Herramientas computacionales en el desarrollo de procesos de interpretación y argumentación en la clase de matemáticas[1]

John Jairo Múnera Córdoba
Liceo Comercial Pacho Luis Álvarez, Medellín
Gloria Galvis Vingues
Normal Superior María Auxiliadora, Medellín
Carlos Mario Cárdenas
Colegio Santa Teresa, Medellín
Francisco Osuna Martínez
Escuela Normal Superior, Envigado
Gilberto Obando, Fabián Posada, Alexander Jiménez & John Mario Sepúlveda
Universidad de Antioquia, Medellín

Resumen. Los instrumentos computacionales en la educación matemática se han convertido en una alternativa para dinamizar los procesos de aprendizaje y por consiguiente movilizar el pensamiento matemático de los estudiantes. Tomando como punto de partida el concepto de sistema representacional, documentamos aquí los cambios cualitativos de los estudiantes en cuanto a la argumentación y comunicación de ideas matemáticas. El desarrollo de una situación problema relacionada con el pensamiento numérico y, mediada por los diversos registros de representación que proporciona la calculadora TI-92 plus.

Introducción

Ignorar los aportes de las tecnologías de la información y la comunicación en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas es desconocer las diversas posibilidades de interacción de los estudiantes con el quehacer matemático a través de dichos mediadores y privarlos de los acercamientos conceptuales que ofrecen los diferentes sistemas de representación de las herramientas informáticas. En particular, la utilización de calculadoras gráficas dotadas de software interactivo especializado para entornos escolares, está permitiendo a estudiantes y docentes tratar los conceptos matemáticos a través de la relación entre las diferentes representaciones ofrecidas. Estos recursos han puesto en manos del docente un gran potencial para hacer de las matemáticas un espacio significativo en el desarrollo del pensamiento y la creatividad.

El propósito de este artículo es mostrar los cambios que se evidencian en las formas de argumentación de los estudiantes a partir de la utilización de diferentes sistemas de representación. La situación problema propuesta hace alusión a un problema convencional de la aritmética escolar, cuyo único propósito, al tratarla sólo con papel y lápiz, ha sido aplicar el concepto de mínimo común múltiplo. Al incorporar para su tratamiento la mediación instrumental, los estudiantes, de un lado, indagan y analizan mejor la situación, y de otro, amplían las reflexiones en cuanto a las relaciones entre los conceptos involucrados y por consiguiente comunican de manera más elaborada sus argumentos conceptuales.

---

[1] Ponencia en:
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Memorias del Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Mayo de 2002. Bogotá, D.C., Colombia.

Marco teórico

Si bien el concepto de representación es de gran complejidad, y admite diferentes posibilidades de interpretación, es ampliamente aceptada la acepción en la que se piensa la representación como el acto a través del cual algo está en lugar de, o evocando a, otra cosa ausente. Kaput (1987a), propone que toda representación hace referencia a dos dominios claramente diferenciados e interrelacionados: el mundo representante (la representación, lo simbólico) y el mundo representado (el objeto, el concepto). También propone que la actividad representacional es intrínseca a la actividad matemática misma dado que los objetos conceptuales son abstractos y no se puede acceder a ellos sino a través de sus representaciones. La actividad matemática misma es impensable por fuera de los sistemas utilizados en la representación. Aparece pues, una unidad indisoluble que plantea que los sistemas de representación 'representan' los conceptos matemáticos, pero a su vez, los conceptos matemáticos se estructuran a partir de los sistemas de representación. Esta identidad hace que los sistemas de representación jueguen un papel fundamental en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Adicionalmente, en el hacer matemático, la representación de unas estructuras por otras es una actividad natural y ha permitido enormes desarrollos a las matemáticas. Muestra de tal actividad representacional se puede ver en los morfismos, en los isomorfismos, en las construcciones algebraicas, en las representaciones geométricas, etc.

Conviene sin embargo aclarar que en ocasiones, cuando un concepto se trabaja a partir solo de un registro, da origen a distorsiones en el tratamiento didáctico de la enseñanza de las matemáticas, pues termina confundiéndose el representante con lo representado, y por ende, desde esta perspectiva la experiencia matemática propuesta a los estudiantes es muy pobre. Dicho de otra manera, no puede asumirse que los sistemas de representación sean neutros en el aprendizaje de las matemáticas. Esto es, no deben entenderse los sistemas representacionales solo como una externalización de lo que está en la mente, sino que se debe asumir que la organización conceptual en la cognición humana es el resultado de los sistemas representacionales utilizados, y que por tanto, han moldeado la comprensión matemática misma.

