Master Mathématiques et applications :
Enseignement et formation.

Histoire des sciences mathématiques 1

Eléments d'histoire de l'analyse 1/2 :

« Calcul différentiel et intégral : sa naissance, sa diffusion et la question de ses fondements »

Plan du cours (1/2)

Introduction – lieux de science et circulation des savoirs au XVIIIe siècle :

- Les lieux de science : les académies
- Les correspondances
- Les journaux et périodiques

I. La naissance d'un nouveau calcul

1. Un long héritage...
2. Le calcul fluxionnel newtonien
3. Le calcul différentiel et intégral leibnizien
4. La polémique sur l'invention du nouveau calcul

II. La diffusion et le triomphe du calcul leibnizien

1. Les premiers pas du calcul différentiel et intégral en Europe
2. Son introduction à l'Académie des sciences de Paris
3. Son application à différents problèmes méchaniques
4. L'algorithmisation de la science du mouvement

Plan du cours (2/2)

III. La question des fondements

1. La résistance de l'Académie royale des sciences de Paris
2. L'*Analyste* de Berkeley (1734)
3. Le *Treatise of Fluxions* de Maclaurin (1742)
4. L'article « Calcul différentiel » de D'Alembert dans l'*Encyclopédie*
5. La *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange (1797)
6. La synthèse de François-Sylvestre Lacroix (1797-1798)
7. Cauchy et l'effort de rigueur en Analyse

Introduction (1/3) – Les lieux de science : les académies

- La Royal Society de Londres : existe depuis 1661, elle ne reçoit aucun financement de la couronne et vit des cotisations de ses membres (qui devinrent fort nombreux).

- L'Académie royale des sciences de Paris :

  - Créée par Colbert en 1666. L'Observatoire de Paris naît en 1667 sous l'impulsion de l'Académie.

  - Le 20 janvier 1699, Louis XIV lui attribue son premier règlement. Elle reçoit le titre d'Académie royale et est installée au Louvre. Elle fonctionnera avec ce règlement jusqu'en 1793, date de sa suppression par la Convention.

- Au XVIII^{e} siècle, les Académies se multiplient en Europe : l'Académie de Berlin, créée en 1700 sous l'impulsion de Leibniz, reconnue en 1711 et réorganisée par Frédéric II en 1744 ; l'Académie de Petersbourg, créée en 1724, accueille de nombreux savants étrangers (Daniel Bernoulli, Euler) ; l'Académie de Turin (où Lagrange fait ses débuts), les Académies de Bologne, de Lisbonne, de Göttingen, d'Edinburgh, etc.

- En France, on assiste de même à la naissance de nombreuses académies en Province (Montpellier, Lyon, Toulouse, etc.), de l'Académie de Marine de Brest, etc.

Introduction (1/3) – Les lieux de science : les académies

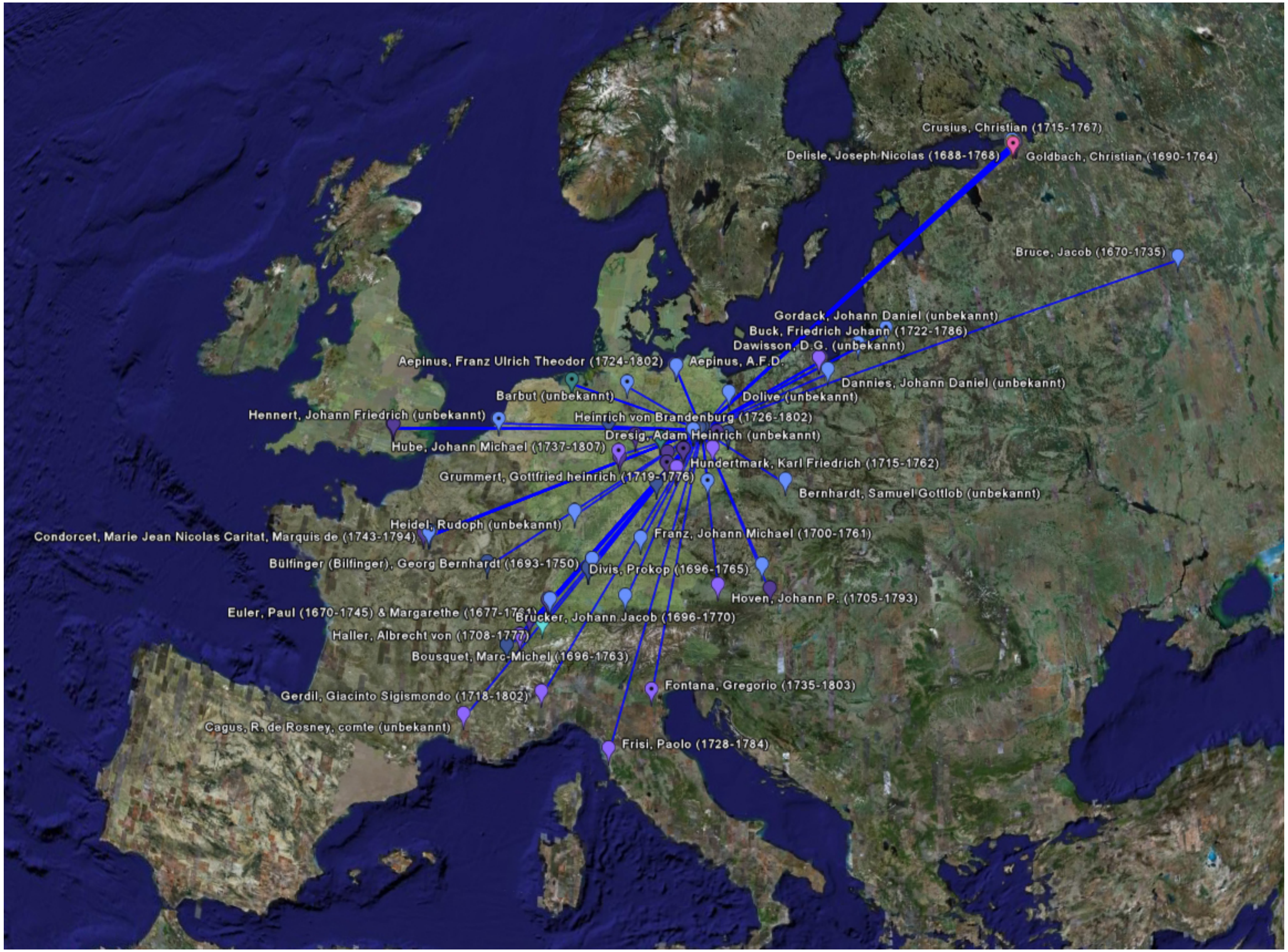
Jean-Baptiste Colbert présentant les membres de l'Académie royale des sciences à Louis XIV (H. Testelin, d'après une gravure de Lebrun)

