MATEMÁTICAS

El objetivo de la evaluación OCDE/PISA es el desarrollo de indicadores que permitan determinar en qué medida los diferentes sistemas educativos de los países participantes han preparado a los estudiantes de 15 años para desempeñar un papel constructivo como ciudadanos dentro de la sociedad. En lugar de limitarse al contenido curricular que puedan haber aprendido los estudiantes, la evaluación se centra en determinar si los estudiantes son capaces de utilizar lo que han estudiado en situaciones similares a las que probablemente se tendrán que enfrentar en su vida diaria.

Definición del área de conocimiento

El área de matemáticas se ocupa de la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar ideas de un modo efectivo, al plantear, formular, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones. La evaluación OCDE/PISA se centra en problemas del mundo real, de modo que va más allá de los casos y problemas que se plantean generalmente en las aulas. En el contexto del mundo real, a la hora de comprar, viajar, cocinar, gestionar su economía doméstica o valorar cuestiones políticas entre otras cosas, los ciudadanos se enfrentan con frecuencia a situaciones en las que el utilizar un razonamiento cuantitativo o espacial u otras aptitudes matemáticas les ayuda a aclarar, formular o resolver un problema. Este tipo de utilización de las matemáticas se basa en las destrezas que se han adquirido y practicado a través de los problemas que se presentan generalmente en los libros de texto y en las clases. Sin embargo, estas destrezas requieren la capacidad de saber aplicarlas en un contexto menos estructurado donde no hay indicaciones tan claras y donde el estudiante debe decidir qué datos son los importantes y cómo aplicarlos para que resulten útiles.

La competencia matemática de acuerdo al proyecto OCDE/PISA se ocupa de establecer en qué grado los estudiantes de 15 años pueden considerarse ciudadanos informados y reflexivos y consumidores inteligentes. Los ciudadanos de todos los países se tienen que enfrentar cada vez más con una miríada de tareas que comprenden conceptos matemáticos, cuantitativos, espaciales, de probabilidad o de otro tipo. Sin ir más lejos, los medios de comunicación (periódicos, revistas, televisión e Internet) están plagados de información en forma de tablas, diagramas y gráficos sobre cuestiones como el tiempo, la economía, la medicina y el deporte, por nombrar sólo unas pocas. Los ciudadanos se ven bombardeados con información sobre temas como *el calentamiento global y el efecto invernadero, el crecimiento de la población, las mareas negras y la contaminación de los mares, la desaparición del campo*. Y, por último, pero no por ello menos importante, los ciudadanos hacen frente a la necesidad de leer formularios, interpretar horarios de autobuses y trenes, realizar correctamente operaciones bancarias, decidir cuál es la mejor compra en el mercado, etcétera. La competencia matemática del proyecto OCDE/PISA se centra en la capacidad de los estudiantes de 15 años (la edad en que muchos están terminando su aprendizaje formal obligatorio de matemáticas) para utilizar su conocimiento y comprensión matemáticos para dilucidar estas cuestiones y llevar a cabo las acciones pertinentes.

Dentro del proyecto OCDE/PISA la definición de *competencia matemática* es la siguiente:

La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

A continuación se presentan algunas explicaciones para esclarecer la definición de esta área de conocimiento.

Competencia matemática

El término *competencia matemática* se ha escogido para enfatizar el uso funcional del conocimiento matemático en numerosas y diversas situaciones y de manera variada, reflexiva y basada en una comprensión profunda. Por descontado, para que este uso sea posible y viable, se requieren una gran cantidad de conocimientos y de destrezas matemáticas básicas, y tales destrezas forman parte de nuestra definición de competencia. En el sentido lingüístico, la *competencia* presupone, entre otras cosas, un amplio vocabulario y un conocimiento sustancial de las reglas gramaticales, la fonética, la ortografía, etc. A la hora de comunicarse, los seres humanos combinan estos elementos de una manera creativa en respuesta a las diferentes situaciones del mundo real en las que se ven envueltos. Del mismo modo, la competencia matemática no debe limitarse al conocimiento de la terminología, datos y procedimientos matemáticos, aunque, lógicamente, debe incluirlos, ni a las destrezas para realizar ciertas operaciones y cumplir con determinados métodos. La competencia matemática comporta la combinación creativa de estos elementos en respuesta a las condiciones que imponga una situación externa.

