Esercizio sulla posizione reciproca tra retta e circonferenza

- Verificare che la retta di equazione 2x-y+7=0 è esterna alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-x+y=0$

Primo metodo.

Verifichiamo che il sistema formato dalle due equazioni della retta e della circonferenza non ha soluzioni: $\begin{cases} 2x-y+7=0 \\ x^2+y^2-x+y=0 \end{cases} \to \ \dots \to \begin{cases} y=2x+7 \\ 5x^2+29x+56=0 \end{cases}.$

L'equazione $5x^2+29x+56=0$, risolvente il sistema ha discriminante $\Delta=29^2-4\cdot5\cdot56=-279<0$.

L'equazione è impossibile e quindi anche il sistema è impossibile. La retta è perciò esterna alla circonferenza .

Vedi grafico

Secondo metodo.

Verifichiamo che la distanza tra il centro della circonferenza e la retta è maggiore del raggio. Dall'equazione $x^2+y^2-x+y=0$ si ricava che il centro della circonferenza è il punto C $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ e che il raggio è $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-0}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sim0.7.$

La distanza tra C $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ e la retta di equazione $2x-y+7=0$ è $d=\frac{\left|2\cdot\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+7\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{17}{\sqrt{5}}\sim3.8$

Poiché d>r, la retta è esterna alla circonferenza .

- Verificare che la retta di equazione 2x-y+5=0 è tangente alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-4y=0$ e determinare il punto di contatto.

Risolviamo il sistema formato dalle equazioni della retta e della circonferenza : $\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ x^2+y^2-2x-4y=0 \end{cases} \to$
$\dots \to \begin{cases} y=2x+5 \\ x^2-6x+9=0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1=x_2=3 \\ y_1=y_2=1 \end{cases}.$

Poiché il sistema ha due soluzioni coincidenti, la retta è tangente alla circonferenza e il punto di tangenza è il punto (3, 1).

OSSERVAZIONE : Per verificare che la retta è tangente alla circonferenza potevamo anche verificare che la distanza tra il centro e la retta è uguale al raggio (Primo metodo). in questo caso, però, essendo richiesto anche il punto di tangenza conviene risolvere il sistema formato dall'equazione della retta e della circonferenza e così dedurre che retta e circonferenza sono tangenti.

Vedi grafico

- Determinare i punti di intersezione tra la retta di equazione y=-2x+6 e la circonferenza di equazione $x^2+y^2+x+y-12=0$

I punti richiesti si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} y=-2x+6 \\ x^2+y^2+x+y-12=0 \end{cases} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} y=-2x+6 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases}$

L'equazione di secondo grado ammette un $\Delta > 0$ $\rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ y_1=2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=0 \end{cases}$

La retta quindi è secante la circonferenza nei punti (2,2) e (3,0)

Vedi grafico