Introduction (2/3) – Les correspondances

Le réseau de correspondance de D'Alembert (1717-1783)

[document réalisé par I. Passeron]

Introduction (2/3) – Les correspondances

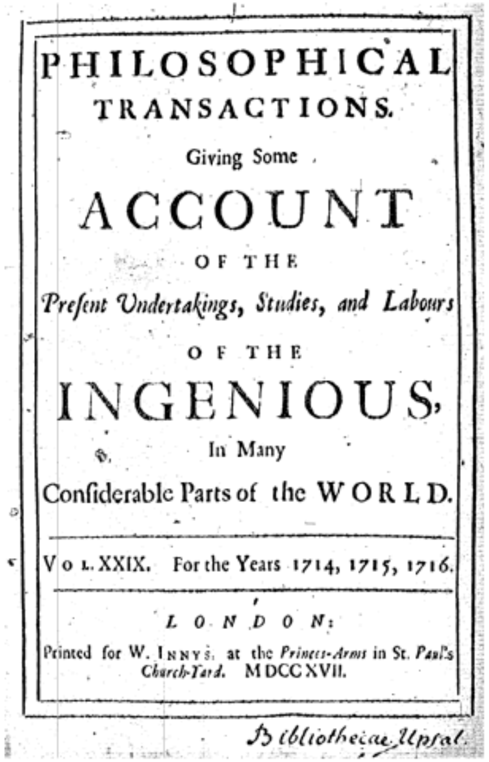


Le réseau de correspondance d'Euler (1707-1783)
[document réalisé par S. Bodenmann]

Introduction (3/3) – Les journaux et les périodiques

- L'impressionnante masse de travaux scientifiques des académiciens (en particulier) se traduit par une multiplication des journaux, gazettes, revues et publications périodiques.

- Les périodiques académiques :



PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS. Giving Some ACCOUNT OF THE Present Undertakings, Studies, and Labours OF THE INGENIOUS, In Many Considerable Parts of the WORLD.

Vol. XXIX. For the Years 1714, 1715, 1716.

LONDON: Printed for W. Innys, at the Princes-Arms in St. Paul's Church-Yard. MDCCXVII.

Bibliothecae Upsal.

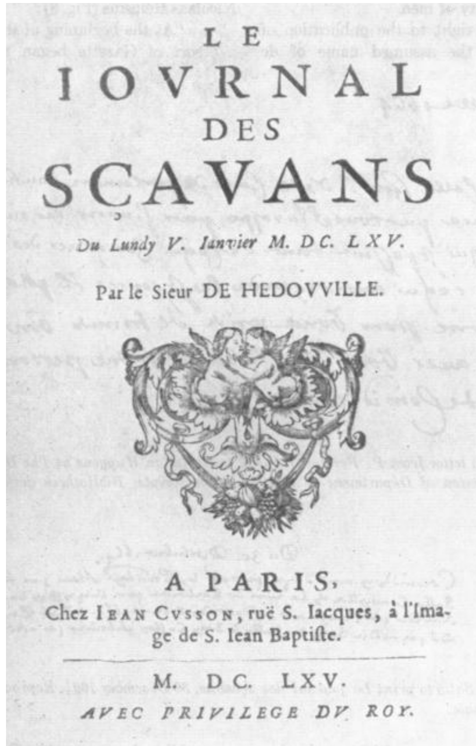
Fondées en 1665, les *Philosophical Transactions* correspondent à la première revue strictement scientifique.

HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

A PARIS, DE L'IMPRIMERIE ROYALE

Les volumes de l'*Histoire de l'Académie royale des science* de Paris.

- Les journaux :



LE IOVRNAL DES SCAVANS

Du Lundy V. Ianvier M. DC. LXV.

Par le Sieur DE HEDOVVILLE.

A PARIS, Chez Iean Cvsson, ruë S. Iacques, à l'Image de S. Iean Baptiste.

M. DC. LXV.

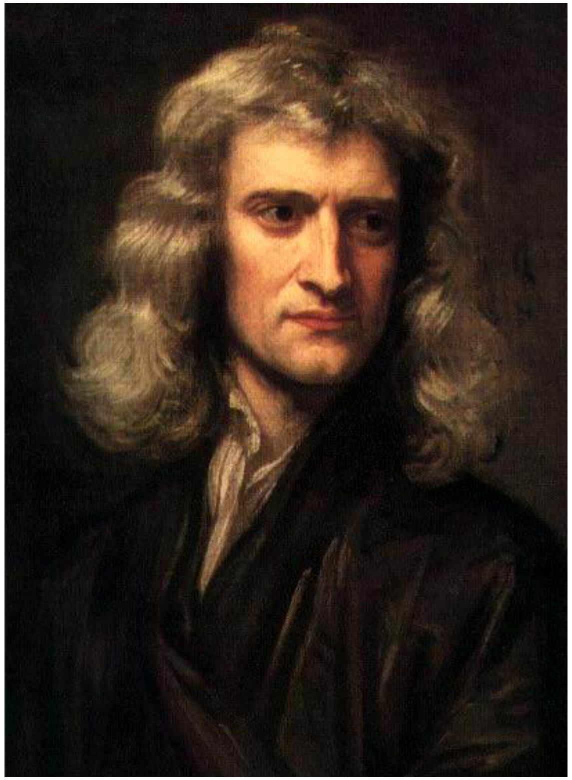
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Le *Journal des savants* naît en 1665. Il traite de mathématiques, de philosophie naturelle, d'histoire, etc.

I. La naissance d’un nouveau calcul

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Isaac Newton
(1643-1727)



Un long héritage...

- Le calcul différentiel : détermination des tangentes associées à une courbe donnée.

  - méthodes analytiques de Fermat et Descartes (XVII^e siècle).
  - méthode géométrique d'Isaac Barrow (XVII^e siècle).

- Le calcul intégral : détermination des aires comprises sous une courbe donnée.