el mundo

El término *mundo* significa el entorno natural, social y cultural en que habita el individuo. Como postuló Freudenthal (1983): «Nuestros conceptos, estructuras e ideas matemáticas se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental» (pág. IX).

utilizar y participar

La expresión *utilizar y participar* se aplica para abarcar el uso de las matemáticas y la resolución de problemas matemáticos. Conlleva también una implicación personal al *comunicar, relacionar, evaluar* e incluso *apreciar* las matemáticas y *disfrutar* con ellas. De este modo, la definición de competencia matemática engloba el uso funcional de las matemáticas en sentido estricto, así como la preparación para poder seguir estudiándolas, y los elementos estéticos y de esparcimiento de las matemáticas.

su vida

La expresión *"su vida"* incluye su vida privada, laboral y social con sus compañeros y familiares, así como su vida como ciudadano dentro de una comunidad.

Una capacidad fundamental que comporta esta noción de competencia matemática es la aptitud para plantear, formular, resolver e interpretar problemas a través de las matemáticas en diferentes situaciones y contextos. Los contextos varían de los puramente matemáticos a aquellos en los que no se presenta ninguna estructura matemática o ésta no es evidente de entrada: la persona que plantee o resuelva el problema deberá introducir correctamente la estructura matemática. También es importante destacar que la definición no hace exclusivamente referencia a los conocimientos matemáticos mínimos exigibles, sino también a la realización y utilización de las matemáticas en situaciones que varían entre lo diario y lo inusual, entre lo simple y lo complejo.

Las actitudes y emociones relacionadas con las matemáticas, tales como la confianza en uno mismo, la curiosidad, la percepción de su interés e importancia y el deseo de hacer o comprender las cosas, no forman parte de la definición de *competencia matemática*, pero, no obstante, contribuyen a ella. En principio, se puede tener competencia matemática sin necesidad de albergar tales actitudes y emociones. No obstante, en la práctica, no es probable que alguien pueda ejercer y llevar a la práctica tal competencia si no cuenta con cierto grado de confianza en sí mismo, curiosidad, percepción de su interés e importancia y el deseo de hacer o comprender cosas que incluyan componentes matemáticos. Se reconoce la importancia de estas actitudes y sentimientos en relación con la competencia matemática. No forman parte de la evaluación de la competencia matemática, pero se tratarán en otras partes del proyecto OCDE/PISA.

Base teórica del marco conceptual de matemáticas

La definición de competencia matemática del proyecto OCDE/PISA es coherente con la teoría amplia e integradora sobre la estructura y uso del lenguaje que aparece en recientes estudios sobre la competencia sociocultural. En el trabajo de James Gee *Preamble to a Literacy Program* (1998), el término "competencia" se refiere a la utilización que hacen las personas del lenguaje. La capacidad de leer, escribir, escuchar y hablar una lengua constituye la herramienta más importante de entre las que median en la actividad social humana. De hecho, cada lengua y cada utilización de la lengua posee un intrincado diseño que está vinculado de manera compleja a diferentes funciones. Que una persona sea competente en una lengua implica que conoce muchos de los recursos de diseño de la lengua y que sabe utilizar dichos recursos en muchas y variadas funciones sociales. De manera análoga, el considerar las matemáticas como un lenguaje implica que los estudiantes deben aprender los elementos característicos del discurso matemático (términos, hechos, signos, símbolos, procedimientos y destrezas para realizar ciertas operaciones de subáreas matemáticas específicas, además de la estructura de tales ideas en cada subárea) y también que deben aprender a utilizar tales ideas para resolver problemas no rutinarios en una variedad de situaciones definidas en términos de funciones sociales. Hay que tener en cuenta que entre los elementos característicos de las matemáticas se cuentan el reconocimiento de los términos, procedimientos y conceptos básicos que se enseñan normalmente en los colegios y también el saber cómo se utilizan y se estructuran estos elementos característicos. Por desgracia, una persona puede conocer muy bien estos elementos característicos de las matemáticas y no entender su estructura ni saber cómo utilizarlos para resolver problemas. Estas nociones teóricas de la interacción de los "elementos característicos" y las "funciones" que fundamentan el marco conceptual de las matemáticas dentro del proyecto OCDE/PISA se ilustran mediante el ejemplo siguiente.

