CAPÍTULO 2 PARÁMETRO RESISTIVO [R]

1.1 DEFINICIÓN

Figura 2.1 Representación circuital del parámetro resistivo

> *" La resistencia eléctrica es la oposición que presenta un material conductor a la circulación de corriente eléctrica a través de el"*

La resistencia eléctrica se representa con los símbolos mostrados en la Figura 2.1. Tal componente circuital se denomina "resistor" o "resistencia" y se designa por la letra R mayúscula o minúscula.

En corriente directa (DC), la corriente se distribuye uniformemente en la sección transversal del conductor, por lo tanto, la densidad de corriente J es uniforme. Entonces, la resistencia en Ohmios de un conductor a la corriente continua está dada por:

$$R_{DC} = \rho\ L/A \qquad (2.1)$$

Donde:

ρ: Resistividad del material conductor en [Ohm-m] a una temperatura dada
L: Longitud del conductor en [m]
A: Área de la sección transversal del conductor en [m^2]

En los cables, cada hilo o alambre es trenzado por lo cual su longitud real es mayor a la del cable completo. Por lo tanto, la resistencia real del cable será mayor a la que se calcule con la ecuación (2.1) pues cada hilo conductor es más largo.

Se considera que debido al trenzado, la longitud real de cada hilo o alambre es hasta 2% mayor que la longitud de cable considerada. Y por lo tanto, la resistencia equivalente del cable se incrementarse en una cifra similar.

1.2 VARIACIÓN DE LA RESISTENCIA CON LA TEMPERATURA

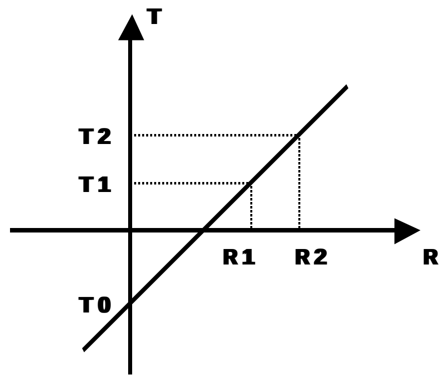


Figura 2.2 Variación de la resistencia con la temperatura

La resistividad de un material conductor varía en forma proporcional con la temperatura por lo cual, es usual presentar su valor a una temperatura de referencia de 20 °C. La Tabla 2.1 presenta el valor de resistividad para varios materiales conductores.

Tabla 2.1 Resistividad de varios materiales a una temperatura de 20 °C

Material	Resistividad [Ohm-m *10⁻⁸]	Observaciones
Aluminio	2.83	En materiales ferromagnéticos como el acero, la resistividad y por lo tanto la resistencia varían con la corriente. Estos materiales son no lineales.
Cobre estirado en frío	1.77	
Cobre recocido	1.72	
Acero	12 – 88	

La variación de la resistencia de los conductores con la temperatura es prácticamente lineal en el margen normal de utilización de hasta 75 °C. Ver la Figura 2.2.

Si se conoce la resistencia de un conductor R1 a una temperatura dada T2, es posible determinar la resistencia R2 a otra temperatura T2 mediante la siguiente ecuación:

$$R2 = R1*(T0+T2)/(T0+T1) \qquad (2.2)$$

Donde T0 es una temperatura de referencia para cada material.

Tabla 2.2 Temperatura de referencia T0 para varios materiales

Material	T0 [°C]
Aluminio estirado en frío	288
Cobre estirado en frío	241
Cobre recocido	234.5

Otra ecuación análoga a la (2.2) es:

$$R2 = R1 * (1 + \alpha [T2 - T1]) \qquad (2.3)$$

Donde α tiene unidades de [1/°C] y es el coeficiente cada material a una temperatura de referencia de 20 °C, tal como se presenta en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3 Coeficiente de temperatura a para varios materiales

Material	**a a 20 °C [1/°C]**
Aluminio	0.0039
Cobre estirado en frío	0.00382
Cobre recocido	0.00393
Acero	0.001 – 0.005

Al aplicar las ecuaciones (2.2) y (2.3) se debe tener en cuenta que las resistencias y las temperaturas tienen las mismas unidades, respectivamente.

