Este acto, que puede parecer trivial, conlleva una gran potencialidad. Nos permite desplazarnos dentro de una familia de triángulos (virtuales) a la que pertenece el triángulo original, cerrando con ello la brecha entre un dibujo (representación estática de un triángulo) y el objeto geométrico *triángulo* compuesto por la familia de triángulos a los que se puede llegar mediante las deformaciones que permite el *Cabri*. Desde este punto de vista conviene pensar en un teorema como *una propiedad que no puede destruirse* mediante los desplazamientos del entorno. Esta

manera de concebir un teorema tiene una ventaja: favorece la conceptualización de un teorema como la expresión de una propiedad invariante bajo deformaciones dentro del entorno. Se abre un camino para las formas de argumentación, dentro del universo virtual del *Cabri*, y ello permite distinguir estas formas de argumentación de aquellas a las que estamos más o menos acostumbrados dentro de los entornos de papel y lápiz.

En el fondo, el problema educativo reside en cómo se construye el significado matemático. Los medios computacionales estimulan la dialéctica entre el proceso de dar sentido a las prácticas cotidianas mediante la organización y la matematización, por una parte y la comprensión de situaciones matemáticas mediante el recurso de darles sentido importándolas de una práctica extra-matemática. Podríamos decir que parte importante de la esencia del pensamiento matemático consiste en establecer conexiones entre distintos fragmentos de conocimiento.

Un medio computacional permite generar una especie de realidad (virtual) matemática. Trabajar en un medio computacional permite comprender cómo los recursos de ese medio estructuran la *exploración* y cómo los recursos expresivos del medio favorecen la *sistematización* (Noss y Hoyles, op. cit.).

Un medio computacional es un dominio de abstracción: allí el estudiante puede expresar la generalidad matemática pero en dependencia del medio aunque sus expresiones apuntan más allá, hacia las descripciones abstractas de las estructuras matemáticas. Se hace posible explorar ideas dentro de ámbitos particulares, concretos y manipulables pero que contienen la semilla de lo general, lo abstracto y lo virtual.

Los medios computacionales funcionan como *recursos estructurantes* de la exploración matemática de los estudiantes. Pueden generar ideas que se expresan a través del medio, que están íntimamente vinculadas al medio y articuladas a él. Es en ese sentido que el medio constituye un dominio de abstracción. Dentro de un dominio de abstracción es posible desencadenar una exploración sistemática y construir argumentos a favor de una proposición que si bien no constituyen una demostración formal, sí constituyen, en el interior del dominio de abstracción correspondiente, una argumentación para resultados *locales*, es decir, expresados en el lenguaje del medio y cuyo sentido proviene de él, aunque puedan tener un nivel de generalidad mayor. Estas argumentaciones las llamaremos *demostraciones situadas*. En cierta manera son argumentaciones que respetan la *ecología* del entorno que les da soporte expresivo.

Los estudiantes son capaces de articular los resultados de sus exploraciones de manera tal que éstos puedan ser llevados más allá del medio computacional o puedan dar lugar a nuevas versiones de un resultado que hacen clara la visibilidad del medio computacional.

Daremos ahora un ejemplo de ello: el caso de las funciones continuas sin derivadas. La serie de potencias,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$$

define una función continua sin derivadas. Este es un resultado clásico de Weierstrass. Graficando los polinomios correspondientes (haciendo variar n entre 0 y 5, después entre 0 y 7 etc.) el estudiante empieza a descubrir el grado de complejidad de la función, aunque sea sólo desde un punto de vista visual al apreciar cómo se va graficando sobre la pantalla de su

instrumento computacional. Haciendo uso del zoom que viene incorporado, por ejemplo a la calculadora TI-92, puede descubrirse más sobre la complejidad de la función y la imposibilidad de un plano de representación (la pantalla) cuya resolución es finita, para exhibir la gráfica *como es en realidad*. De nuevo, aquí surge la posibilidad de enunciar una *versión virtual* del teorema. Es decir, un enunciado situado, que tome en consideración la naturaleza del medio expresivo que estamos empleando. Los recursos estructurantes que suministra el medio contribuyen al proceso de construcción de significado para este resultado fundamental de la teoría del cálculo.