Matemáticas, ejemplo 1: LA FAROLA

El ayuntamiento ha decidido colocar una farola en un pequeño jardín triangular para que alumbre este jardín en su totalidad. ¿Dónde debería colocarse?

Este problema de tipo social puede resolverse mediante la estrategia general utilizada por los matemáticos y que dentro de este marco conceptual se denomina matematizar. La actividad de matematizar se puede describir a partir de cinco aspectos que la componen:

1. Comenzar con un problema enmarcado en la realidad:
   Localizar en qué lugar del jardín debe ubicarse la farola.

2. Sistematizar el problema según conceptos matemáticos:
   El jardín puede representarse como un triángulo y la iluminación producida como una circunferencia en cuyo centro se encuentra la farola.

3. Gradualmente reducir la realidad mediante procedimientos como la consideración de cuáles son los rasgos importantes del problema, la generalización y formalización (y con ello se potencian los rasgos matemáticos de la situación y se transforma el problema real en un problema matemático que representa fielmente la situación):
   El problema queda reducido a localizar el centro de una circunferencia que circunscribe un triángulo.

4. Resolver el problema matemático:
   Partiendo del hecho de que el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo se encuentra en el punto de intersección de las mediatrices, traza las mediatrices de dos lados cualesquiera del triángulo. El punto de intersección de las mediatrices constituye el centro de la circunferencia.

5. Dar sentido a la solución matemática en términos de la situación real:
   Relacionar la solución con la situación real del jardín. Reflexionar sobre la solución y reconocer, por ejemplo, que si una de las tres esquinas del jardín fuera un ángulo obtuso, esta solución no sería correcta, puesto que la ubicación de la farola quedaría fuera del jardín. Reconocer que la situación y el tamaño de los árboles del parque son otros factores que afectan a la posibilidad de aplicación de la solución matemática.

Son ésos los procedimientos que describen, en un sentido amplio, cómo, a menudo, los matemáticos «hacen matemáticas», cómo la gente utiliza las matemáticas en gran número de tareas reales y potenciales y cómo los ciudadanos bien informados y reflexivos utilizan las matemáticas para participar en el mundo real de manera total y competente. De hecho, aprender a *matematizar* debería constituir uno de los objetivos educativos más importantes para todos los alumnos.

En la actualidad y en el futuro inmediato, todos los países necesitan ciudadanos competentes en matemáticas, capaces de enfrentarse a una sociedad compleja y rápidamente cambiante. La información accesible ha ido creciendo de manera exponencial y los ciudadanos tienen que ser capaces de decidir cómo tratar esta información. Los debates sociales hacen uso, cada vez más, de información cuantitativa para apoyar las afirmaciones. Un ejemplo de la necesidad de la competencia matemática se observa en que, a menudo, a las personas se les pide en encuestas y estudios que den opiniones y valoraciones sobre la exactitud de diferentes conclusiones y afirmaciones. El ser capaz de juzgar la solidez de las afirmaciones de tales argumentos es, e irá siendo cada vez más, una característica crucial del ciudadano responsable. Los pasos del proceso de matematización tratados en este marco ceonceptual constituyen elementos fundamentales a la hora de utilizar las matemáticas en este tipo de situaciones complejas. El no saber utilizar las nociones matemáticas puede llevar a adoptar decisiones confusas en la vida personal, a creer más fácilmente en las pseudociencias y a tomar decisiones poco informadas en la vida profesional y social.

Un ciudadano con competencia matemática se da cuenta de lo rápido que se producen los cambios y de la consiguiente necesidad de ir aprendiendo a lo largo de toda la vida.

Adaptarse a estos cambios de una manera creativa, flexible y práctica es una condición necesaria para tener éxito como ciudadano. Las destrezas aprendidas en la escuela probablemente no serán suficientes para cubrir las necesidades de los ciudadanos en la mayor parte de la vida adulta.