Las tablas de conductores que entregan los fabricantes presentan el valor de la resistencia de cada cable a las temperaturas operativas preferidas (50 °C y 75 °C).

1.3 RESISTENCIA A LA CORRIENTE ALTERNA

(a) Corriente DC **(b) Corriente AC**

Figura 2.3 Variación de la resistencia con la temperatura

Cuando se aplica una corriente AC sinusoidal a un conductor, la densidad de corriente no es uniforme y se presenta el llamado "Efecto Piel" (Skin Effect) en el cual la corriente circula por la periferia del conductor, tal como se muestra en la Figura 2.3.

El efecto piel es directamente proporcional a la frecuencia operativa, por lo cual, a mayor frecuencia operativa, mayor será el efecto piel.

El efecto piel produce que la resistencia que se mide en corriente alterna sea mayor que la medida en corriente directa para un mismo conductor. Esto se debe a que la corriente tiene que circular por una sección menor.

Para las frecuencias operativas de 50 y 60 Hz, la resistencia AC puede ser hasta un 160% mayor que la correpondiente resistencia en DC, dependiendo de la sección transversal del conductor. Otros efectos debidos a la corriente alterna son:

Efecto		Descripción	Comentarios
1	Efecto Proximidad	Cuando dos conductores que portan corriente alterna están ubicados muy cerca uno del otro, se produce una densidad de corriente mayor hacia los lados colindantes.	Es importante en cables subterráneos y conductores en haz.
2	Corrientes parásitas	La corriente alterna produce corrientes parásitas inducidas (Eddy o Foucault) en el material conductor lo cual produce pérdidas de potencia activa que equivalen a aumentar la resistencia efectiva AC.	

Entonces la resistencia AC de un cable a una temperatura dada es:

$$R_{AC} = R_{DC} + \text{Efecto piel} + \text{Efecto proximidad} + \text{Efecto corrientes parásitas} \quad (2.4)$$

$$R_{AC} > R_{DC} \quad (2.5)$$

Determinar analíticamente la resistencia AC de un cable teniendo en cuenta todos los efectos mencionados es muy complicado, por lo cual, lo más práctico es utilizar los datos dados por los fabricantes que son obtenidos por medio de pruebas.

La resistencia AC también se denomina “resistencia efectiva” y representa las pérdidas de potencia activa para el valor eficaz (rms) de la corriente AC. Por supuesto, las pérdidas de potencia activa incluyen todos los efectos mencionados.

1.4 PÉRDIDAS DE POTENCIA

Pérdidas de potencia en DC = $I^2 R_{DC}$ [Vatios] (2.6)

Pérdidas de potencia activa en AC = $I_{RMS}^2 R_{AC}$ [Vatios] (2.7)

Al circular corriente por un conductor se produce disipación de energía en forma de calor, esto se conoce como “Efecto Joule”.

La velocidad con que se disipa esta energía se denomina “potencia” en sistemas DC y “potencia activa” en sistemas AC.

La potencia en DC y la potencia activa en AC tienen un costo económico pues es un indicador de la velocidad de consumo de energía para conversión en alguna forma de trabajo.

Para el caso de las líneas, la disipación de energía en la resistencia de los conductores se considera una pérdida y por lo tanto, se denomina pérdidas de potencia o pérdidas técnicas.

Las pérdidas de potencia indican la eficiencia del dispositivo transmisor pues son la diferencia entre la potencia de entrada y la de salida:

Pérdidas de potencia = Pentrada – Psalida [Vatios] (2.8)

%Pérdidas de potencia = Pérdidas de potencia/Pentrada*100% (2.9)

Eficiencia en % = Psalida/Pentrada*100% (2.10)

Al igual que en las líneas de transmisión, para otros componentes y aún para las zonas funcionales del sistema eléctrico se pueden aplicar las ecuaciones (2.8) a (2.10) para determinar las pérdidas técnicas y la eficiencia.

