Actividad 4: Lectura Capítulo 2

Fecha de inicio	Fecha de Cierre
22/AGO/13 00:00	21/SEP/13 23:55

Conceptualización

Las desigualdades son expresiones matemáticas donde dos términos p(x) y q(x) se comparan, siendo éstos polinomios ó uno de ellos término independiente. Las formas de comparación se pueden observar a continuación:

$p(x) < q(x)$; $p(x) > q(x)$; $p(x) \leq q(x)$; $p(x) \geq q(x)$

En el primer caso p(x) es menor que q(x), para el segundo p(x) es mayor que q(x), en el tercero p(x) es menor o igual a q(x) y en el cuarto p(x) es mayor o igual a q(x). Las dos primeras se les llama *desigualdades estrictas*.

Por ejemplo si se dice que $x > 2$, está indicando que cualquier valor mayor que dos, satisface la desigualdad propuesta. Si se dice que $x \leq 5$, se está indicando que cualquier valor menor que cinco es solución; pero inclusive cinco es también solución.

Propiedades de las Desigualdades:

Sean a, b, c números reales:

1. **Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$**

Demostración:

Como $a < b$, por definición $b - a$ es positivo; además, $(b + c) - (a + c) = b - a$, entonces $(b + c) - (a + c)$ es positivo, así $a + c < b + c$.

2. **Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$**

Demostración:

Con el mismo argumento del caso anterior, tenemos que $a + (-c) < b + (-c)$, así $a - c < b - c$.

3. **Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \times c < b \times c$**

Demostración:

Como $(a < b)$, luego $(b - a)$ es positivo; además, c es positivo, entonces el producto $(b - a) \times c$ es positivo, así $(b \times c - a \times c)$ es positivo, por lo tanto $(a \times c < b \times c)$.

4. **Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \times c > b \times c$**

Demostración:

Como ejercicio para hacer en el grupo colaborativo, para cualquier duda consultar con el tutor.

5. **Tricotomía:**

Si *a* y *b* son números reales, una de las siguientes expresiones se cumple.

$a < b$ $a > b$ $a = b$

Reflexión: ¿Qué pasa si $b = 0$?

6. **La NO Negatividad:**

Para cualquier número real a: $a^2 \geq 0$

7. **La Reciprocidad:**

Para cualquier número real $a \neq 0$:

Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$

Si $a < 0$, entonces $\frac{1}{a} < 0$

Es pertinente que usted estimado estudiante, plantee al menos dos ejemplo donde se aplique cada propiedad, esto le permitirá comprender la esencia de as mismas.

Las desigualdades pueden ser simples o compuestas.

Simples: $ax < b$; $px \geq q$

Compuestas: $a < x < b$; $a \leq px < b$

Intervalos

Cuando se tienen expresiones como $x > 3$, $x > 2$, $x > -5$, otros, se podría preguntar cómo se grafican, la respuesta esta en los intervalos.

Un intervalo es un segmento de recta con extremos inferior (a) y superior (b), el cual contiene todos los valores que satisfacen la desigualdad.

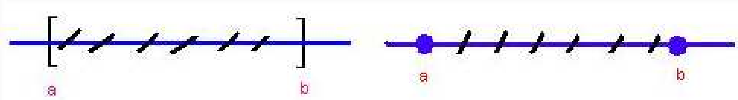
Existen varias clases de intervalos.

Intervalo Cerrado: Son todos aquellos donde los extremos del mismo, hacen parte del intervalo. La notación es la siguiente:

- Parejas ordenadas:

- Desigualdades: a ≤ x ≤ b

- Gráficamente:

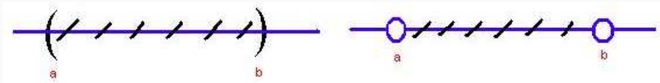


Intervalo Abierto: Son todos aquellos donde los extremos del mismo, NO hacen parte del intervalo. La notación es la siguiente:

- Parejas ordenadas: (a, b)

- Desigualdades: a < x < b

- Gráficamente:



Intervalo Semiabierto: Son todos aquellos intervalos donde uno de los extremos NO hace parte del mismo, pueden ser abiertos a izquierda ó abiertos a derecha.

Intervalo Abierto a Derecha: Corresponde a los intervalos donde el extremo derecho es abierto.La notación es:

- parejas ordenadas: $[a,b)$

- Desigualdades: a ≤ x < b

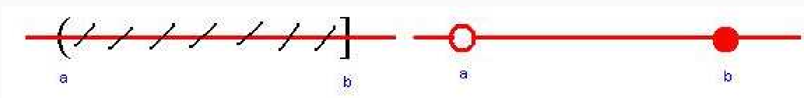
- Gráficamente:

Intervalo Abierto a izquierda: Corresponde a los intervalos donde el extremo izquierdo es abierto.La notación es:

- parejas ordenadas: $(a,b]$

- Desigualdades: a < x ≤ b

- Gráficamente:



Los intervalos semiabiertos a la izquierda, serán semicerrados a la derecha y viceversa.