Los requisitos para una ciudadanía competente y reflexiva afectan también al mundo del trabajo. A los trabajadores se les pide cada vez menos que realicen trabajos físicos repetitivos en su vida laboral. Por el contrario, participan activamente en el control de la producción de un gran número de máquinas de alta tecnología al tiempo que tratan con un gran flujo de información y participan en la solución de problemas en grupo. La tendencia es que cada vez más trabajos exigirán la capacidad de saber comprender, comuni-car, utilizar y explicar conceptos y procedimientos basados en el pensamiento matemático. Los pasos del proceso de matematización constituyen los fundamentos de este tipo de pensamiento matemático.

Por último, los ciudadanos con competencia matemática tienden a apreciar las matemáticas como una disciplina dinámica, cambiante e importante que, a menudo, les resulta útil para sus necesidades.

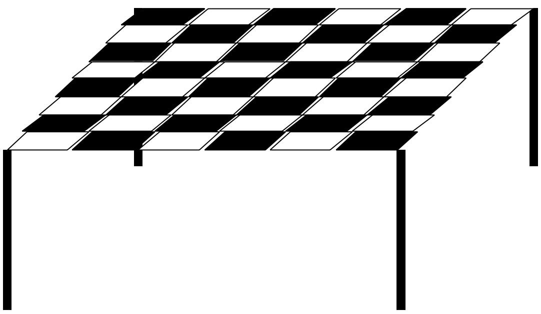
El problema práctico al que se enfrenta el proyecto OCDE/PISA reside en cómo evaluar si los estudiantes de 15 años poseen o no una competencia matemática en términos de su habilidad para matematizar. Lamentablemente, esto resulta difícil en una prueba cronometrada puesto que, para las situaciones reales más complejas, el proceso de abstracción de la realidad a las matemáticas y a la inversa a menudo implica trabajar en grupo y saber hallar los recursos apropiados, y ello necesita un tiempo considerable.

Para ilustrar el proceso de la matematización en un ejercicio complejo de solución de problemas, vea el Ejemplo 2, *Tablero de feria*, un ejercicio realizado por estudiantes de octavo curso (segundo de Educación Secundaria Obligatoria en España) (Romberg, 1994):

Matemáticas, ejemplo 2: TABLERO DE FERIA

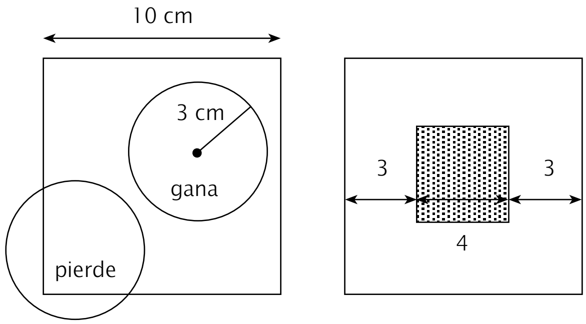
En una feria, los jugadores lanzan monedas sobre un tablero a cuadros. Si la moneda cae tocando una línea divisoria, el jugador la pierde. Si rueda y cae fuera del tablero, la recupera. Pero si la moneda queda totalmente dentro de un cuadrado, el jugador recupera la moneda y se lleva un premio.

¿Cuál es la probabilidad de ganar en este juego?



Este es un ejercicio que se enmarca claramente en la realidad. En primer lugar los estudiantes se dieron cuenta de que la probabilidad de ganar dependía del tamaño relativo de los cuadrados y de la moneda (identificando así las variables importantes). Acto seguido, para transformar el problema real en uno matemático, se dieron cuenta de que podía ser más fácil resolverlo si investigaban la relación de un único cuadrado y un círculo más pequeño que éste (reduciendo la realidad). A continuación decidieron elaborar un ejemplo específico (utilizando un método heurístico de resolución de problemas: «si no sabes resolver el problema que se presenta, resuelve uno que puedas»). Hay que tener en cuenta que lo que viene a continuación se realizó a raíz de este ejemplo específico, no del tablero, el premio, etc. En el ejemplo, hicieron que el radio de la moneda fuera de 3 cm y el lado de los cuadrados de 10 cm. Se dieron cuenta de que, para ganar, el centro de la moneda debía estar al menos a tres centímetros de cada lado, porque, de otro modo, la moneda tocaría alguna línea. El espacio del ensayo era un cuadrado de 10 cm de lado y el espacio del suceso ganador era un cuadrado de 4 cm de lado. Las relaciones se muestran en el siguiente diagrama (Cuadro 1.1).

