

Fascio generato da due circonferenze

Siano

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\gamma_2 : x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

due circonferenze che assumiamo come generatrici del fascio. nell'ipotesi che esse non siano concentriche ($a \neq a'$ e $b \neq b'$), sottraendo membro a membro le loro equazioni si ha l'equazione del loro asse radicale:

$$(a-a')x + (b-b')y + c - c' = 0$$

La combinazione lineare delle equazioni delle due generatrici è :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0 \quad (1)$$

con k un parametro reale.

La (1) è l'equazione del fascio di circonferenze generato da γ_1 e γ_2 .

Questa equazione può essere scritta nella forma

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (a'k+a)x + (b'k+b)y + c'k+c = 0$$

o per $k \neq -1$ nella forma canonica dell'equazione di una circonferenza

$$x^2 + y^2 + \frac{a'k+a}{k+1}x + \frac{b'k+b}{k+1}y + \frac{c'k+c}{k+1} = 0$$

- Se $k=0$ otteniamo la prima generatrice γ_1 . La seconda generatrice γ_2 , pur appartenendo al fascio, non si ottiene dalla (1) per alcun valore del parametro.
- Se nella (1) si pone $k = \frac{k_1}{k_2}$ e si scrive l'equazione nella forma

$$k_2(x^2 + y^2 + ax + by + c) + k_1(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

allora tale equazione rappresenta tutte le circonferenze del fascio, compresa la seconda generatrice ($k_1 \neq 0$ e $k_2 = 0$).

- Gli eventuali punti comuni alle due generatrici sono i **punti base del fascio**. L'asse radicale delle due generatrici, che esiste se esse non sono concentriche, è l'asse radicale del fascio. La sua equazione

$$(a-a')x + (b-b')y + c - c' = 0$$

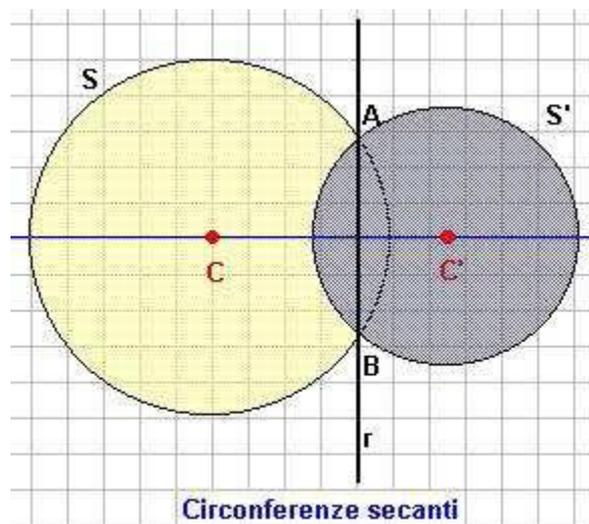
si ottiene dalla (1) per $k=-1$

OSSERVAZIONE: L'asse radicale di un fascio di circonferenze si può considerare una circonferenza degenerata del fascio, di raggio infinito.

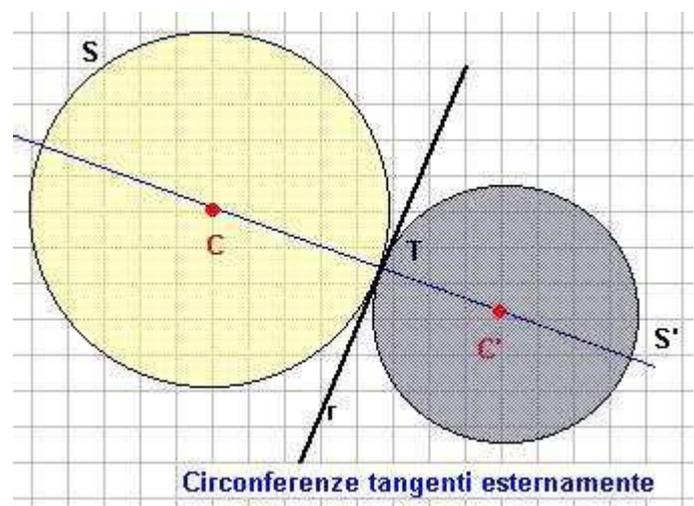
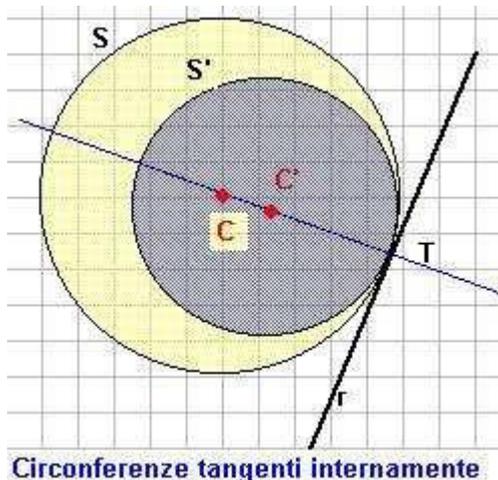
Caratteristiche di un fascio di circonferenze

