Vérification des apprentissages

Après l'étude de ce chapitre, je suis en mesure de compléter le résumé suivant avant de résoudre les exercices récapitulatifs et les problèmes synthèses.

Matrices particulières

Une matrice A est une matrice

ligne si ______________________________

colonne si ______________________________.

nulle si ______________________________

carrée si ______________________________

rectangulaire______________________________

triangulaire supérieure______________________

triangulaire inférieure si____________________

diagonale si______________________________ .

scalaire si ______________________________ .

identité si ______________________________.

symétrique si ______________________________.

antisymétrique si ______________________________.

idempotente si ______________________________.

nilpotente si______________________________.

La diagonale principale d'une matrice carrée est ______________________________.
La diagonale secondaire d'une matrice carrée est ______________________________.
La trace d'une matrice carrée est______________________________.

Egalité de deux matrices

Deux matrices $A_{m\,x\,n}$ et $B_{p\,x\,q}$ sont égales si et seulement si

1) ______________________________.

2) ______________________________.

Addition de matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire .

Soit $A_{m\,x\,n}$ et $B_{m\,x\,n}$ deux matrices, on a :

$A_{m\,x\,n} + B_{m\,xn} = [a_{ij}]_{m\,x\,n} + [b_{ij}]_{m\,x\,n} =$

$kA_{m\,x\,n} = k[a_{ij}]_{m\,x\,n} =$

Propriétés de l'addition de matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire

Pour toutes matrices A, B et C de même dimension *m x n* dont les éléments sont des réels, alors pour tous réels *r* et *s*, nous avons les propriétés suivantes :

Propriété 1 Dimension de A+B =

Propriété 2 A + B =

Propriété 3 A + (B +C) =

Propriété 4 A + O =

Propriété 5 A + (-A) =

Propriété 6 La dimension de sA = .

Propriété7 r (A+B) =

Propriété 8 (r + s) A =

Propriété 9 r(s A) =

Propriété 10 1 A = .

Multiplication de matrices

$A_{m\,x\,\_\_\_}\ B_{p\,x\,\_\_\_} = C_{\_\_\,x\,n}$

Si A est une matrice de dimension *m x n*, et B, une matrice de dimension *p x n*, alors

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

où $c_{ij} =$ ______________________.

Propriétés de la multiplication de matrices

Si A, B et C sont trois matrices de dimensions compatibles et dont les éléments sont des nombres réels, nous avons alors les propriétés suivantes :

Propriété 1 (AB) C = ___________________

Propriété 3 (A + B) C =________________________.

Propriété 2 A (B + C) = ___________________

Propriété 4 r (AB) = ________________________.

Transposée d'une matrice

Une matrice B est transposée d'une matrice A, c'est-à-dire $B = A^T$, si ___________________________.

Si A et B sont deux matrices de dimensions compatibles, et si $k \in \Re$, nous avons alors les propriétés suivantes :

Propriété 1 $\left(A^T\right)^T =$ ________________________

Propriété 3 $(AB)^T =$___________________.

Propriété 2 $(A+B)^T$ = ____________________

Propriété 4 $(kA)^T$ = ___________________.

Si $A^T = A$ alors A est une matrice_____________. Si $A^T = -A$ alors A est une matrice__________.

Répondre par VRAI ou FAUX (Si FAUX, donner un contre-exemple)

1. Si $A_{m\times p}B_{p\times n}=O_{m\times n}$, alors $A_{m\times p}=O_{m\times n}$ ou $B_{p\times n}=O_{m\times n}$: ___________________.
2. Si A, B et C sont trois matrices de dimensions compatibles telles que : $AB = AC$, alors $B = C$: ________________________.
3. Si A et B sont deux matrices telles que AB et BA soient définies, alors AB = BA _______________.

Répondre par VRAI ou FAUX et justifier votre réponse

1. Toutes les colonnes d'une matrice comportent le même nombre d'éléments._______________.
2. La matrice de format 8×4 comporte 12 éléments. ________________________________.
3. Une matrice 50×60 comporte plus de lignes que de colonnes. ____________________.
4. Une matrice A est symétrique lorsque $a_{ij} = a_{ji}$. ______________________________________.
5. On peut toujours additionner deux matrices qui comportent le même nombre de lignes.______.
6. Une matrice $A_{2\times 3}$ peut être symétrique. ____.
7. Une matrice $A_{2\times 2}$ est toujours symétrique. ____.
8. Une matrice $A_{3\times 2}$ est toujours antisymétrique.____.
9. La trace d'une matrice antisymétrique vaut 0. ________________________________.
10. La somme de tous les éléments d'une matrice antisymétrique est égale à sa trace. ___.
11. Si A est une matrice symétrique, alors $A - A^T = O$. ______________________________.