Cuadro 1.1. *Un lanzamiento ganador y otro perdedor (a la izquierda) y los espacios de ejemplo y de suceso (a la derecha)*



La probabilidad de ganar se obtuvo a partir de la relación entre las áreas de ensayo y de suceso (en el ejemplo, p = 16/100). Los estudiantes examinaron monedas de otros tamaños y generalizaron el problema exponiendo la solución en términos algebraicos. Por último, los estudiantes extrapolaron esta solución para averiguar los tamaños relativos de la moneda y los cuadrados en diferentes situaciones prácticas, construyeron tableros y comprobaron empíricamente los resultados (dando así sentido a la solución matemática en una situación real).

Obsérvese que en esta solución están presentes los cinco aspectos de la *matematización.* Aunque el problema es complejo, todo estudiante de 15 años debería comprender los conceptos matemáticas necesarios para resolver el problema. No obstante, hay que tener en cuenta que en esta clase los estudiantes trabajaron juntos durante tres días para realizar este ejercicio.

Lo ideal para juzgar si los estudiantes de 15 años son capaces de utilizar los conocimientos matemáticos adquiridos para resolver problemas matemáticos que puedan encontrarse en la vida real sería recopilar información sobre su capacidad para *matematizar* dichas situaciones complejas. Obviamente, esto no es factible. En su lugar, el proyecto OCDE/PISA ha decidido elaborar preguntas para evaluar los diferentes estadios de este proceso. El apartado siguiente describe la estrategia seleccionada para crear un juego de preguntas de evaluación de modo equilibrado, de manera que el conjunto seleccionado de preguntas englobe los cinco aspectos del *matematizar*. El objetivo es utilizar las respuestas a dichas preguntas para ubicar a los estudiantes dentro de una escala de dominio en el constructo de la competencia matemática del proyecto OCDE/PISA.

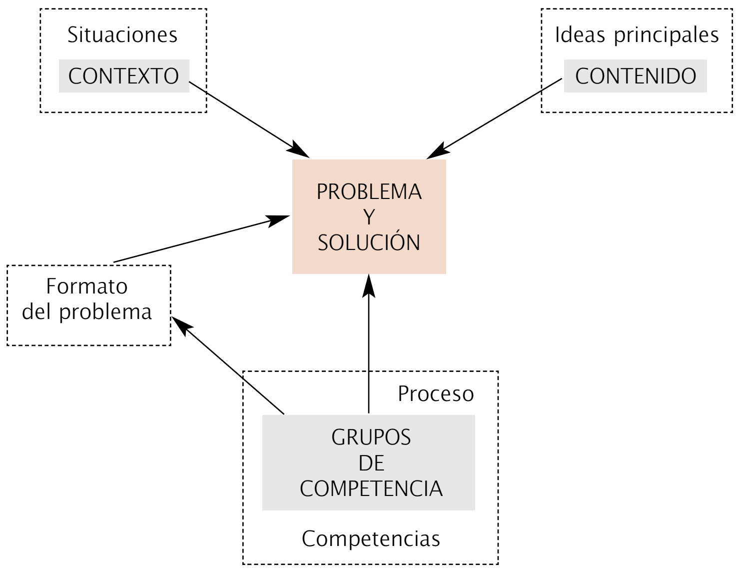
ORGANIZACIÓN DEL ÁREA DE CONOCIMIENTO

El marco conceptual de matemáticas del proyecto OCDE/PISA proporciona la base y la descripción de una evaluación que determine en qué medida los estudiantes de 15 años son capaces de manejar las matemáticas de una manera bien fundada al hacer frente a problemas del mundo real. O, en términos más generales, una evaluación del grado de competencia matemática de los estudiantes de 15 años. Para describir más claramente el área de conocimiento evaluada deben distinguirse tres elementos:

- las *situaciones o contextos* en que se sitúan los problemas;
- el *contenido matemático* del que hay que valerse para resolver los problemas, organizado según ciertas *ideas* principales; y, sobre todo,
- las *competencias* que deben activarse para vincular el mundo real en el que se generan los problemas con las matemáticas, y, por tanto, para resolver los problemas.

Estos elementos están representados de manera gráfica en el Cuadro 1.2. A continuación aparece una explicación de cada uno de ellos.