  - la méthode d'exhaustion : Eudoxe de Cnide, Euclide, Archimède, Thabit ibn Qurra, Ibn Al-Haytham...
  - au XVI^e siècle, Simon Stevin et Luca Valerio omettent le double raisonnement par l'absurde, Kepler abandonne les procédés classiques, Cavalieri, Roberval et Grégoire de Saint-Vincent développent la méthode des indivisibles.
  - les méthodes de quadrature de Fermat et de Pascal au XVII^e siècle.

- La découverte du calcul différentiel et intégral tient également à la constatation que ces deux calculs forment deux opérations réciproques :

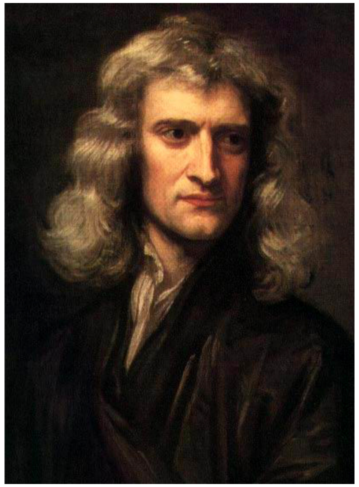
  - Isaac Barrow est le premier à reconnaître ce lien, mais son approche géométrique l'empêche d'en tirer parti.

Un long héritage...

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

- Indépendamment l'un de l'autre, Newton et Leibniz réordonnent et systématisent l'ensemble de ces résultats.
- Ils inventent des procédés algorithmiques de calcul facilement utilisables.
- Ils identifient et manipulent le problème des tangentes comme le problème inverse des quadratures, et vice-versa.
- La généralité de leurs méthodes va permettre à l'analyse infinitésimale de devenir une branche autonome, indépendante de la géométrie.
- Leurs travaux dans ce domaine ne sont pas dénués de considérations métaphysiques (dans le cadre de leurs tentatives de justification du nouveau calcul)...

Isaac Newton (1643-1727)



I.1. Le calcul fluxionnel newtonien (1/3)

- Entre 1664 et les années 1690, Newton élabore trois versions du calcul infinitésimal :

  1669 – Il communique son *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* à quelques mathématiciens anglais (mais ne le publiera pas avant 1711)

  Il y énonce trois règles :

  Règle 1 : Si $y = ax^{\frac{m}{n}}$, alors l'aire sous y est $\frac{an}{n+m}x^{1+\frac{m}{n}}$.

  Règle 2 : Si y est donné par la somme de plusieurs termes (ou par un nombre infini de termes), alors l'aire sous y est donnée par la somme des aires de tous les termes.

  Règle 3 : Pour calculer l'aire sous une courbe $f(x,y) = 0$, il faut exprimer y comme une somme de termes de la forme $y = ax^{\frac{m}{n}}$ et appliquer les règles 1 et 2 [règle fondée sur l'application du binôme de Newton].

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + x^n$$

I.1. Le calcul fluxionnel newtonien (2/3)

1670-1671 – Rédaction du *De methodis serierum et fluxionum* (publié en 1736 !)

Newton définit un algorithme de calcul d'inspiration **cinématique** :

- cet algorithme s'applique à des quantités qui « fluent » au cours du temps (le mouvement d'un point génère une ligne, celui d'une ligne une surface, etc.)
- les quantités générées par ce mouvement sont appelées les « fluentes »

$\dot{x}$

- les vitesses instantanées correspondantes sont appelées « fluxions »

$\dot{x}o$

- les « moments » correspondent aux incréments infiniment petits par lesquels les quantités augmentent au cours de chaque intervalle infinitésimal de temps.

avec *o* un intervalle infinitésimal de temps (notations introduites par Newton dans le courant des années 1690).

1670-1671 – Dans le courant des années 1670, Newton prend ses distances avec la « nouvelle analyse » et abandonne le calcul des fluxions « analytique » au profit d'une géométrie des fluxions sans infiniment petits.

1680 (env.) – Newton compose le *Geometrica curvilinea*

Il y introduit la méthode des « première et dernières raisons » et propose, grâce à elle, une reformulation du calcul des fluxions. Les quantités considérées sont géométriques et ne sont plus infinitésimales.

Notion de limite d'un rapport de deux quantités

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raiſons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence eſt plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

1687 – Publication des *Principia mathematica philosophiae naturalis*

Les *Principia* contiennent un exposé du calcul des fluxions (le premier à être publié par Newton !) proche de celui du *Geometrica curvilinea*.

1691-1692 – Rédaction du *De quadratura curvarum* (publié en 1704)

Le traité contient une version analytique du calcul exposé dans le *Geometrica curvilinea* et les *Principia.*

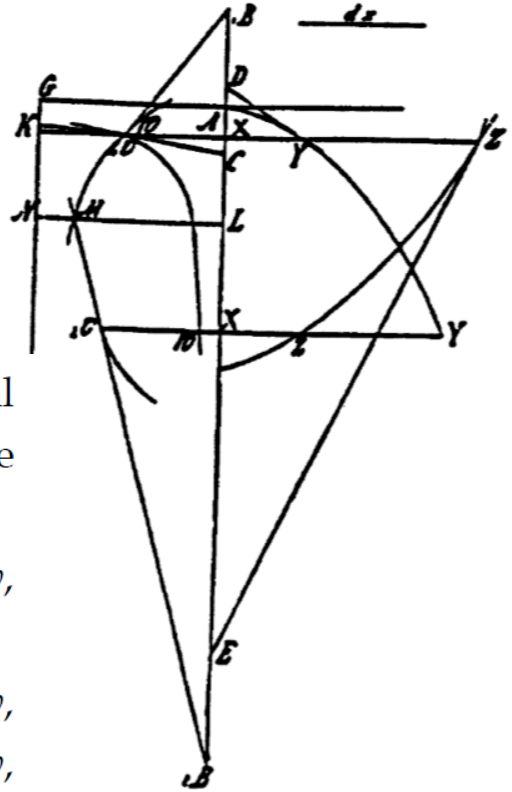
I.2. Le calcul différentiel et intégral leibnizien (1/2)

✓ « Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus », *Acta Eruditorum*, **octobre 1684**.

- Texte court, elliptique et confus (publié à la hâte par crainte d'une indélicatesse de Tschirnhaus)
- Introduction de la différentielle (« differentia ») et de sa notation
- Enoncé des principales règles de la différentiation
- Introduction du quotient *dy/dx* pour exprimer la pente de la tangente en un point d'une courbe.