12. Si A est une matrice antisymétrique, alors $A - A^T = O$. ________________________.
13. Si A est une matrice symétrique, alors A^T est une matrice symétrique. __________.
14. Si A est une matrice carrée, alors $A + A^T$ est une matrice symétrique. ____________.
15. Si A est une matrice carrée, alors $A - A^T$ est une matrice antisymétrique. __________.
16. Si A est une matrice triangulaire supérieure, alors A^T est une matrice triangulaire supérieure. ______.
17. Si A est une matrice triangulaire inférieure, alors A^T est une matrice triangulaire inférieure. ______.
18. Toutes les matrices diagonales sont antisymétriques. __________________________.
19. Une matrice peut être triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.__________.
20. Une matrice peut être symétrique et antisymétrique.__________________________.
21. Si A est une matrice telle que A^2 soit définie, alors A est une matrice carrée. _____.
22. Si $A_{n\times n}$ et $B_{n\times n}$ sont deux matrices diagonales, alors AB = BA. _________________.
23. Si A est une matrice carrée, alors $(A^2)^T = (A^T)^2$. ______________________________.
24. Si A et B sont deux matrices triangulaires inférieures de même dimension, alors $A^T B^T$ est aussi une matrice triangulaire inférieures. ___________________________.
25. Soit deux matrices A et B. Les produits AB et BA sont définies seulement lorsque A et B sont deux matrices carrées de même dimension.__________________________.
26. Si A et B sont deux matrices carrées de même dimension, alors $(AB)^2 = A^2B^2$.________.
27. Si A est matrice carrée, alors $Tr(A) = Tr(A^T)$.________________________________.
28. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.________.
29. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.________.
30. Si A est une matrice carrée, alors les matrices $A^T A$ et AA^T sont symétriques.______.
31. Si A ou B est une matrice nulle, alors le produit AB est une matrice nulle s'il est défini. ____.
32. Si le produit AB est une matrice nulle, alors A ou B est nécessairement une matrice nulle. ___.
33. Si le produit matriciel AB est défini, alors AB = BA.___________________________.
34. Si le produit matriciel AB est défini, alors $(AB)^T = A^T B^T$. ____________________________.
35. Le produit de deux matrices carrées est toujours défini.____________________________.
36. Si A est la transposée de B, B est la transposée de C, alors A = C.____________________.
37. Si les opérations Ab et A+B sont définies, alors les matrices A et B sont carrées de même ordre.______.
38. Si A est une matrice idempotente, alors A^T est idempotente.__________________________.
39. Si A est une matrice idempotente, alors A^n est idempotente.____________________.
40. Si le produit ABC est défini, la matrice A est de format 5×6 et la matrice C de format 4×2, alors la matrice B est de format 6×4. ________________________________.
41. Si les différents produits sont définis, alors $(A^T B^T)^T = AB$.________________________.

Démontrez chacun des énoncés suivants. Au préalable, distinguez les hypothèses et la conclusion.

1. Une matrice nulle carrée est une matrice scalaire.
2. Une matrice scalaire dont la trace vaut zéro est une matrice nulle.
3. La diagonale principale d'une matrice antisymétrique ne comporte que des zéros.
4. Deux matrices carrées de même format sont égales si et seulement si leurs traces sont égales.
5. Si AB = A et BA = B, alors AB est une matrice idempotente.
6. Si ABA=A, alors BA est une matrice idempotente.
7. Si A est une matrice carrée d'ordre n telle que $A^T A = I_n$, alors $(I_n - A)^T (I_n + A)$ est une matrice antisymétrique.
8. Si A et B sont deux matrices symétriques d'ordre n, alors A+B est symétrique.
9. Si A est une matrice symétrique d'ordre n, alors A^2 est symétrique.
10. Si A est une matrice symétrique d'ordre n et k un nombre réel, alors kA est symétrique.
11. Si a est une matrice idempotente d'ordre n, alors la matrice $B = I_n - A$ et idempotente et $AB = BA = O_{n\times n}$.
12. Si A est une matrice idempotente, alors A^T est aussi une matrice idempotente.
13. Si A est une matrice nilpotente, alors A^T est aussi une matrice nilpotente.
14. Une matrice carrée d'ordre n est dite involutive si et seulement si $A^2 = I_n$.

    Si A est involutive, alors A^T est aussi involutive.
15. Si A est une matrice inversible d'ordre n, $n \geq 2$, et A est idempotente, alors $A = I_n$.
16. Si A est une matrice inversible d'ordre n, $n \geq 2$, et $A^3 = A$, alors $A = A^{-1}$.
17. Si A est une matrice carrée, alors
    a) $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ est une matrice symétrique.
    b) $N = \frac{1}{2}(A - A^T)$ est une matrice antisymétrique.
    c) A = S+N, c'est-à-dire que toute matrice carrée s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
18. Si A est une matrice carrée d'ordre n,
    a) alors $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = I_n - A^k$, $k \geq 2$.
    b) Si en outre $(I_n - A)$ est inversible et $S_k = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$, alors
    $$S_k = (I_n - A)^{-1}(I_n - A^k).$$