Cuadro 1.2. *Los elementos del área de conocimiento de matemáticas*



El grado de competencia matemática de una persona se observa en el modo en que utiliza sus destrezas y conocimientos matemáticos al resolver problemas. Los problemas (y su resolución) pueden presentarse en una gran variedad de situaciones o **contextos** en la experiencia de una persona. Los problemas del proyecto OCDE/PISA surgen del mundo real de dos maneras. En primer lugar, los problemas se dan en situaciones genéricas que son importantes en la vida del estudiante. Estas situaciones forman parte del mundo real y están indicadas mediante un cuadrado grande en la parte superior izquierda del gráfico. En segundo lugar, dentro de dicha situación, los problemas presentan un contexto más específico. Esto se representa mediante un cuadrado pequeño dentro del cuadrado de la situación.

En los ejemplos anteriores, la situación la constituye la comunidad local, y los contextos son el alumbrado de un jardín (Ejemplo 1) y el tablero de un juego de feria (Ejemplo 2).

El siguiente elemento del mundo real que debe tenerse en cuenta al considerar la competencia matemática es el contenido matemático al que una persona recurre a la hora de resolver un problema. El **contenido matemático** puede explicarse mediante cuatro categorías que engloban los tipos de problemas que surgen de la interacción con los hechos del día a día y que se basan en una concepción del modo en que el contenido matemático se presenta ante la gente. Dentro de la evaluación PISA se les llama "ideas principales": *cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre*. Se trata de un enfoque algo diferente al que resultaría familiar desde la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas y las tendencias curriculares típicas de las escuelas. Sin embargo, las ideas principales engloban ampliamente toda la gama de temas matemáticos que se espera que hayan aprendido los estudiantes. Las ideas principales se representan mediante el cuadrado grande de la parte superior derecha del diagrama del Cuadro 1.2. De las ideas principales se extrae el contenido utilizado en la resolución de un problema. Esto se representa mediante el rectángulo sombreado situado en el interior del correspondiente a las ideas principales.

Las flechas que van de los rectángulos CONTEXTO y CONTENIDO al del PROBLEMA muestran cómo el mundo real (incluyendo las matemáticas) da lugar a un problema.

El problema del jardín (Ejemplo 1) supone un conocimiento geométrico asociado a las ideas de espacio y forma, y el problema del tablero (Ejemplo 2) implica, al menos en sus estadios iniciales, tratar con la incertidumbre y aplicar conocimientos de probabilidad.

Los procesos matemáticos que los estudiantes aplican al tratar de resolver los problemas se conocen como *competencias matemáticas*. Tres *grupos de competencia* condensan los diferentes procesos cognitivos necesarios para resolver diferentes tipos de problemas. Estos grupos reflejan el modo en que los estudiantes utilizan normalmente los procesos matemáticos al resolver los problemas que surgen mientras se relacionan con su mundo. Éstos se explicarán con mayor detalle en los siguientes apartados.

Así, el elemento de proceso de este marco conceptual está representado primeramente por el rectángulo grande, que representa las competencias matemáticas, y por uno más pequeño, que representa los tres grupos de competencia. Las competencias específicas necesarias para resolver un problema irán en función de la naturaleza del problema y se verán reflejadas en la solución hallada. Esta interacción se representa mediante la flecha que va de los grupos de competencia al problema y su solución.

La flecha restante va de los grupos de competencia al formato del problema. Las competencias utilizadas para resolver un problema están relacionadas con la forma del problema y con lo que el problema exige.

Debe hacerse hincapié en que los tres elementos descritos son de naturaleza diferente. Mientras que las situaciones o contextos definen los ámbitos de problemas del mundo real, las ideas principales reflejan el modo en que observamos el mundo a través de un cristal matemático, y las competencias son el núcleo de la competencia matemática. Sólo cuando los estudiantes dispongan de ciertas competencias serán capaces de resolver acertadamente los problemas que se planteen. Evaluar la competencia matemática implica también valorar qué grado de competencias matemáticas son capaces de aplicar los estudiantes en situaciones de problemas.

En los apartados siguientes se describen estos elementos con más detalle.