✓ « De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum », *Acta Eruditorum*, **juin 1686**.

- Le mémoire traite du problème des quadratures
- Il est inspiré d'un mémoire de John Craig consacré aux quadratures et utilisant la notation différentielle introduite par Leibniz en 1684
- Leibniz y introduit le symbole d'intégration et définit les opération de « sommation » et de « différentiation » l'une par rapport à l'autre.



"Soit a une constante donnée, da sera égal à 0 et $\overline{dax}$ sera égal à adx. Si y est égal à v (c'est-à-dire toute ordonnée de la courbe YY égale à l'ordonnée correspondante de la courbe VV), dy sera égal à dv.

Maintenant l'*Addition et la Soustraction* : si $z - y + w + x$ est égal à v, $\overline{dz - y + w + x}$ ou dv sera égal à $dz - dy + dw + dx$.

Multiplication : $\overline{dxv}$ est égal à $xdv + vdx$, c'est-à-dire, en posant y égal à xv, on aura dy égal à $xdv + vdx$. Car on a tout loisir d'employer, soit l'expression xv, soit à sa place pour abréger, une lettre, par exemple y. Remarquons que dans ce calcul, x et dx sont traités de la même façon, de même que y et dy, ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle. Remarquons également que la démarche inverse, à partir de l'équation différentielle, n'est pas toujours possible, si ce n'est avec une certaine précaution dont nous parlerons ailleurs.

Ensuite, la *Division* : $d\frac{v}{y}$ ou (en posant z égal à $\frac{v}{y}$) dz est égal à $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$

I.3. La polémique sur l'invention du nouveau calcul

✓ La querelle est initiée par Nicolas Fatio de Duillier, proche de Newton, dans son *Linea brevissimi descensus investigatio geometrica* (1699) :

> « Convaincu par l'évidence des faits, je reconnais que Newton fut le premier et de plusieurs années le plus ancien inventeur de ce calcul. »

✓ Excessivement longue et violente, elle implique de nombreux proches des deux savants et gagne le terrain des mathématiques en 1713, suite à l'implication de Jean Bernoulli par Leibniz, qui répondait lui même à une accusation de plagiat émanant de John Keill, proche de Newton (en 1711).

✓ Un comité de la Royal Society est nommé pour arbitrer la dispute. Il tranche en faveur de Newton, qui préside l'institution depuis 1703 et rédige lui-même le compte-rendu (publié de façon anonyme en 1715) :

> « Il faut […] qu'il [Leinitz] renonce au droit qu'il prétend avoir à la méthode différentielle de M. Newton en tant que second inventeur : les seconds inventeurs n'ont pas de droit ».

✓ Elle finit par prendre des accents nationalistes, s'élargit aux newtoniens s'opposant au leibniziens puis aux Britanniques contre les Continentaux…

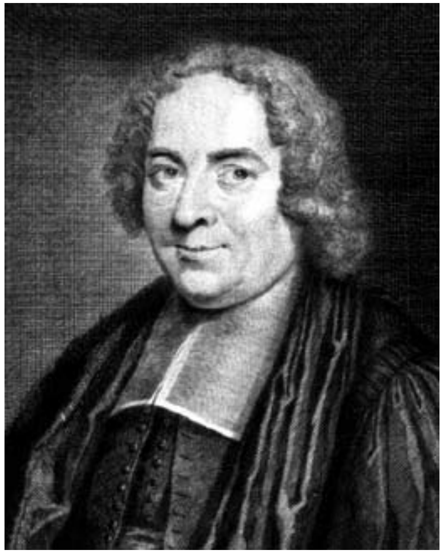
II. La diffusion du calcul leibnizien

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Jacques Bernoulli (1654-1705)

Jean I Bernoulli (1667-1748)

Guillaume de l'Hospital (1661-1704)



Pierre Varignon (1654-1722)

II.1. Les premiers pas du calcul différentiel et intégral en Europe

- Dans une lettre du 15 décembre 1687, Jacques Bernoulli demande des précisions à Leibniz sur son nouveau calcul.

- Leibniz, en voyage en Allemagne, en Autriche et en Italie, met trois ans à répondre... Jacques Bernoulli, de même que son frère Jean, s'initient donc seuls entre 1687 et 1690.

Jean I Bernoulli (1667-1748)

Jacques Bernoulli (1654-1705)

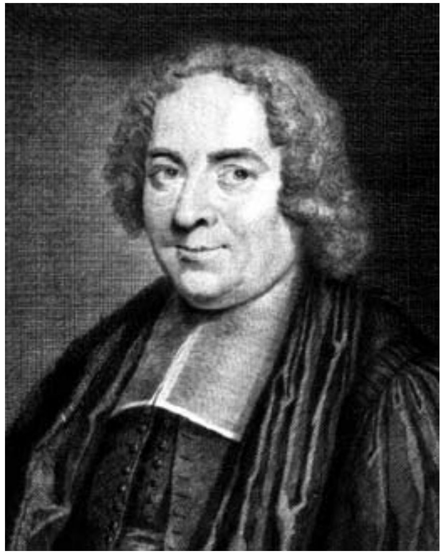
- En contact étroit, Leibniz, Jacques et Jean Bernoulli appliquent le nouveau calcul à différents problèmes lancés sous forme de défis (d'abord aux cartésiens par Leibniz, puis à la communauté savante en général par l'un des trois géomètres).

- Les trois savants sont rejoints par le Marquis Guillaume de l'Hospital après son initiation au nouveau calcul par Jean Bernoulli à l'occasion du voyage de ce dernier à Paris à l'hiver 1691-1692.