Así pues, las experiencias de aula deben permitir al alumno construir significados a partir de la interacción con diversos sistemas de representación. Pero esta interacción no debe quedarse en el acto de traducir de un sistema a otro. Se debe posibilitar, en términos de Duval (1999), la coordinación entre sistemas de representación. Esta coordinación debe entenderse como la posibilidad de identificar los elementos estructurales que en un sistema de representación dado están cumpliendo con la función de la representación, y ponerlos en relación con los elementos estructurales del otro sistema de representación. Así, se puede determinar cómo un sistema influye en el otro o viceversa, y cómo, en su conjunto, determinan la pluralidad de sentidos y significados para el o los conceptos matemáticos representados.
Por ejemplo, en la enseñanza de la aritmética, el trabajo sobre la multiplicación es presentado de manera estática por medio de un único tipo de representación asociado al esquema de suma de sumandos iguales. Por el contrario, si dicho trabajo se realiza desde el estudio de situaciones matemáticas enfocadas en la búsqueda de relaciones multiplicativas a través del cambio y la covariación, se puede aprovechar la riqueza de las diferentes representaciones: una simulación, toma y organización de datos en arreglos tabulares, representación gráfica de los mismos y búsqueda de expresiones

simbólicas, y por lo tanto, la riqueza semántica construida por los estudiantes es más significativa.

Diseño de la experiencia

En la experiencia se seleccionó como muestra un grupo de grado séptimo de estrato socioeconómico bajo, fundamentalmente 1 y 2. Con esta población se realizó, previamente a las situaciones planteadas, un trabajo centrado en el manejo básico de los programas instalados en la calculara (Cabri, editor de datos, editor de funciones, home, etc). En general las situaciones problemas fueron abordadas en pequeños grupos de tres o cuatro alumnos.

Las situación problema propuesta al grupo fue la siguiente:

> *Una pista de carreras de autos tiene forma circular. Tres autos de marcas Toyota, Honda y Mazda, inician la carrera desde la meta. Durante el desarrollo de la carrera se observa que el carro Toyota siempre tarda 3 minutos en dar una vuelta, que el carro Honda siempre emplea 4 minutos en dar una vuelta y que el Mazda siempre tarda 6 minutos en dar una vuelta. La carrera está programada para 200 vueltas. ¿en qué momento de la carrera los tres autos vuelven a pasar de manera simultánea por la meta?.*

La secuencia de enseñanza parte del principio de permitir el análisis de una misma situación problemática a partir de diferentes sistemas de representación, y la coordinación entre ellos. Es decir, a partir de la información suministrada por un sistema de representación, se identifican aspectos estructurantes del concepto que están presentes en otro y se reconoce nueva información a partir del análisis de las representaciones.

Así pues, la situación parte de un trabajo inicial con lápiz y papel que permite a los estudiantes una primera aproximación a la situación problémica propuesta. En este trabajo inicial se ponen en juego sistemas de representación numérica y tablas de datos.

Un segundo momento de la actividad se realiza con la ayuda del ambiente representacional ofrecido con la calculadora TI-92. De esta manera, en el Cabri se simula la situación problema[2], y a partir de allí, aprovechando la ejecutabilidad de las

---

[2] *Cómo se realizo la modelación del problema paso a paso: Después de varios intentos de modelación se llego a la siguiente, la cual es interesante por su sencillez. a- Dibuje una circunferencia y mida su longitud. b- Dibuje un punto sobre esta circunferencia (este punto será la meta). c- Utilizando edición numérica, escriba cualquier número (por ejemplo 2.5). Este número representa el tiempo transcurrido de carrera. d- Divida la longitud de la circunferencia entre 3, 4, 6. Los valores obtenidos expresan las velocidades de Toyota, Honda, Mazda respectivamente. e- Multiplique cada una de las velocidades de los autos por el tiempo. Cada uno de estos valores expresará la distancia por cada auto (suponiendo que el movimiento fuera línea recta). f- Transfiera la distancia recorrida a partir del punto de meta. Los puntos obtenidos representan a cada uno de los autos en carrera.*

representaciones informáticas, se procede a analizar la situación y a confrontar el trabajo realizado solo con lápiz y papel.