Las pérdidas de potencia son un ítem muy importante en el diseño, planeamiento y operación de un sistema eléctrico de potencia. En general es deseable minimizarlas hasta un valor “optimo” dado por:

1	La regulación vigente o norma técnica	Se establece el nivel máximo de pérdidas para una zona funcional del sistema eléctrico o un componente.
2	El retorno de la inversión	Se minimizan las pérdidas hasta obtener el retorno de la inversión en un tiempo o un valor dado de relación beneficio/costo.

1.5 EXPRESIONES BÁSICAS PARA CALCULOS DE RESISTENCIA

1	Conductores en serie	$Rserie = \sum_{i=1}^{n} Ri$ (2.11)
2	Conductores en paralelo	$Rparalelo = R1*R2/(R1+R2)$ Para dos conductores (2.12) $\frac{1}{Rparalelo} = \sum_{i=1}^{n} 1/Ri$ Para n conductores diferentes (2.13) $Rparalelo = \frac{R}{n}$ Para n conductores iguales de resistencia R (2.14)

En este texto se utiliza la siguiente nomenclatura para designar la resistencia:

R: Resistencia total en Ohmios del conductor, fase o polo de la línea de transmisión

r: Resistencia en Ohmios por unidad de longitud del conductor, fase o polo de la línea de transmisión.

$$R = r * longitud \qquad (2.15)$$

Cuando se realizan los cálculos, se asume que la resistencia de cada conductor está referenciada a la temperatura nominal de operación. Para el caso AC, además, se considera corregida a la frecuencia nominal operativa e incluyendo los demás efectos que se presentan en AC.

1.6 EXPRESIONES MATRICIALES PARA LA RESISTENCIA

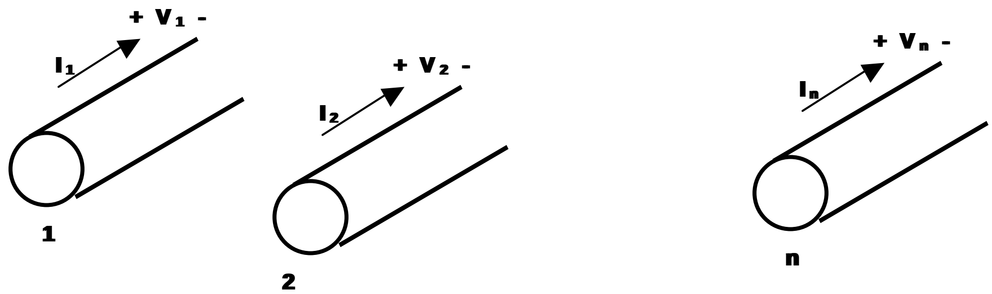


Figura 2.4 Grupo de conductores de una línea de transmisión

Considere un grupo de n conductores cilíndricos, rectos, muy largos que conforman una línea de transmisión donde se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} Ii = 0 \tag{2.16}$$

La ecuación (2.16) implica alguna de las siguientes condiciones:

1. No hay desbalance en el sistema por lo cual no existe corriente de retorno.
2. En caso de existir desbalance, la corriente de retorno circula por uno de los conductores físicos. Esto quiere decir, que no se consideran las carácterísticas físicas de la tierra como un conductor.

Las corrientes se asumen en un mismo sentido entrando o saliendo al mismo tiempo con las caídas de tensión en los sentidos indicados en la Figura 2.4.

La matríz [R] se define como:

$$[R] = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & R_{nn} \end{pmatrix} \quad [\text{Ohmios}] \tag{2.17}$$

Donde Rii es la resistencia del conductor i en Ohmios si i igual a j. De resto Rij es igual a cero. El orden de la matríz es igual al número n de conductores considerados. Los términos fuera de la diagonal son cero pues no existe acople resistivo entre los conductores dado que no se considera el retorno por tierra. R es una matríz cuadrada y diagonal.