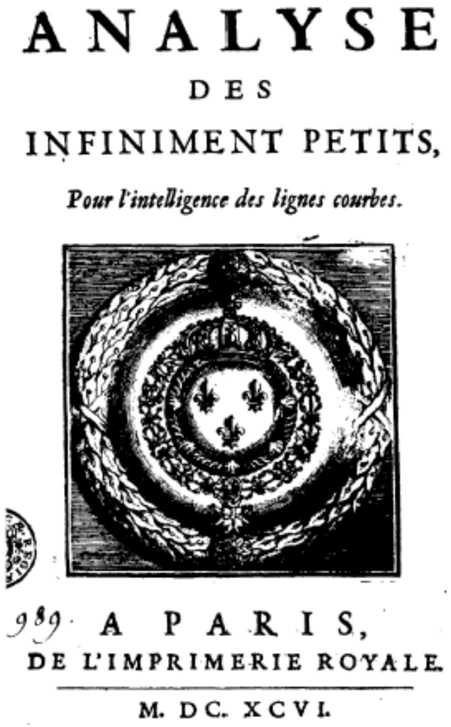
II.2. L’introduction du calcul à l’Académie royale des sciences de Paris

✓ Guillaume de l’Hospital entre à l’Académie des sciences de Paris en juin 1693. En mai et août 1693, puis en juin 1694, il soumet trois mémoires utilisant – sans les détailler – les méthodes du calcul leibnizien.

✓ En juin, juillet, septembre et novembre 1695, Pierre de Varignon fait la lecture de quatre mémoires utilisant le nouveau calcul.



Pierre Varignon (1654-1722)



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
Pour l'intelligence des lignes courbes.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DC. XCVI.

✓ En juin 1696, Guillaume de l’Hospital publie le premier traité de calcul différentiel : l’*Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes*.

✓ Suite à cette parution, Sauveur présente le même mois le nouveau calcul devant l’Académie.

Guillaume de l’Hospital (1661-1704)

II.3. Le nouveau calcul appliqué à des problèmes méchaniques

- A partir des années 1690, les rares savants initiés au nouveau calcul (Leibniz, Jean Bernoulli, Jacques Bernoulli, Guillaume de l'Hospital et Varignon) se soumettent différents problèmes sous forme de défis par l'intermédiaire de journaux, de périodiques, ou dans le cadre de leur correspondance (Huygens y participe aussi le plus souvent, mais sans utiliser le calcul différentiel et intégral, auquel il reste réfractaire).

- Une large part de ces problèmes a pour objet la détermination de trajectoires décrites, sous certaines conditions, par des corps en mouvement :

  - le problème de la courbe isochrone : détermination de l'équation de la courbe suivie par un corps décrivant des espaces égaux en des temps égaux.

  - le problème de la courbe brachystochrone : détermination de l'équation de la courbe décrite entre deux points dans le temps le plus bref par un corps soumis à la pesanteur.

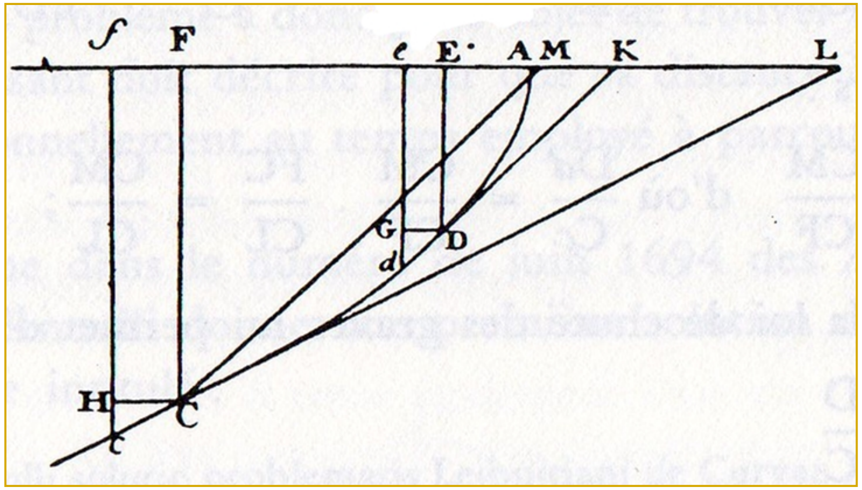
  - le problème de la caténaire ou de la « chaînette » : détermination de la courbe formée par un fil suspendu à ses extrémités et soumis à la pesanteur (donc à son propre poids, réparti de façon uniforme).

  - le problème de la tractrice (courbes aux tangentes égales), etc.

Le problème de la courbe isochrone

- En septembre 1687, Leibniz lance un défi aux cartésiens :

« Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descend uniformément, et approche également l'horizon en temps égaux. L'Analyse de Messieurs les cartésiens le donnera peut-être aisément. »
(*Nouvelles de la République des Lettres*, 1687, p. 956)



- Octobre 1687 : publication d'une première solution par Christiaan Huygens ne faisant pas usage du calcul différentiel et intégral.

- Avril 1689 : Leibniz publie sa solution mais n'y a pas explicitement recours au nouveau calcul.

- Mai 1690 : solution de Jacques Bernoulli (1ère apparition du terme « intégration »)

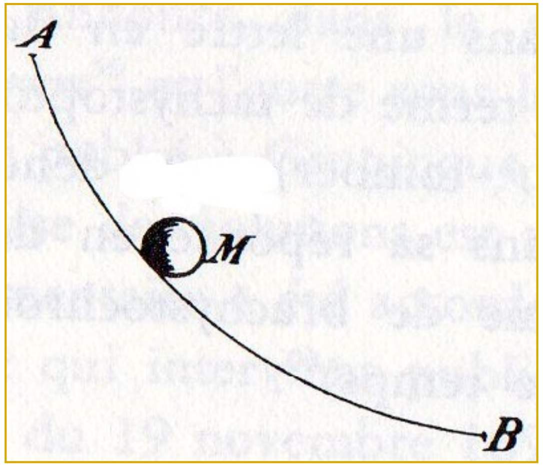
- 1690 [?] : solution de Jean Bernoulli

Solutions en deux parties :
- 1ère partie : le problème physique est ramené à un problème de géométrie
- 2e partie : résolution de ce problème grâce au calcul différentiel et intégral.

Le problème de la courbe brachystochrone

- En juin 1696, Jean Bernoulli lance un nouveau défi :

« Datis in plano verticali duobos punctis A et B, assignaremobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B. »
(*Acta Eruditorum*, juin 1696, p. 269)



- Dans sa lettre du 16 juin 1696, Leibniz fait parvenir une solution à Jean Bernoulli.

- Publication des solutions de Jacques Bernoulli, Jean Bernoulli et Guillaume de l'Hospital dans le numéro de mai 1697 des *Acta Eruditorum*.

- Toujours des solutions obtenues en deux étapes :
  - 1ère étape : le problème physique est ramené à un problème de géométrie
  - 2e étape : résolution de ce problème grâce au calcul différentiel et intégral.