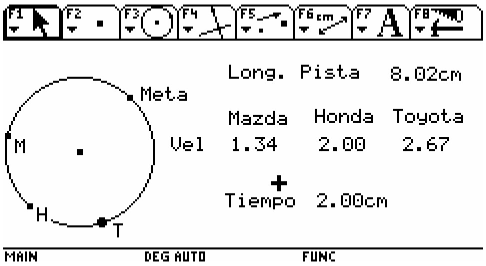


Figura 1: Pantalla del archivo de simulación

En un tercer momento se sugiere a los alumnos llenar una tabla de doble entrada en la que se consignen el tiempo y el número de vueltas de cada auto. Estas tablas se realizan con lápiz y papel y, en algunos casos con la ayuda del archivo de simulación.

Finalmente se utiliza la toma automática de datos de la calculadora TI-92, para llenar las tablas y se realizan las respectivas gráficas cartesianas.

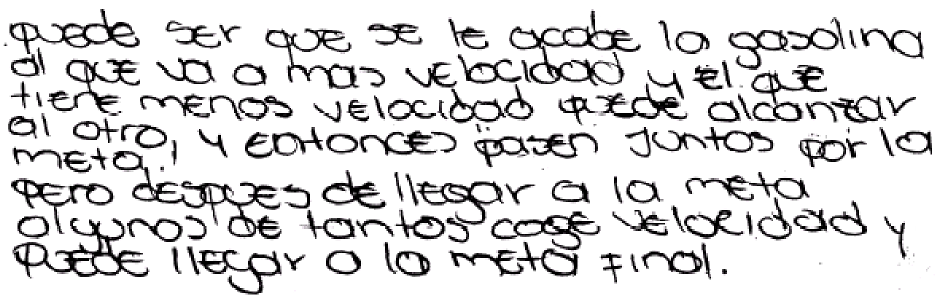
El trabajo realizado de esta manera permite que la situación problema tenga en su desarrollo mecanismos de validación explícitos, de tal forma, que el estudiante pueda regresar sobre lo realizado para confirmar o rechazar las hipótesis iniciales, y así, mejorar, o incluso, trazar un nuevo plan de acción. Además, esta estrategia de validación, centrada en el trabajo del alumno sobre la situación, y no en la palabra del maestro, permite el desarrollo de formas y estrategias de argumentación, que al pasar por los diferentes sistemas de representación evolucionan en su estructura conceptual.

Resultados

Un primer resultado, fruto del trabajo realizado, tiene que ver con la capacidad de los alumnos para organizar, analizar, sistematizar y obtener conclusiones a partir de la información proveniente de la situación problema.

A continuación se muestran ejemplos de respuestas de dos alumnos en el trabajo inicial con papel y lápiz, a partir de las cuales se hace el seguimiento llevado a cabo por ellos.

Alumno 1:


puede ser que se le acabe la gasolina
al que va a mas velocidad y el que
tiene menos velocidad puede alcanzar
al otro,
meta. y entonces pasen juntos por la
pero despues de llegar a la meta
algunos de tantos coge velocidad y
puede llegar a la meta final.

Alumno 2:

