Esempi svolti SL(2,2)

Esempio 1

$$\begin{cases} 9x + 3y - x^2 = 5 - x^2 \\ 3x - 2y + 3 = -4y - 3x \end{cases}$$

Portiamo in forma standard o normale $\begin{cases} 9x + 3y = 5 \\ 6x + 2y = -3 \end{cases}$

Verifichiamo se il sistema è determinato, indeterminato o impossibile sfruttando la condizione sui coefficienti:

$$\begin{matrix} a_{11} = 9 & a_{12} = 3 \\ a_{21} = 6 & a_{22} = 2 \end{matrix} \rightarrow \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{\cancel{9}\,3}{\cancel{6}\,2}; \quad \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{3}{2}$$

Poiché $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{3}{2}$ il sistema è indeterminato o impossibile. Andiamo a calcolare $\frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{-3}$

Poiché $\frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{-3} \neq \frac{3}{2} = \frac{a_{11}}{a_{21}}$ il sistema è impossibile.

Ad un risultato analogo giungiamo calcolando il determinante della matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 9 \cdot 2 - (6 \cdot 3) = 18 - 18 = 0$$

Poiché il $\det(A) = 0$ allora il sistema non è determinato, ovvero è impossibile o indeterminato.

Esempio 2

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{y}{9} = 6 \\ x - \frac{y}{3} = 6 \end{cases}$$

Il sistema è in forma standard

1) Verifichiamo se è determinato sfruttando la condizione sui coefficienti:
   $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}; \quad \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{-\frac{1}{9}}{-\frac{1}{3}} = +\frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}$ Poiché $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$ il sistema è determinato
2) Procediamo a cercare la soluzione con
   a. **Metodo sostituzione**
      Cerchiamo di scegliere l'equazione e la variabile da esplicitare in modo da non avere troppe frazioni da gestire:

ricaviamo dalla seconda equazione la x:

$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{y}{9} = 6 \\ x = \frac{y}{3} + 6 \end{cases}$ sostituiamo l'espressione nella prima equazione (utilizziamo le parentesi!) $\begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{y}{3} + 6\right) - \frac{y}{9} = 6 \\ x = \frac{y}{3} + 6 \end{cases}$

Svolgiamo i calcoli nella prima equazione $\begin{cases} \frac{y}{9} + 4 - \frac{y}{9} = 6 \\ x = \frac{y}{3} + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{y}{9} = 2 \\ x = \frac{y}{3} + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 18 \\ x = \frac{y}{3} + 6 \end{cases}$

Torniamo a sostituire il valore trovato nella seconda equazione $\begin{cases} y = 18 \\ x = \frac{18}{3} + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 18 \\ x = 12 \end{cases}$

b. Metodo Cramer

i. Matrice coefficienti e termini noti: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

ii. Calcoliamo il determinante di A: $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(1 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)\right) = -\frac{1}{9}$

iii. Calcoliamo AX e il suo determinante: $AX = \begin{bmatrix} 6 & -\frac{1}{9} \\ 6 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $\det(AX) = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12} = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(6 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)\right) = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$

iv. Calcoliamo il valore di $x = \frac{\det(AX)}{\det(A)} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{1}{9}} = +\frac{4}{3} \cdot 9 = 12$

v. Calcoliamo AY e il suo determinante: $AY = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ $\det(AY) = \frac{2}{3} \cdot 6 - (1 \cdot 6) = -2$

vi. Calcoliamo il valore di $y = \frac{\det(AY)}{\det(A)} = \frac{-2}{-\frac{1}{9}} = +18$