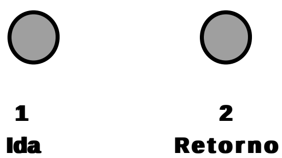
$$[R] = [r] * \text{longitud} \tag{2.18}$$

Aunque la numeración de los conductores es arbitraria, para arreglos de varios conductores por fase o polo y cables guarda, se recomienda numerar así:

1	En primer lugar, un conductor de cada fase, polo o retorno
2	En segundo lugar, los restantes conductores de cada fase, polo o retorno
3	Por último, los cables guarda

Ejemplo 2.1

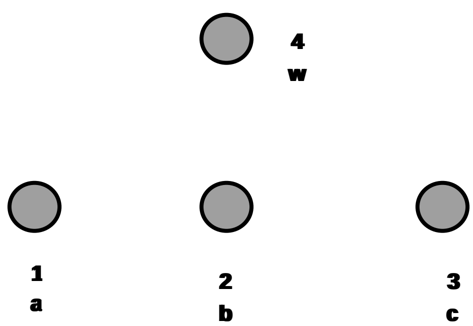
Considere una línea de transmisión monofásica con un conductor a la ida y otro al retorno.



$$[R] = \begin{pmatrix} R1 & 0 \\ 0 & R2 \end{pmatrix} \quad \text{[Ohmios]}$$

Ejemplo 2.2

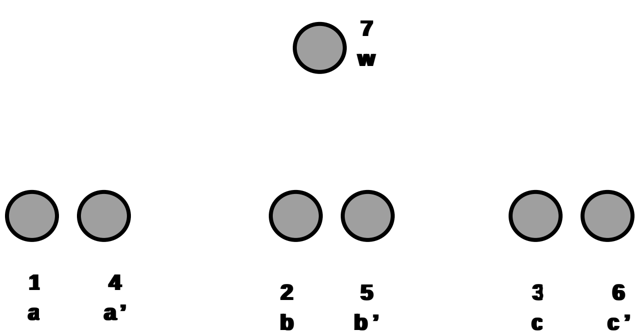
Considere una línea de transmisión trifásica con un conductor por fase y un cable guarda.



$$[R] = \begin{pmatrix} Ra & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Rb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Rc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Rw \end{pmatrix} \quad \text{[Ohmios]}$$

Ejemplo 2.3

Considere una línea de transmisión trifásica con dos conductores por fase y un cable guarda.



$$[R] = \begin{pmatrix} Ra & & & & & & \\ & Rb & & & & & \\ & & Rc & & & & \\ & & & Ra' & & & \\ & & & & Rb' & & \\ & & & & & Rc' & \\ & & & & & & Rw \end{pmatrix}$$

[Ohmios]

1.7 CAÍDA DE TENSIÓN POR EFECTO RESISTIVO

Cuando circula corriente por un conductor se produce una caída de tensión por efecto de la resistencia. Esta caída de tensión se puede calcular como:

$$V = R\,\mathbf{I} \qquad [\text{Voltios}] \qquad (2.18)$$

$$[V] = [R][\mathbf{I}] \qquad [\text{Voltios}] \qquad (2.19)$$

$$[V] = [r][\mathbf{I}] \qquad [\text{Voltios/metro}] \qquad (2.20)$$

En este caso, la caída de tensión considerada se debe únicamente al efecto resistivo y sirve para calcular la regulación por este parámetro.

Sin embargo, debe recordarse que para un sistema AC, la magnitud de la corriente circulante depende también de la inductancia y capacitancia del circuito o red bajo estudio.