Le caratteristiche di un fascio dipendono dalla posizione reciproca delle generatrici

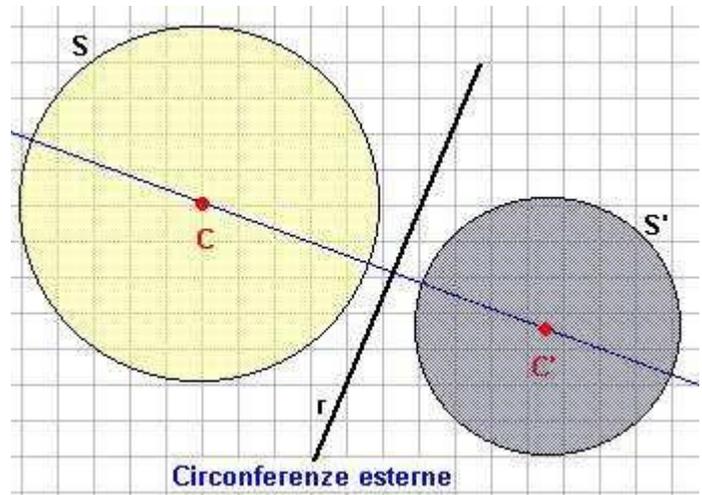
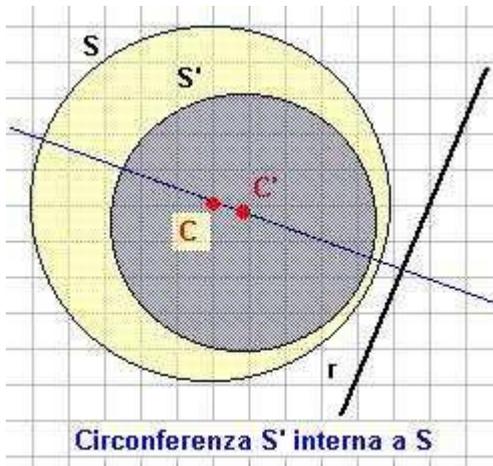
- Se le generatrici sono secanti e si intersecano in due punti A e B, allora tutte le circonferenze del fascio passano per i due punti base A e B (punti fissi) che appartengono all'asse radicale (circonferenza degenera).



- Se le generatrici sono tangenti in un punto T e se t è la tangente comune, allora tutte le circonferenze del fascio passano per l' **unico punto base T** (punto fisso, che è un punto base doppio) e sono tangenti in tale punto alla retta t, che è l'asse radicale del fascio. Il fascio contiene due circonferenze degeneri: l'asse radicale t del fascio e la circonferenza di raggio nullo degenera nel suo centro T.



- Se le generatrici non hanno punti comuni e non sono concentriche, il fascio non ha punti base e due qualsiasi circonferenze del fascio non hanno punti in comune. Il fascio contiene, come circonferenza degenera, l'asse radicale del fascio. Tale retta non interseca alcuna circonferenza del fascio.



- Se le generatrici sono concentriche, il fascio è costituito da circonferenze concentriche alle due generatrici, non contiene circonferenze degeneri e l'asse radicale non esiste