SITUACIONES O CONTEXTOS

Un aspecto importante de la competencia matemática lo constituye el involucrarse en las matemáticas, es decir, ejercitar y utilizar las matemáticas en una amplia variedad de situaciones. Se ha reconocido, en efecto, que al resolver un individuo asuntos susceptibles de tratamiento matemático, las representaciones y los métodos que escoge a menudo dependen de las situaciones en las que se presentan los problemas.

La situación es la parte del mundo del estudiante en la que se localizan los ejercicios que se le plantean. Se sitúa a una distancia diversa del estudiante mismo. Dentro de la evaluación OCDE/PISA, la situación más cercana es la vida personal del estudiante. Luego se sitúan la vida escolar, la vida laboral y el ocio, seguidas de la vida en la comunidad local y la sociedad tal y como se presentan en la vida diaria. A mucha distancia de todas ellas están las situaciones de tipo científico. Para los problemas que se van a presentar, se definen y utilizan cuatro tipos de situaciones: personal, educacional/profesional, pública y científica.

El contexto de un ejercicio lo constituye el modo concreto en que ésta se presenta dentro de una situación. Engloba los elementos específicos utilizados en el enunciado del problema que el ejercicio plantea.

Observe el siguiente ejemplo:

Matemáticas, ejemplo 3: **CUENTA DE AHORRO**

Se ingresan 1.000 zeds en una cuenta de ahorro en un banco. Existen dos opciones: o bien obtener un interés anual del 4%, o bien obtener una prima inmediata de 10 zeds y un interés anual del 3%. ¿Qué opción es mejor al cabo de un año? ¿Y al cabo de dos años?

La situación de esta pregunta es "finanzas y bancos", una situación de la comunidad local y la sociedad que en el proyecto OCDE/PISA se designa como "pública". El contexto de esta pregunta se refiere al dinero (zeds) y a los tipos de interés que ofrece una cuenta bancaria.

Observe que este tipo de problema podría ser parte de la práctica o experiencia del joven en su vida real. Proporciona un contexto *auténtico* de utilización de las matemáticas, ya que su aplicación en este contexto se dirigiría de manera directa a la resolución del problema[1]. Esto se puede contrastar con los problemas que se observan con frecuencia en los textos escolares de matemáticas, en los que el objetivo principal consiste más en practicar las matemáticas que en resolver un problema real. Esta autenticidad en la utilización de las matemáticas resulta un aspecto relevante del diseño y el análisis de las preguntas del proyecto OCDE/PISA y está estrechamente relacionada con la definición de la competencia matemática.

Debe tenerse en cuenta que algunos elementos de los problemas son inventados, por ejemplo, la moneda es ficticia. Este elemento ficticio se introduce para evitar que los estudiantes de algún país estén en una posición aventajada, algo que no sería justo para los demás.

La situación y el contexto de un problema también puede considerarse en términos de la distancia entre el problema y las matemáticas implicadas. Si un ejercicio hace referencia únicamente a estructuras, símbolos y objetos matemáticos y no alude a cuestiones ajenas al universo matemático, el contexto del ejercicio se considera *intramatemático* y dicho ejercicio se clasifica dentro de la clase de situación "científica". El proyecto OCDE/PISA incluye una variedad limitada de este tipo de ejercicios y en ellos se hace explícito el estrecho vínculo entre el problema y las matemáticas que subyacen en él. De manera más típica, los problemas que aparecen en la experiencia del día a día del estudiante no se plantean en términos matemáticos explícitos, sino que hacen referencia a objetos del mundo real. Los contenidos de

[1] Observe que esta utilización del término auténtico no quiere decir que las preguntas de matemáticas sean verdaderas y reales. Se utiliza el término auténtico para indicar que la utilización de las matemáticas se dirige directamente a la resolución del problema, en contraposición a que el problema sea únicamente un pretexto para hacer prácticas de operaciones matemáticas.

estos ejercicios se denominan extramatemáticos y, entonces, el estudiante debe traducir estos contextos de los problemas a una formulación matemática. Por lo general, el proyecto OCDE/PISA hace hincapié en las tareas que pueden encontrarse en una situación real y que poseen un contexto auténtico para el uso de las matemáticas de un modo que influya en la solución y en su interpretación. Téngase en cuenta que esto no descarta la utilización de ejercicios con un contexto hipotético, siempre y cuando el contexto presente algunos elementos reales, no se encuentre demasiado alejado de una situación del mundo real y en el cual la utilización de las matemáticas pueda resultar auténtica para resolver el problema. El Ejemplo 4 muestra un problema con un contexto hipotético que es "extramatemático":

Matemáticas, ejemplo 4: SISTEMA MONETARIO

Se podría crear un sistema monetario basado únicamente en los valores 3 y 5? Concretamente, ¿qué cantidades podrían obtenerse a partir de esta base? ¿Resultaría conveniente un sistema de este tipo?