Si se conoce la caída de tensión en cada conductor, es posible hallar las corrientes mediante las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{I} = V/R \qquad [\text{Amperios}] \qquad (2.21)$$

$$[\mathbf{I}] = [R]^{-1}[V] = [G][V] \qquad [\text{Amperios}] \qquad (2.22)$$

$$[\mathbf{I}] = [r]^{-1}[V] = [g][V] \qquad [\text{Amperios/metro}] \qquad (2.23)$$

Donce [G] y [g] son las matrices de conductancia total de los conductores y conductancia por unidad de longitud de los conductores, respectivamente.

La potencia de pérdidas totales en un conductor i se hallar como:

$$P_i = V_i^2/R_i = V_i^2 * G_i \qquad [\text{Vatios}] \qquad (2.24)$$

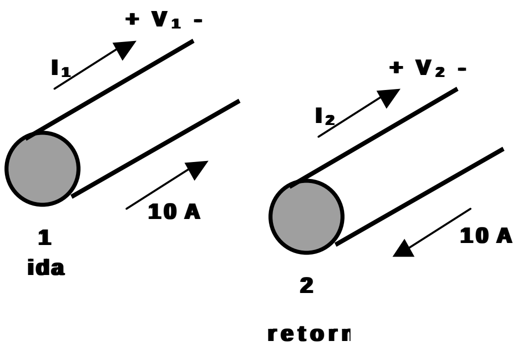
$$P_i = \mathbf{I}_i^2 * R_i = \mathbf{I}_i^2/G_i \qquad [\text{Vatios}] \qquad (2.25)$$

Al aplicar las ecuaciones (2.24) y (2.25) en sistemas AC, debe tenerse en cuenta que V e **I** se deben colocar en valores efectivos (rms).

También es posible hallar las pérdidas de potencia por unidad de longitud mediante las ecuaciones (2.24) y (2.25) cambiando simplemente R por r y G por g, respectivamente.

Ejemplo 2.4

Para la línea de transmisión monofásica mostrada, calcular la caída de tensión en cada conductor y la caída de tensión total, si la corriente de carga es de 10 A.



$$[R] = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{[Ohmios]}$$

$$\begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \end{pmatrix} \quad \text{[Voltios]}$$

$$\begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +10 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{[Voltios]}$$

$$\begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +50 \\ -40 \end{pmatrix} \quad \text{[Voltios]}$$

I2 tiene valor negativo pues se sabe que la corriente de carga tiene sentido contrario al definido por la ecuación de voltaje.

Por la misma razon, V2 tiene valor negativo pues su sentido es contrario al indicado en la figura.

$\Delta V = V1 - V2 = +50 - (-40) = 90$ Voltios

$P1 = I1^2 * R1 = 10^2 * 5 = 100 * 5 = 500$ Vatios

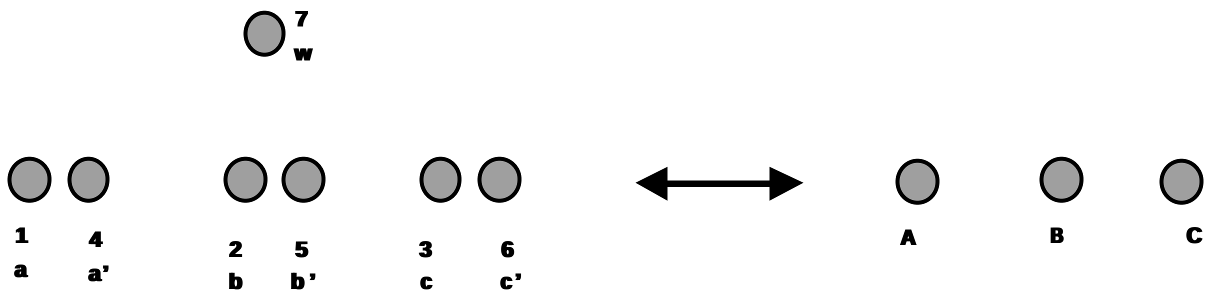
$P2 = I2^2 * R2 = 10^2 * 4 = 100 * 4 = 400$ Vatios