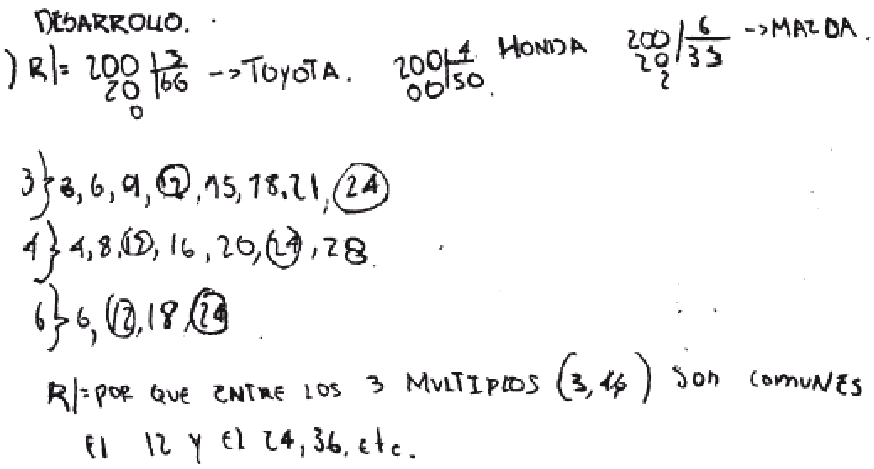


Figura 2: Muestra del trabajo de dos alumnos

Como se puede observar, la segunda respuesta es cualitativamente mejor elaborada, no solo porque llega a resultados correctos, sino porque la forma como organiza la información le permite una exploración sistemática de la misma, y por ende, obtener conclusiones acertadas frente al problema. En contraste, la primera respuesta no solo lleva al alumno a conclusiones equivocadas frente a la situación, sino que el análisis lo realiza desde su intuición sobre el movimiento (es más, del movimiento en línea recta), sin incluir un análisis cuantitativo soportado en la utilización de herramientas matemáticas. Este tipo de respuestas, por demás generalizadas en el grupo de alumnos, mostró que inicialmente no logran hacerse a una representación apropiada del problema, lo que los lleva a obtener dichas conclusiones.

Una vez se tuvo un primer contacto con la situación de la manera antes descrita, se les permitió abrir el archivo de simulación del problema, en el Cabri Géométre de la calculadora TI-92, lo que les permitió a los alumnos avanzar en la exploración del problema y por ende ampliar la manera como lo habían resuelto inicialmente. Entre las nuevas estrategias está la determinación de otros encuentros durante toda la carrera y la organización tabular de estos datos, y quienes afirmaban que los tres autos no se encontraban, dada la interpretación lineal que habían hecho de la situación, tuvieron la oportunidad de replantear sus hipótesis.

La ampliación de las estrategias de solución se explica a partir de que la utilización de la calculadora para modelar la situación de la carrera de los autos, permite a los alumnos formarse una representación visualmente más clara de la situación, y por tanto, apropiarse de elementos para determinar los conceptos matemáticos necesarios en la solución de los cuestionamientos que se les realizaron.

Posteriormente, llenar la tabla de valores tenía como principal objetivo explorar las regularidades matemáticas existentes entre el tiempo transcurrido de la carrera y el número de vueltas que ha dado cada auto, lo cual se hizo inicialmente con papel y lápiz. Ahora bien, llenar la tabla de valores no fue un proceso fácil. La principal dificultad se presentó en lo relativo a cuantificar las fracciones de vuelta que lleva cada auto en aquellos tiempos en los que no tienen un número entero de vueltas. Para estos casos, la utilización de la simulación en Cabri de la situación fue una herramienta valiosa en el éxito final de la tarea.

Inicialmente la mayoría de los alumnos llenaron la tabla, llenando en algunos casos sólo aquellos valores en los que el número de vueltas era entero, o bien ignorando la fracción de vuelta correspondiente a un tiempo que no corresponde a un número entero de vueltas (como se puede observar en la figura 3).

Tiempo	Cantidad de vuelt	
	Toyota	Honda
1.0		
2.0		
3.0	1	
4.0		1
5.0		
6.0	2	
7.0		
8.0		2
9.0	3	
10.0		

Figura 3: Tabla sin considerar fracciones de vuelta

Obsérvese como este tipo de sistematización de la información en la tabla muestra que los alumnos están pensando en términos discretos, es decir en números naturales. Para ellos, no hay una percepción clara de la continuidad del movimiento, y por tanto de las fracciones de vuelta. En otras palabras, los números racionales, para estos estudiantes prácticamente no existen.

Para ayudar a los alumnos en la construcción de una representación más clara de la situación en términos de números racionales, y no solo de números naturales, se introdujo una modificación a la simulación, de tal forma que mostrara tres radios de la circunferencia, de extremos en los puntos que representan cada auto (figura 4).