Es innecesario decir que para obtener los mayores beneficios de estos ejemplos, es fundamental tener a mano una calculadora como la TI-92 con el propósito de ir comprobando las afirmaciones hechas sobre la fenomenología del entorno informático dentro del cual se trabaja.

A modo de conclusión

Para terminar, nos parece pertinente intentar una síntesis de las ideas centrales y de sus intenciones, que hemos discutido en el cuerpo principal del texto precedente. Todo el trabajo desarrollado en el campo de la educación matemática, durante las últimas décadas, ha conducido a la consolidación de una disciplina en la cual pueden distinguirse con nitidez un cuerpo teórico y una práctica orientada por los resultados de la investigación. Esta práctica es lo que muchos investigadores denominan una *ingeniería*.

El cuerpo teórico de este campo de investigación, inició su articulación observando al fenómeno educativo desde la perspectiva de la cognición. La didáctica ha ido poniendo a prueba las diversas teorías de la cognición, con el propósito, desde luego, de generar explicaciones a los resultados que produce el trabajo de campo. Esto se ha hecho partiendo desde las teorías más simples del conductismo, pasando luego por la psicología genética de Piaget y su escuela de Ginebra, hasta las teorías socioculturales que ya no ven la cognición como “algo que ocurre en el cráneo” de las personas y que, de allí, se proyecta hacia su entorno social sino, mas bien, como algo *distribuido* socialmente. Esto último puede ilustrarse mediante la observación: uno aprende cosas de un tema cuando lo estudia en medio de una comunidad de expertos en ese tema.

La presencia de los instrumentos de computación, computadoras (ordenadores) y calculadoras de todo tipo, en los sistemas educativos, ha traído al primer plano, para la investigación en didáctica de las matemáticas, la noción de mediación instrumental. El estudiante establece una sociedad cognitiva con la máquina, como antes la ha establecido con la escritura y con el sistema decimal. Esta es una idea de la mayor importancia.

De esta mirada sobre el fenómeno educativo, esperamos extraer, mediante la investigación, suficiente información que permita la transformación de los sistemas educativos de cara a los nuevos tiempos que ya están entre nosotros.

REFERENCIAS

- Brousseau, G** (1986): *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Tesis, Universidad de Bordeaux I.
- Bruner, J.** (1983) *Child's talk: Learning to use language*. Oxford: oxford University Press
- Brunner, J.** (1995). *Desarrollo Cognitivo y Educación*. Madrid: Ediciones Morata.
- Carraher, T. Carraher, D.& Schliemann, A** (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI.
- Cole, M.** (1999). *Psicología Cultural*. México: Alianza Universidad.
- Duval, R.** (1998). "Signe et Object (I)" en *Annales de Didactique et Science Cognitives*, 6, pp. 139-163, Estrasburgo: IREM.
- Lakatos, I.** (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge Univ. Press.
- Noss, R. y Hoyles, C.** (1996). *Windows on Mathematical Meanings*. Holanda: Kluwer.
- Perret-Clermont, A.N.** (1996): *La construction de la intelligence dans l'interaction sociale*, (1ª edición, 1979) Berna: P. Lang
- Piaget, J.** (1983). *El lenguaje y el pensamiento en el niño. Estudio sobre la lógica del niño (I)* (1a. edición 1923). B. Aires: Editorial Guadalupe.
- Santos, L.M.** (1997): *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Grupo Editorial IberoAmérica, México.
- Schneuwly, B.** (1995) "De l'importance de l'enseignement pour le développement: Vygotsky et l'école" en *Psychologie et Éducation*, n° 21, 1995
- Vygotsky, L.** (1986). *Pensamiento y Lenguaje*. Edición a cargo de A. Kozulin. México: Paidós.
- Wertsch, J.** (1993). *Voces de la mente*. Madrid: Visor Distribuciones
- Yackel, E. y Cobb, P.** (1995): *Classroom sociomathematical norms and intellectual autonomy*. En Meira,L.&Carraher,D. editores, PME-19, Brasil, Recife, pp. 264-271.