Propiedades de los números reales

Ildeberto de los Santos Ruiz

1. Introducción

Los números reales nos deben resultar familiares. Son los números que se usan en la mayor parte de las mediciones. La masa, la velocidad, la temperatura y la carga eléctrica de un cuerpo se miden mediante números reales.

Los números reales se definen de manera axiomática como el conjunto de números que se encuentran en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta infinita: la **recta numérica** o, más precisamente, la **recta real**.

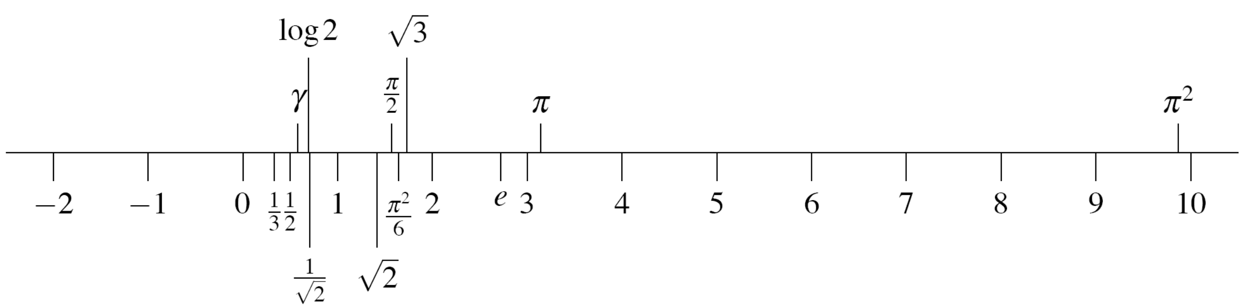

Figura 1: La recta real, con algunos números señalados.

2. Propiedades de los números reales

Las propiedades de los números reales están comprendidas en tres categorías: *propiedades algebraicas*, *propiedades de orden* y *completitud*.

Propiedades algebraicas

Las **propiedades algebraicas** establecen que los números reales pueden ser sumados, restados, multiplicados y divididos (excepto entre 0) para producir más números reales bajo las reglas usuales de la aritmética. *No se puede dividir entre 0.*

Propiedades de orden

Si a y b son números reales, entonces a es menor que b (lo que se escribe $a < b$) si $b - a$ es un número positivo. Esto es equivalente a decir que b es mayor que a (lo que se escribe $b > a$). Desde el punto de vista geométrico, $a < b$ si el punto a está a la izquierda del punto b sobre la recta real. La notación $a \leq b$ significa que $a < b$ o bien $a = b$ (equivalentemente, $b \geq a$).

Los números reales están ordenados de manera que si a y b son números reales, entonces se verifica solamente una de las siguientes afirmaciones:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b. \qquad \textbf{(tricotomía)}$$

Los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ se llaman **signos de desigualdad**. Las desigualdades satisfacen las siguientes propiedades:

Teorema 1 (**Propiedades de orden**). Si a, b y c son números reales, entonces

1. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (**propiedad transitiva**)

2. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

3. Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$

4. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

5. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

6. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
Caso especial: Si $a < b$, entonces $-a > -b$.

7. Si $a > 0$, entonces $1/a > 0$.

8. Si a y b son ambos positivos (o ambos negativos) y $a < b$, entonces $1/a > 1/b$.

Las propiedades **5** y **6** son importantes en la resolución de desigualdades: al multiplicar por un número positivo se mantiene el sentido de la desigualdad, al multiplicar por un número negativo el sentido se invierte. La propiedad **8** establece que calcular los recíprocos también invierte el sentido de la desigualdad.

Completitud

La **propiedad de completitud** del sistema de los números reales es más profunda y es difícil de definir con precisión. De manera simple, dice que hay suficientes números reales para "completar" la recta real, en el sentido de que no hay "agujeros" en ella: entre dos números reales cualesquiera existe una infinidad de números racionales y una infinidad de números irracionales.

La demostración de esta propiedad se reserva para cursos avanzados, pero es importante tenerla siempre presente. Muchos de los teoremas del cálculo fallarían si el sistema de los números reales no fuera *completo*.

3. Intervalos

Un subconjunto de la recta real se llama **intervalo**, si contiene al menos dos números y contiene todos los números reales que están comprendidos entre dos cualesquiera de sus elementos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales x tales que $x > 6$ es un intervalo, así como el conjunto de todos los x tales que $-2 \leq x \leq 5$. El conjunto de todos los números reales diferentes de cero no es un intervalo; dado que 0 no está en dicho conjunto, éste no contiene todos los números reales entre -1 y 1 (por ejemplo).

Geométricamente, los intervalos corresponden a semirrectas o segmentos de recta. La recta real misma (en toda su extensión) también es un intervalo. Los intervalos correspondientes a segmentos de recta son **intervalos finitos**; los intervalos correspondientes a semirrectas y a la recta real son **intervalos infinitos**.

Se dice que un intervalo finito es: **cerrado**, si contiene a sus dos extremos; **semiabierto**, si contiene a un extremo pero no al otro; y **abierto**, si no contiene a ningún extremo. Los extremos también se llaman **puntos fronterizos** del intervalo y constituyen la **frontera** del intervalo. Los puntos restantes del intervalo son los **puntos interiores** y juntos forman lo que llamamos el **interior** del intervalo.

Notación para intervalos

Supongamos que S es un conjunto de números reales. En la teoría de conjuntos es común describir a S mediante la notación

$$S = \{x : \text{condición}\}$$

donde la “condición” es verdadera para todos los números x que están en S y falsa para todos los números que no están en S. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** (a, b) se define como el conjunto

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$

de números reales, y el **intervalo cerrado** $[a, b]$ es el conjunto

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}.$$

Los **intervalos semiabiertos** se definen como

$$[a, b) = \{x : a \leq x < b\} \qquad y \qquad (a, b] = \{x : a < x \leq b\}.$$

Los **intervalos infinitos** (no acotados) son aquellos que tienen formas como

$$\begin{aligned}
(a, \infty) &= \{x : x > a\}, \\
[a, \infty) &= \{x : x \geq a\}, \\
(-\infty, a) &= \{x : x < a\}, \\
(-\infty, a] &= \{x : x \leq a\}, \quad \text{y} \\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R} \quad \text{(todos los números reales).}
\end{aligned}$$

El símbolo ∞ (infinito), es simplemente una notación convencional para indicar que el intervalo se extiende tanto como uno quiera (sin límite) y no representa a ningún número real; la recta real $\mathbb{R}$ no tiene "extremos en el infinito".

A continuación se muestran algunos ejemplos de intervalos con su notación correspondiente:

- $(2, 5)$
  El conjunto de números reales que son mayores que 2 pero menores que 5.
- $(0, \sqrt{2}]$
  El conjunto de números reales que son mayores que 0 pero menores o iguales que $\sqrt{2}$.
- $[-4.1, 8)$
  El conjunto de números reales que son mayores o iguales que -4.1 pero menores que 8.
- $[\pi, 5]$
  El conjunto de números reales que son mayores o iguales que π pero menores o iguales que 5.
- $(1, \infty)$
  El conjunto de números reales que son mayores que 1.
- $[1, \infty)$
  El conjunto de números reales que son mayores o iguales que 1.
- $(-\infty, 3.55)$
  El conjunto de números reales que son menores que 3.55.
- $(-\infty, 3.55]$
  El conjunto de números reales que son menores o iguales que 3.55.
- $(-\infty, \infty)$
  El conjunto de todos los números reales, denotado por $\mathbb{R}$.