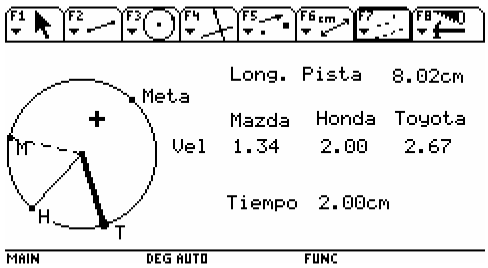


Figura 4: Pantalla del archivo de simulación modificado

Este ingrediente nuevo en la simulación dotó a los estudiantes de ideas para pensar en la existencia de fracciones de vuelta. Esto se evidencia en el afán por querer corregir su tabla inicial, al relacionar esta situación con las tradicionales tortas tan comunes en las clases sobre números fraccionarios. Al menos así lo revela la siguiente tabla:

Tiempo	Cantidad de vueltas de		
	Toyota	Honda	Mazda
1.0	1/3	1/4	1/6
2.0	2/3	2/4	2/6
3.0	3 da una vuelta 3/3	3/4	3/6
4.0	4/3	4 da 1 vuelta 4/4	4/6
5.0	5/3	5/4	5/6
6.0	6 da 2 vueltas 6/3	6/4	6 da 1 vuelta 6/6
7.0	7/3	7/4	7/6
8.0	8/3	8 da 2 vueltas 8/4	8/6
9.0	9 da 3 vueltas 9/3	9/4	9/6
10.0	10/3	10/4	10/6
11.0	11/3	11/4	11/6
12.0	12 da 4 vueltas 12/3	12 da 3 vueltas 12/4	12 da 2 vueltas 12/6

Figura 5: Tabla considerando fracciones de vuelta

Para esta nueva tabla, la utilización de la simulación de la situación en Cabri fue una herramienta valiosa en el éxito final de la tarea.

Finalmente, la última parte del trabajo planteó un nuevo reto a los estudiantes: la construcción automática de la tabla con la calculadora.

F1 | F2 Plot Setup | F3 Cell | F4 Header | F5 Calc | F6 Util | F7 Stat

DATA	Tiempo	Mazda	Honda	Toyota	
	c1	c2	c3	c4	c5
1	1.	.16667	.25	.33333	
2	1.2	.2	.3	.4	
3	1.4	.23333	.35	.46667	
4	1.6	.26667	.4	.53333	
5	1.8	.3	.45	.6	
6	2.	.33333	.5	.66667	
7	2.2	.36667	.55	.73333	

r6c1=2.

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 6: Tabla de la calculadora

Lo novedoso para los estudiantes fue que los datos aparecían en notación decimal, mientras que las que ellos habían realizado manualmente quedaron en notación fraccionaria. Esta situación permitió plantear reflexiones en torno a si ambos tipos de tablas arrojaban información diferente o no, sobre el problema. Después de largos debates, los alumnos accedieron a una comprensión de la equivalencia de la información presentada en las diferentes tablas, y por ende, de las relaciones que existen entre las notaciones decimales y fraccionarias para los números racionales.

En esta parte final del trabajo se realizaron las gráficas cartesianas de las tablas de valores, y se calcularon las ecuaciones de las gráficas resultantes. Esto permitió confrontar los análisis matemáticos que habían realizado en las fases anteriores del trabajo.

