Esercizio relativo al calcolo delle tangenti ad una circonferenza

- Scrivere le equazioni delle tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x+2y-18=0$ condotte dal punto P(1,5). Determinare poi i punti di contatto.

Dopo aver verificato, analiticamente oppure per via grafica (vedi grafico)che il punto P è esterno alla circonferenza, scriviamo l'equazione della generica retta passante per P (1,5):

$$y-5=m(x-1)$$

Per determinare i coefficienti angolari m delle due tangenti procediamo con uno dei due metodi.

Primo metodo

Poniamo a sistema l' equazione della retta per P(1,5) con l'equazione della circonferenza data : $\begin{cases} y-5=m(x-1) \\ x^2+y^2+2x+2y-18=0 \end{cases}$

Eliminando y tra le due equazioni otteniamo **l'equazione risolvente** del sistema, nell'incognita x: $(1+m^2)x^2-2(m^2-6m-1)x+m^2-12m+17=0$

Osserviamo che i coefficienti di tale equazione sono funzioni del parametro m. Affinché la retta per P sia tangente alla circonferenza questa equazione deve avere due soluzioni coincidenti, ossia il suo discriminante deve essere nullo: $\Delta=0$

Avremo così : $\Delta=0 \rightarrow \frac{\Delta}{4}=0 \rightarrow (m^2-6m-1)^2-(1+m^2)(m^2-12m+17)=0 \rightarrow 2m^2+3m-2=0 \rightarrow m_1=-2$ e $m_2=\frac{1}{2}$

Secondo metodo

La circonferenza data ha il centro C(-1, -1) e raggio $r=2\sqrt{5}$. La generica retta per P (1,5) ha la seguente equazione in forma implicita $mx-y+5-m=0$.

Affinché questa retta sia tangente alla circonferenza la distanza tra il centro ed essa deve essere uguale al raggio $r=2\sqrt{5}$. Applicando la formula della distanza tra un punto e una retta avremo:

$$\frac{|m(-1)-(-1)+5-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5} \rightarrow |6-2m|=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1} \rightarrow (|6-2m|)^2=\left(2\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}\right)^2 \rightarrow$$

$36-24m+4m^2=20m^2+20 \rightarrow 2m^2+3m-2=0 \rightarrow m_1=-2$ e $m_2=\frac{1}{2}$

Dopo aver calcolato con uno dei due metodi i coefficienti angolari delle due rette possiamo concludere che le equazioni delle rette tangenti sono: $y=-2x+7$ (prima tangente) e $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ (seconda tangente)

Determiniamo ora il punto di tangenza tra la circonferenza e la prima retta tangente risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y=-2x+7 \\ x^2+y^2+2x+2y-18=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=x_2=3 \\ y_1=y_2=1 \end{cases}$$

Il primo punto di tangenza è quindi di coordinate (3, 1)

Procedendo in modo analogo, potremo verificare che il punto di contatto tra la circonferenza e la seconda retta tangente è il punto di coordinate (-3, 3)