La courbe cherchée est un arc de cycloïde…

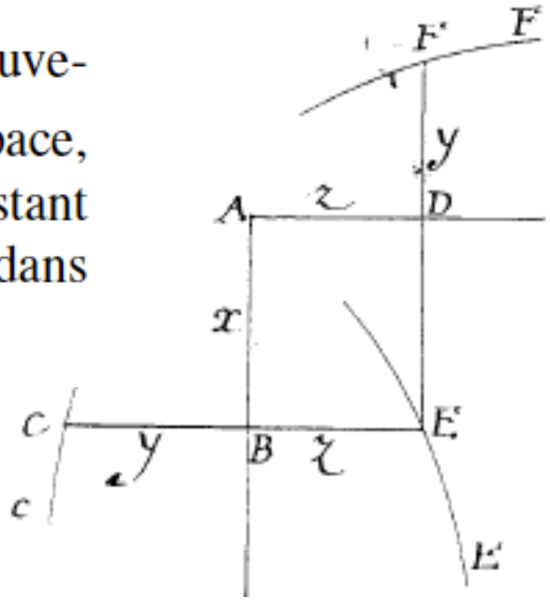
✓ Dans deux mémoires présentés les 5 juillet et 6 septembre 1698, Pierre Varignon élabore le concept de « vitesse dans chaque instant » :

« Pour le voir (tous les angles rectilignes de la figure qu'on voit icy, etant droits) soient $AB = x$ les espaces parcourus en quelque sens qu'on voudra, $BE = z$ les temps employez à les parcourir, et $BC = y = DF$ les vitesses à chaque point B de ces espaces.

[...]

De sorte que cette vitesse (y), dans chaque instant pouvant être regardée comme uniforme, a cause que $y \pm dy = y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = \frac{dx}{dz}$ pour la regle de tous les mouvemens variés comme on voudra, c'est a dire quelque rapport d'espace, de temps, ou de vitesse, qu'on suppose ; la vitesse de chaque instant etant toujours et par tout egale au quotient de l'espace parcouru dans chaque instant divisé par cette même differentielle de temps. »

(*Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris*, t. 17, f. 298 v° - 299 r. [« 1er mémoire »])



II.4. L'algorithmisation de la science du mouvement

✓ Le 30 janvier 1700, Varignon présente un nouveau mémoire intitulé « Manière générale de déterminer les forces, les vitesses, les espaces, et les temps… ».

✓ Il y traite de la question des forces centrales introduites par Newton dans ses *Principia* (1687) et de l'accroissement de vitesse (i.e. de l'accélération) qu'elles produisent :

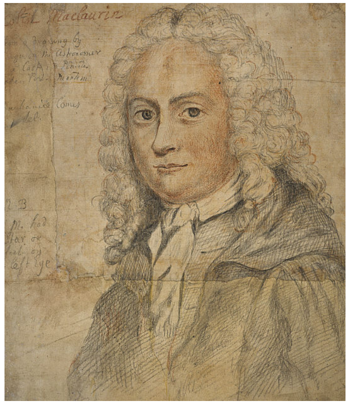
> « De plus les espaces parcourus par un corps mû d'une force constante et continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, étant en raison composée de cette force et des quarrés des temps employés à les parcourir ; l'on aura aussi $ddx = ydt^2$, ou $y = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Ce qui fait encore une Règle $y = \frac{dv}{dt}$, qui avec la précédente $v = \frac{dx}{dt}$, satisfait à tout ce qu'on se propose icy de résoudre. »
>
> (*Histoire et mémoires de l'Académie royale des sciences. Partie mémoires*, année 1700 (1703), p. 23.)

✓ Varignon se repose, ce faisant, sur les concepts physiques de vitesse et d'accélération instantanés introduits par Newton dans ses *Principia*.

Il traduit, en quelque sorte, la physique newtonienne en langage leibnizien !

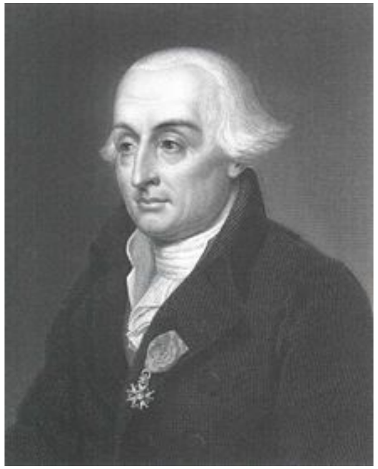
III. La question des fondements

Georges Berkeley
(1685-1753)



Colin Maclaurin
(1698-1746)

Jean Le Rond
D'Alembert
(1717-1783)



Joseph-Louis Lagrange
(1736-1813)

Augustin-Louis Cauchy
(1789-1857)

III.1. La résistance de l'Académie de Paris à l'introduction du nouveau calcul

✓ En février 1697, Philippe de La Hire (1640-1718) présente un court mémoire intitulé « Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits » :

- sans précautions, la « méthode des infinis » peut conduire à des erreurs
- la « géométrie ordinaire » (ou « géométrie des anciens ») demeure un garde fou nécessaire.

✓ D'autres savants partagent les doutes de Philippe de La Hire, en particulier l'abbé Bignon, le père Gouye, l'abbé Gallois et Michel Rolle.

✓ Le 6 août 1697, Varignon écrit à Jean Bernoulli :