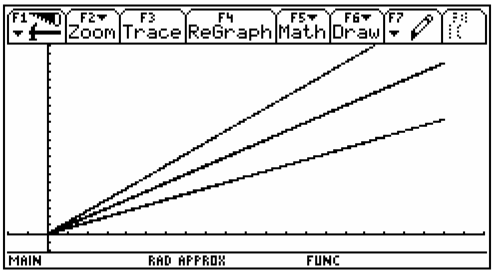


Figura 7: Gráficas cartesianas

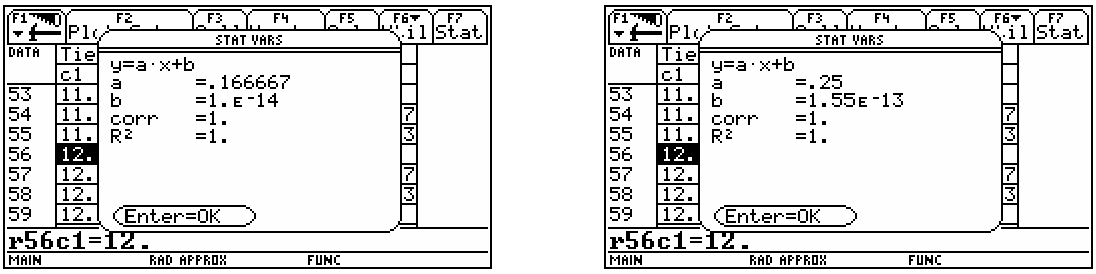


Figura 8: Análisis de regresión

Conclusiones

La forma como los estudiantes se vincularon a la interacción con la situación problema planteada, deja ver cómo la calculadora se convirtió en un mediador fundamental para cualificar paulatinamente sus visiones frente a la interpretación de la misma. La ampliación de datos en la estrategia de solución, una vez abordada con lápiz y papel, es fruto de la implementación de la simulación utilizada. Ésta ofreció a los estudiantes elementos para mejorar las exploraciones ante un problema y por consiguiente contribuyó en la manera de ampliar sus avances, esto es, les mejoró el radio de acción para organizar, analizar, sistematizar y obtener conclusiones a partir de la información proveniente de las relaciones conceptuales involucradas en la tarea matemática.

Los estudiantes pudieron replantear la tabla de tiempos versus número de vueltas con la presencia de fracciones para aquellos tiempos en que no había un número entero de vueltas; se puede observar que, mientras no se trabajó con la simulación que mostraba los segmentos de recta trazados desde el centro de la pista a los puntos que representaban a los autos, los estudiantes no habían pensado en números racionales. Solo se ocurrió traerlos de su esquemas a partir de la interactividad del software utilizado, el cual les permitió observar lo que ocurría en cuanto a la posición de cada auto, al cambiar el tiempo. Esto es una prueba más de que las herramientas computacionales se están convirtiendo en instrumentos mediadores para potenciar el desarrollo de competencias argumentativas en los estudiantes y por consiguiente mejorar sus formas de comunicar ideas matemáticas.

El papel mediador de la tecnología fue crucial en el cambio de estrategias de razonamiento de los alumnos a través de la validación de los resultados, ya que el pasar rápidamente de una representación a otra permitía problematizarlas, compararlas entre sí y establecer las relaciones de unas a otras. Así, los alumnos, al tener herramientas de validación intrínsecas a la situación problema, se ven obligados a centrar sus argumentaciones en los elementos matemáticos en juego y no en elementos externos a ella (como la palabra del maestro). Este es sin lugar a dudas un avance significativo en la autonomía intelectual.

En suma, dos elementos fueron claves en los resultados obtenidos en la actividad desarrollada. De un lado, el diseño de una situación problémica que de manera explícita ofrecierá la posibilidad de ser tratada a partir de diferentes sistemas de representación, y de otro, la utilización de la mediación interactiva de la calculadora TI-92 plus, lo cual permitió a los alumnos la confrontación de lo realizado en cada parte de las actividades, y por ende, generar análisis centrados en conceptos matemáticos. Además, la mediación computacional, puso al alcance de todos los estudiantes herramientas matemáticas de análisis que, en condiciones normales de la educación tradicional, solo son posibles de utilizar en los niveles superiores. Esto de alguna manera puede entenderse como una democratización al acceso del conocimiento matemático.

Referencias

Duval R (1999) *Semiosis y Pensamiento Humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción al español de Myriam Vega. Universidad del Valle. Primera edición. Santiago de Cali. P 314.

Kaput J (1987a) *Representation System and Mathematics. En Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Claud Janvier (Ed). Hillsdale N.J. Lawrence Erlbaurn Associated.

Kaput J (1987b) *Toward a Thoery of Symbol Used in Mathematics. En Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Claud Janvier (Ed). Hillsdale N.J. Lawrence Erlbaurn Associated.

Kaput J (1998) *Representation, Inscriptions, Descrptions and Learning: A Kaleidoscopio of Windows*. Journal of Mathematical Behavior. Vol 17. Nros 1 y 2.

Moreno L, Santos M (2002) *Proceso de transformación del uso de la tecnología en una herramienta para la solución de problemas de matemáticas por parte de los estudiantes.* Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Clase, Ministerio de Educación, Serie Memorias.

MEN (1999) *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemática*. Serie Lineamientos Curriculares. Punto EXE Editores. Santafé de Bogotá. P 81.