Utilizando voltajes se obtienen los mismos resultados para las potencias:

$P1 = V1^2 / R1 = 50^2 / 5 = 2500 / 5 = 500$ Vatios

$P2 = V2^2 / R2 = (-40)^2 / 4 = 1600 / 4 = 400$ Vatios

1.8 REDUCCIÓN DE CONDUCTORES A UN EQUIVALENTE POR FASE O POLO



$$[R] = \begin{pmatrix} Ra & & & & & & \\ & Rb & & & & & \\ & & Rc & & & & \\ & & & Ra' & & & \\ & & & & Rb' & & \\ & & & & & Rc' & \\ & & & & & & Rw \end{pmatrix} \longleftrightarrow [R] = \begin{pmatrix} RA & & \\ & RA & \\ & & RC \end{pmatrix}$$

$$[V_{1234567}] = [R_{1234567}][I_{1234567}] \longleftrightarrow [V_{ABC}] = [R_{ABC}][I_{ABC}]$$

Figura 2.5 Reducción de conductores de una línea de transmisión

El sistema de ecuaciones [V] = [R][I] consiste en n ecuaciones de voltaje o corriente, una para cada conductor físico existente. Sin embargo, para análisis de sistemas eléctricos únicamente interesan las variables (V, I) de:

- Las fases A, B y C para sistemas AC trifásicos
- La ida y el retorno en sistemas AC monofásicos o DC monopolares con conductor de retorno.
- El polo 1, el polo 2 y el retorno en sistemas DC bipolares.

Por lo tanto, es necesario ajustar el sistema de ecuaciones de tal manera que solo aparezcan las variables de interés. Un ejemplo se presenta en la Figura 2.5, donde el sistema de 7 conductores se reduce a uno equivalente de tres conductores llamados A, B y C que matemáticamente son equivalentes al sistema original.

Este procedimiento se denomina “reducción” y se realiza directamente en la matríz [R]. La reducción es un artificio matemático en el cual se eliminan los subconductores de las fases o polos y los cables guarda de tal manera que se obtiene un conductor equivalente por fase o polo con un valor de resistencia que contiene el efecto de todos los conductores eliminados de las ecuaciones.

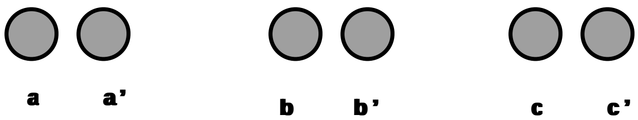
El procedimiento es:

Paso		**Descripción**
1	Numerar los conductores en forma apropiada para la reducción y construir la matríz [R]	En primer lugar, un conductor de cada fase, polo o retorno
		En segundo lugar, los restantes conductores de cada fase, polo o retorno
		Por último, los cables guarda
2	Realizar operaciones por columnas	En la matríz [R] se resta la columna del primer conductor de cada fase, polo o retorno a las columnas de los restantes subconductores de dicha fase, polo o retorno.
3	Realizar operaciones por filas	En la matríz [R] se resta la fila del primer conductor de cada fase, polo o retorno a las filas de los restantes subconductores de dicha fase, polo o retorno
4	Realizar reducción de Kron	En la matríz [R] se eliminan las filas y columnas de los conductores a ser reducidos. El sistema resultante solo tiene un término para cada fase, polo o neutro.

Este procedimiento es general y también se aplica a las matrices de inductancia, capacitancia e impedancia.

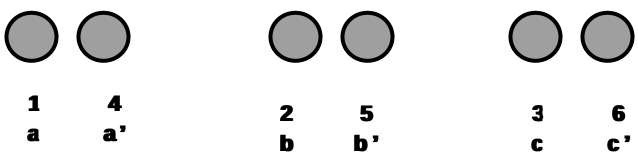
Ejemplo 2.5

Para la línea de transmisión trifásica con dos conductores por fase mostrada, realizar la reducción a un solo conductor por fase.