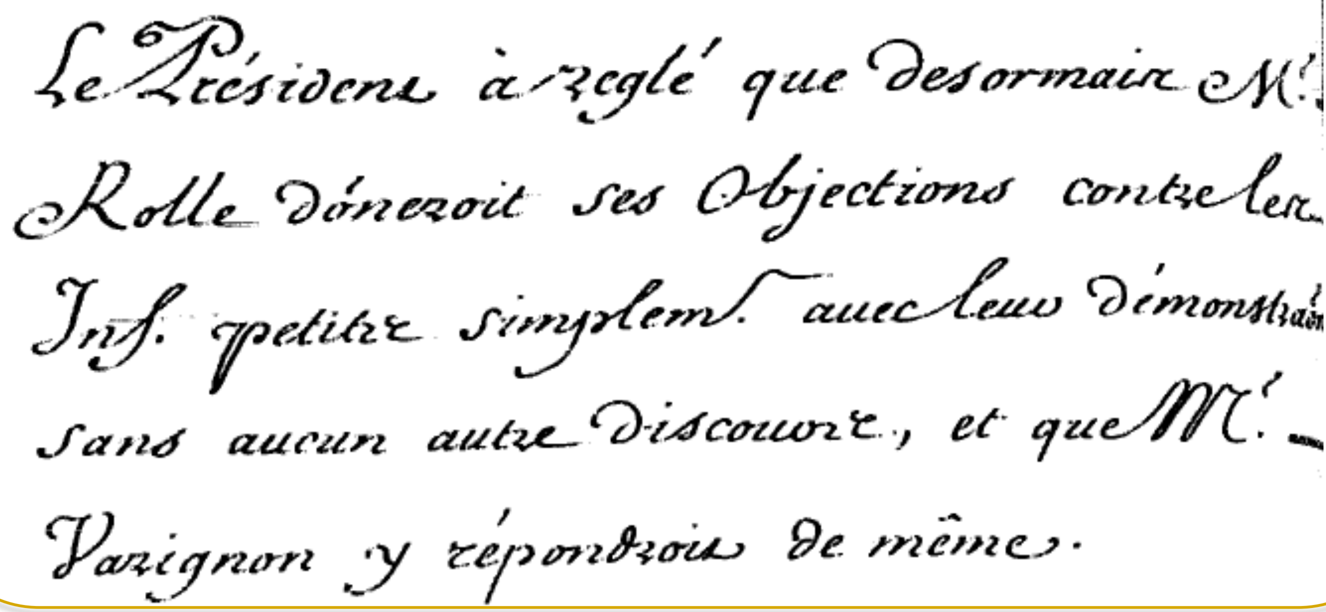
« M. le Marquis de l'Hospital est encore à la campagne de sorte que je me trouve seul ici chargé de la défense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr tant j'ay desja soutenu d'assauts pour eux contre certains mathématiciens du vieux stile, qui chagrins de voir que par ce calcul les jeunes gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peuvent pour la décrier, sans qu'on puisse obtenir d'eux d'écrire contre ».

- ✓ Le 17 juillet 1700, le débat débute avec la lecture d'un mémoire de Michel Rolle critiquant le manque de rigueur des concepts et principes fondamentaux du calcul différentiel et intégral leibnizien.

- ✓ En l'absence du Guillaume de l'Hospital, Pierre Varignon prend la défense du nouveau calcul et répond à Rolle dans un mémoire présenté les 7 et 11 août 1700.

- ✓ Dans quatre autres mémoires, Michel Rolle tente de montrer, à partir de l'étude de plusieurs exemples de courbes, que le nouveau calcul conduit à l'erreur…

Registres manuscrits des procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris, t. 20, f. 183 r° - v° (séance du 21 mai 1700)



Le Présidens à reglé que desormais M.r
Rolle dóneroit ses Objections contre les
Inf. petites simplem.t avec leur démonstrat.n
sans aucun autre discours, et que M.r
Varignon y répondroit de même.

III.1. La résistance de l'Académie de Paris à l'introduction du nouveau calcul

✓ Les trois difficultés soulevées par Michel Rolle contre le nouveau calcul dans son premier mémoire du 17 juillet1700 (d'après la réponse de Varignon) :

- « **Difficulté I.** Si en geometrie il y a des infiniment grands, infinis les uns des autres ; et des infiniment petits, infiniment les uns des autres ».

  « L'Analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénètre jusques dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : et par là elle fait connoitre ceux des grandeurs finies qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisiemes, quatriemes, et ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis. »
  (Guillaume de l'Hospital, *Analyse des infiniment petits*, préface, p. 1-2)

- « **Difficulté II.** Si une grandeur plus ou moins sa différentielle, peut estre prise pour egale a cette même grandeur ».

- « **Difficulté III.** Si les différentielles sont des zéros absolus ».

III.2. L'*Analyste* de George Berkeley (1734)

✓ Dans l'*Analyste* (1734), George Berkeley reprend l'essentiel des critiques de Michel Rolle concernant le manque de rigueur, mais vise à la fois le calcul fluxionnel de Newton et le calcul leibnizien :

Georges Berkeley (1685-1753)

> *« Je ne discute en rien vos conclusions, mais seulement votre logique et votre méthode. Comment démontrez-vous ? De quel objet vous occupez-vous et les concevez-vous clairement ? Avec quels principes progressez-vous ? Quel en est la validité ? Et comment les mettez-vous en œuvre ?*
>
> […]
>
> *En vérité, on doit reconnaître que les mathématiciens modernes ne considèrent pas ces points [les fluxions et les infinitésimaux] comme des mystères, mais comme conçus clairement et maîtrisés par leurs esprits étendus. Ils n'hésitent pas à dire qu'à l'aide de cette nouvelle analyse, ils peuvent pénétrer jusque dans l'infini lui-même, qu'ils peuvent même étendre leurs vues au-delà de l'infini.*
>
> […]
>
> *J'admets qu'on puisse créer des signes pour dénoter quelque chose ou rien ; et que, par conséquent, dans l'expression primitive $x + o$, o a pu représenter, soit un incrément, soit rien. Mais alors, quoi que vous lui fassiez représenter, vous devez raisonner en conformités avec notre convention et ne jamais recourir à une ambiguïté. »*

III.3. Le *Treatise of Fluxions* de Maclaurin (1742)

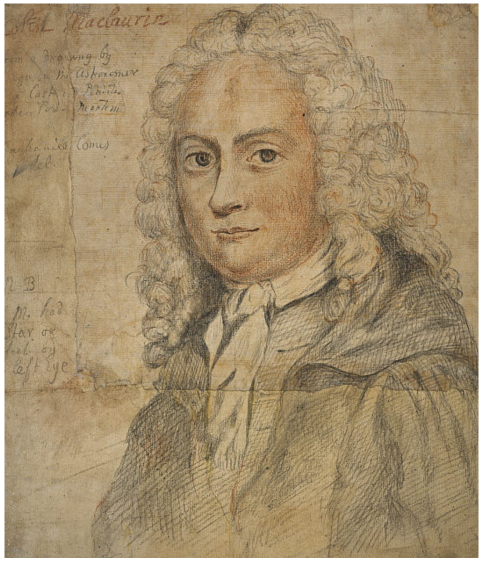
✓ Dès la parution de l'*Analyste*, de nombreux mathématiciens choqués répondent aux attaques de Berkeley. Parmi eux, James Jurin, John Walton et Benjamin Robins.