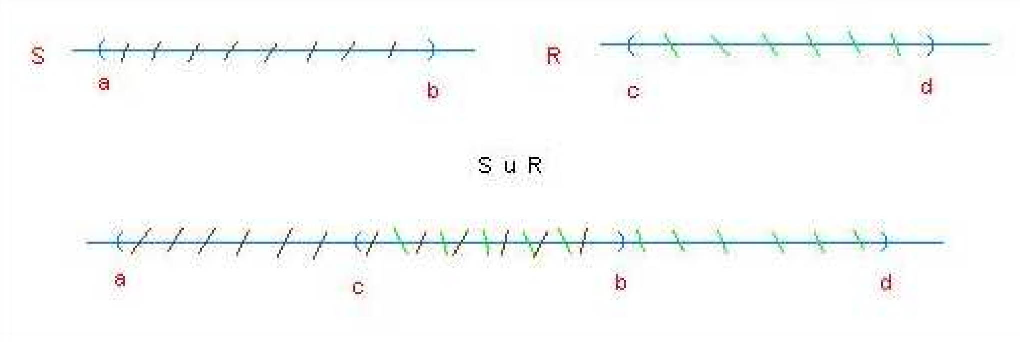
Operaciones con intervalos

Las operaciones estudiadas en los conjuntos, como unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento, son aplicables también en intervalos.

UNION: Se sabe que la unión es la agrupación bajo un mismo conjunto de todos los elementos que hacen parte de la operación.

Sea S = (a, b) y R = (c, d), entonces S ∪ R = (a, b) ∪ (c, d)

Gráficamente:



INTERSECCIÓN: Se trata de identificar los *elementos comunes* de los conjuntos que participan en la operación.

Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Las inecuaciones lineales con una incógnita son de la forma ax + b > c, aunque puede ser con cualquiera de los signos de comparación. La resolución de inecuaciones de este tipo, requiere el uso de las propiedades analizadas en desigualdades y los principios matemáticos básicos.

Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Las inecuaciones con dos variables pueden ser de la forma ax + by < k , ax^2+ by > k, otras. Siendo k un real. Inicialmente se estudiarán las técnicas de resolución de este tipo de inecuaciones para luego analizar algunas aplicaciones.

Resolver una inecuación con dos incógnitas, es hallar un conjunto de puntos en el plano, que llamaremos R, los cuales deben satisfacer la inecuación.

Se expondrá una metodología general para resolver una inecuación con dos incógnitas.

1. Dada la desigualdad ax + by < 0, se expresa temporalmente como igualdad ax + by = 0, para hacer una gráfica,que puede ser una recta, una parábola, etc. Si la desigualdad es estricta (>, <) la

línea límite se hace interrumpida (- - - - -), pero si la desigualdad no es estricta (≥, ≤), la línea será continua (___________).

2. La línea obtenida divide el plano en dos semiplanos, se prueba un punto (x, y) en cada semiplano, para determinar en cual de ellos la desigualdad se hace verdadera. Esto nos indica que solo en uno de ellos, la inecuación es válida.

3. El punto que hace verdadera la desigualdad incluye el semiplano que lo contiene, luego dicho semiplano será la solución, generalmente se subraya o sombrea.

Inecuaciones cuadráticas

Las inecuaciones cuadráticas son de la forma $ax^2 + bx + c < 0$, pero puede ser >, ≤, ≥. Con $a \neq 0$.La resolución para este tipo de inecuaciones es similar al caso de las inecuaciones racionales lineales.

Lo primero que se debe hacer para resolver una inecuación cuadrática es llevarla a la comparación con cero y luego linealizarla; es decir, expresarla como producto de dos factores lineales, lo que se puede hacer por factorización o por la fórmula cuadrática.

Si se tiene la inecuación: $ax^2 + bx + c < 0$, se puede transformar en un producto: $\alpha . \beta < 0$. Cuando la inecuación este de esta manera, se aplica uno de los métodos propuestos, ya sea conectivos lógicos o diagrama de signos.

Conectivos Lógicos:

Dada una inecuación cualquiera, $ax^2 + bx + c > 0$ ó $ax^2 + bx + c < 0$ se puede presenta los siguientes casos.

1. $\alpha . \beta > 0$

Para que el producto de los dos factores sea positivo, hay dos posibilidades:

-) $\alpha > 0$ **Λ** $\beta > 0$ Positivo por positivo produce positivo.

V

-) $\alpha < 0$ **Λ** $\beta < 0$ Negativo por negativo produce positivo

2. $\alpha . \beta < 0$

Para que el producto de los dos factores sea negativo, hay dos posibilidades:

-) $\alpha > 0$ **Λ** $\beta < 0$ Positivo por negativo produce negativo

V

-) $\alpha < 0$ **Λ** $\beta > 0$ Negativo por positivo produce negativo.

Se puede observar que cada posibilidad origina dos intervalos los cuales se intersecan y las dos soluciones de las dos posibilidades se une para obtener la solución total.

Diagrama de Signos:

Por este método se toman los polinomios de los dos factores y se identifica cual valor hace que dichos polinomios sean cero, a ese valor se le llama *valor crítico*. A cada polinomio se le hace una recta real donde se ubica el valor crítico y se coloca signos positivos donde el polinomio es positivo y signos negativos donde el polinomio sea negativo. Finalmente se aplica la ley de los signos para producto y se obtiene intervalos positivos y negativos para la inecuación. La solución depende del tipo de comparación: Si la inecuación cuadrática es mayor que cero, la solución serán los intervalos positivos, pero si es menor que cero, la solución serán los intervalos negativos.

Inecuaciones mixtas

En este contexto se ha determinado que las *inecuaciones mixtas* sean aquellas que además de ser racionales, tengan en el numerador polinomios de grado dos o más, igual en el denominador. El camino de solución para este tipo de inecuaciones es el *diagrama de signos* por su facilidad y mejor manejo.