Ra = Ra' = 3 Ohmios
Rb = Rb' = 2 Ohmios
Rc = Rc' = 4 Ohmios

1. Numerar conductores y construir la matríz [R] en Ohmios



$$[R] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 4 & & & \\ \hline & & & 3 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 4 \end{array}\right)$$

2. Operaciones por columnas

Se resta la columna 1 a la columna 4, la columna 2 a la columna 5 y la columna 3 a la columna 6, obteniéndose:

$$[R] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & & & -3 & & \\ & 2 & & & -2 & \\ & & 4 & & & -4 \\ \hline & & & 3 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 4 \end{array}\right)$$

3. Operaciones por filas

Se resta la fila 1 a la fila 4, la fila 2 a la fila 5 y la fila 3 a la fila 6, obteniéndose:

$$[R] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & & & -3 & & \\ & 2 & & & -2 & \\ & & 4 & & & -4 \\ \hline -3 & & & 6 & & \\ & -2 & & & 4 & \\ & & -4 & & & 8 \end{array}\right)$$

4. Reducción de Kron

Se particiona la matríz en la submatrices A, B, C y D

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \\ \\ \\ \\ \mathbf{C} \end{array} [R] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & & & -3 & & \\ & 2 & & & -2 & \\ & & 4 & & & -4 \\ \hline -3 & & & 6 & & \\ & -2 & & & 4 & \\ & & -4 & & & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \\ \\ \\ \mathbf{D} \\ \\ \\ \end{array}$$

La matríz [R] de 7*7 reducida a tres fases equivalentes está dada por:

[Rreducida ABC] = $[A\text{-}BD^{-1}C]$

$$[R] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$[R] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$[R] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$[R] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{pmatrix}$$

$[R] = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{pmatrix}$ [Ohmios] Es la matriz equivalente para un sistema de 3 conductores A, B, C.

El nuevo sistema de ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} \qquad \text{[Voltios]}$$

Como era de esperarse, el resultado obtenido de resistencia para los conductores equivalentes A, B y C corresponde al paralelo de la resistencia de los conductores reales que conforman cada fase.

Aunque esto es obvio, es necesario introducir el procedimiento de reducción desde ahora, para tener una clara compresión de su aplicación para cuando se utilice en matrices que tienen términos de acoplamiento (Términos fuera de la diagonal).

1.9 DEMOSTRACIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE REDUCCIÓN DE CONDUCTORES

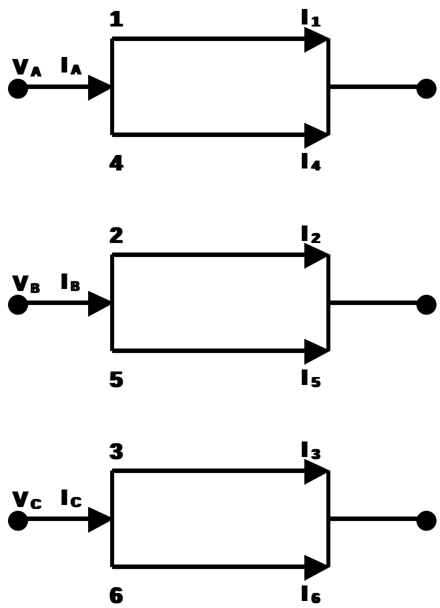


Figura 2.7 Línea de transmisión con dos conductores por fase

Considere un sistema de tres fases con dos subconductores por fase, tal como se muestra en la Figura 2.7, donde:

$V_A = V_1 = V_4$ $\quad$ $V_B = V_2 = V_5$ $\quad$ $V_C = V_3 = V_6$

$I_A = I_1 + I_4$ $\quad$ $I_B = I_2 + I_5$ $\quad$ $I_C = I_3 + I_6$

El sistema de ecuaciones original es:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R1 & & & & & \\ & R2 & & & & \\ & & R3 & & & \\ & & & R4 & & \\ & & & & R5 & \\ & & & & & R6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}$$