✓ Maclaurin décide également de répondre en rédigeant un ouvrage identifiant et démontrant rigoureusement les fondements du calcul des fluxions :

> « C'est pourquoi, dès que cette pièce [l'*Analyste*] fut tombée entre mes mains, (et avant que j'eus connaissance des Ouvrages que d'autres avoient entrepris pour la réfuter), je formai le dessein de démontrer ce élémens à la manière des Anciens, et de ne les appuyer que sur un petit nombre de principes incontestables, par les démonstrations les plus rigoureuses. »
> (*Traité des fluxions*, trad. par le Père Pézenas,1749, préface, p. ix.)

✓ Le *Treatise of Fluxions* de Maclaurin paraît en 1742.

- Premier Livre : « Sur les Fluxions des Grandeurs Géométriques »
- Second Livre : « Sur le calcul dans la méthode des fluxions »



Colin Maclaurin (1698-1746)

III.4. L’article « Calcul différentiel » de D’Alembert dans l’*Encyclopédie*

« M. Newton […] n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode des premieres & dernieres raisons, c'est-à-dire la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi cet illustre auteur n’a-t-il jamais différentié des quantités, mais seulement des équations ; parce que toute équation renferme un rapport entre deux variables, & que la différentiation des équations ne consiste qu'à trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux variables que l'équation renferme.

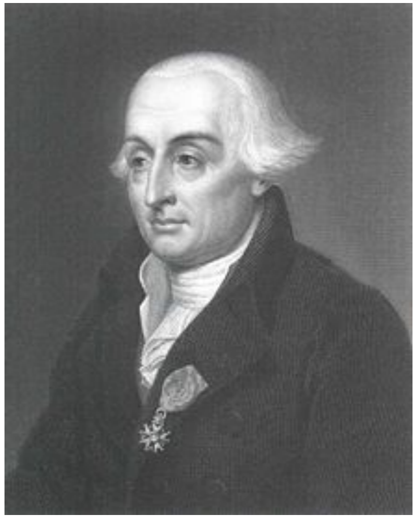
Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783)

[…]

Quand une fois on l’aura bien comprise, on sentira que la supposition que l'on y fait de quantités infiniment petites, n'est que pour abréger & simplifier les raisonnemens ; mais que dans le fond le calcul différentiel ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantités ; que ce calcul ne consiste qu'à déterminer algébriquement la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, & à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche. Cette définition est peut-être la plus précise & la plus nette qu'on puisse donner du calcul différentiel. »

III.5. La *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange (1797)

▪ Dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, publiée en 1797, Lagrange tente de fonder le calcul différentiel et intégral sur la base d'une approche radicalement différentes celles de Leibniz, Newton et Maclaurin, D'Alembert et Euler...



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

... réduire le calcul différentiel et intégral à l'algèbre en se dégageant, comme l'indique le titre complet de l'ouvrage, « de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions ».

▪ Il évacue les notions de limite et d'infiniment petit pour ne conserver que celles de fonction (« continue », dans le sens qu'Euler donne à ce terme) et de séries entières.

▪ Pour Lagrange, tout fonction d'une variable x considérée en $x+i$ au lieu de x (avec i quantité quelconque) peut être développée en une série entière

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$$

dans laquelle les coefficients p, q, r... sont de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction $f(x)$ et indépendantes de i (il s'agit de la formule de Taylor...).

III.6. La synthèse de François-Sylvestre Lacroix (1797-1798)

- L'approche de Lagrange n'est pas rigoureuse car elle ne permet pas, en l'absence de la notion de limite, de démontrer la convergence des séries.

- Les analystes du XIXe siècle rejetteront le développement en séries de Taylor comme fondement du calcul différentiel et intégral, mais reconnaîtront néanmoins la pertinence de l'approche de Lagrange en ce qu'elle :

  - aura permis, dans la droite ligne d'Euler, à faire de la fonction le concept central de l'analyse,

  - constitue un tournant théorique dans la recherche de fondements rigoureux.

- Autre signe d'un désir partagé de fonder le calcul différentiel et intégral : la parution en trois volumes, en 1797 et 1798, du *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de François-Sylvestre Lacroix, qui rassemble une synthèse très complète des travaux des savants du XVIIIe siècle dans le domaine de l'Analyse...

III.7. Cauchy et l'effort de rigueur en analyse

- Le mathématicien tchèque Bernard Balzano (1781-1848) est le premier à donner une définition claire des des notions de base du calcul différentiel et intégral (la limite, la continuité d'une fonction, sa dérivabilité et le lien entre continuité et dérivabilité), mais ses travaux passent inaperçus...

- Dans son *Cours d'analyse* (1821), son *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) et ses *Leçons sur le calcul différentiel et intégral* (1829), Cauchy fonde le calcul différentiel et intégral sur la notion de limite, dont il fait un concept arithmétique :

> « Lorsque les valeurs successivement attribuées à un même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peut que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres ».

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

- Il définit en terme de limites les notions d'infiniment petit (suite convergente ayant zéro pour limite), de continuité, de dérivée d'une fonction continue (limite du taux d'accroissement), mais n'explicite pas le lien entre continuité et dérivabilité.

- La notion de limite lui permet également de donner une première définition précise de l'intégrale...

III.7. Cauchy et l'effort de rigueur en Analyse

- Cauchy adopte, pour ce faire, l'approche leibnizienne consistant à interpréter l'aire sous une courbe comme une somme de rectangles. Soit une fonction *f* définie et continue sur un intervalle $[x_0, X]$, il subdivise l'intervalle en *n* sous-intervalles x_1-x_0, x_2-x_1, ..., X-x_{n-1} et démontre que la limite de la somme

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

lorsque la longueur du plus grand sous-intervalle tend vers zéro existe si la fonction *f* est continue sur l'intervalle $[x_0, X]$: « cette limite est ce que l'on appelle une intégrale définie ».

- Cauchy se penche également sur la question de la convergence des séries : « Avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les définitions de leur convergence ; et j'ai à ce sujet établi des règles générales qui me paraissent mériter quelques attentions » (*Cours d'analyse,* 1821, Introduction, p. v).

- Cet effort de rigueur sera poussé à son terme par le mathématicien allemand Karl Weierstrass, qui donne notamment une définition en termes « de deltas et d'epsilons » de la notions de limite.

Karl Weierstrass (1815-1897)