1. Para colocar I_A, I_B e I_C en las ecuaciones se suma y resta I_4, I_5 e I_6 a las ecuaciones de V_1, V_2 y V_3, respectivamente:

$$V_1 = R1I_1 + R1I_4 - R1I_4 = R1(I_1+I_4) - R1I_4 = R1I_A - R1I_4$$
$$V_2 = R2I_2 + R2I_5 - R2I_5 = R2(I_2+I_4) - R2I_5 = R2I_B - R2I_5$$
$$V_3 = R3I_3 + R3I_6 - R3I_6 = R3(I_3+I_6) - R3I_6 = R3I_C - R3I_6$$
$$V_4 = R4I_4$$
$$V_5 = R5I_5$$
$$V_6 = R6I_6$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R1 & & & -R1 & & \\ & R2 & & & -R2 & \\ & & R3 & & & -R3 \\ & & & R4 & & \\ & & & & R5 & \\ & & & & & R6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_c \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}$$

Equivale a restar la columna 1 a la columna 4, la columna 2 a la columna 5 y la columna 3 a la columna 6 en la matriz original [R].

De aquí se define el paso 2 del procedimiento de reducción correspondiente a las operaciones entre columnas.

2. Para colocar un cero en la columna de voltajes para las posiciones de V_4, V_5 y V_6 se realizan las siguientes operaciones:

   $V_4 - V_1 = 0$ Equivale a restar la fila 1 a la fila 4

   $V_5 - V_2 = 0$ Equivale a restar la fila 2 a la fila 5

   $V_6 - V_{11} = 0$ Equivale a restar la fila 3 a la fila 6

   Además, reemplazando: $V_A = V_1$ $V_B = V_2$ $V_C = V_3$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R1 & & & -R1 & & \\ & R2 & & & -R2 & \\ & & R3 & & & -R3 \\ -R1 & & & (R4+R1) & & \\ & -R2 & & & (R5+R2) & \\ & & -R3 & & & (R6+R3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_c \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}$$

De aquí se define el paso 3 del procedimiento de reducción correspondiente a las operaciones entre filas.

3. El sistema resultante es de la forma:

$$\begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$

Las submatrices [y] y [x1] contienen las variables de interés. Entonces se eliminarán las submatrices [0] y [x2].

El sistema de ecuaciones se reescribe como:

[y] = [A][x1] + [B][x2] (1)
[0] = [C][x1] + [D][x2] (2)

Despejando [x2] en la ecuación (2): $[x2] = -[D]^{-1}[C][x1]$

y reemplazando en la ecuación (1) se obtiene: $[y] = ([A] - [B][D]^{-1}[C]) [x1]$

El procedimiento aplicado se denomina "Reducción de Kron".

Entonces, la matríz reducida es:

$[R\ reducida] = [A] - [B][D]^{-1}[C]$

Un punto a tener en cuenta cuando existen cables guarda, es que éstos deben estar puestos a tierra para que su voltaje sea cero y puedan ser eliminados. Por esta razón, los cables guarda numeran de últimos. Si los cables guarda no están puestos a tierra, no pueden ser eliminados.

1.10 BIBLIOGRAFÍA

[1] GONEN TURAN, "Electric Power Transmission System Engineering: Analysis and Design". Wiley-Interscience Publication, 1988.

[2] EL-HAWARY, "Electrical Power Systems", IEEE Press, 1995.

[3] STEVENSON WILLIAM, "Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia", McGraw-Hill, 1962.

[4] MEJÍA UMAÑA ANTONIO, "Conferencias de Líneas y Redes", Universidad Nacional de Colombia, 1989.

[5] TORRES MACÍAS ÁLVARO, "Líneas de Transmisión". Universidad de Los Andes, 1997.

[6] LEUVEN EMTP CENTER, "ATP Rule Book", 1987.