El carácter de este problema no se deriva de su cercanía respecto al mundo real, sino del hecho de que es matemáticamente interesante y alude a competencias relacionadas con la competencia matemática. El uso de las matemáticas para explicar escenarios hipotéticos y explorar sistemas o situaciones potenciales, incluso cuando éstos difícilmente vayan a llevarse a cabo en la realidad, es una de sus características más impactantes. Un problema de este tipo se clasifica dentro del tipo de situación "científica".

En resumen, el proyecto OCDE/PISA otorga la mayor importancia a aquellas tareas que podrían encontrarse en diferentes situaciones reales y que poseen un contexto en el que el uso de las matemáticas para resolver el problema sería auténtico. Los problemas con contextos extramatemáticos que influyen en la solución y en la interpretación se consideran preferentemente como un vehículo para evaluar la competencia matemática, porque estos problemas se asemejan mayoritariamente a los que se presentan en la vida diaria.

CONTENIDO MATEMÁTICO: LAS CUATRO IDEAS PRINCIPALES

Los conceptos, estructuras e ideas matemáticos se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos del mundo natural, social y mental. En las escuelas, el currículum de matemáticas se ha organizado de una ma-nera lógica alrededor de las diferentes líneas de contenido (p. ej., aritmética, álgebra, geometría) y sus temas subordinados, que reflejan las ramas históricamente establecidas del pensamiento matemático y que facilitan el desarrollo de un plan de estudios estructurado. No obstante, en el mundo real, los fenómenos susceptibles de un tratamiento matemático no aparecen organizados de un modo tan lógico. Por lo general, los problemas no aparecen en contextos y maneras que permitan su comprensión y solución a través de la aplicación del conocimiento de una única área. El problema del tablero de feria descrito en el Ejemplo 2 constituye un ejemplo de problema que recurre a diversas áreas matemáticas.

Dado que el objetivo del proyecto OCDE/PISA es evaluar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas reales, la estrategia ha consistido en definir el ámbito de los contenidos que se iban a evaluar utilizando un enfoque fenomenológico para describir los conceptos, estructuras e ideas matemáticas. Ello significa describir los contenidos en relación a los fenómenos y los tipos de problemas para los que se han creado. Este enfoque garantiza una atención de la evaluación que concuerda con la definición del área de conocimiento y que abarca un ámbito de contenidos que incluye todo aquello que normalmente aparece en otras evaluaciones matemáticas y en los currículos de matemáticas de los diferentes países.

La organización fenomenológica del contenido matemático no es nueva. Dos publicaciones muy conocidas, *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (Steen, 1990) y *Mathematics: The science of patterns* (Devlin, 1994) han descrito las matemáticas de este modo. Sin embargo, se han utilizado diferentes maneras para etiquetar este enfoque y denominar las diferentes categorías fenomenológicas. Entre las diferentes propuestas de etiquetado se encuentran *ideas profundas, grandes ideas, ideas fundamentales, conceptos principales, ideas principales, conceptos subyacentes, áreas principales o problemática*. En el marco de matemáticas del proyecto OCDE/PISA se utiliza la etiqueta *ideas principales*.

Existen muchas ideas principales posibles. Las publicaciones mencionadas arriba, por sí solas, ya hacen referencia al modelo, la dimensión, la cantidad, la incertidumbre, la forma, el cambio, el cómputo, el razonamiento y la comunicación, el movimiento y el cambio, la simetría y la regularidad, y la posición. ¿Cuáles de estas ideas deberían utilizarse dentro del marco de matemáticas del proyecto OCDE/PISA? Con el objeto de centrar el área de conocimiento matemática, es importante seleccionar un conjunto de problemáticas surgidas de la evolución histórica de las matemáticas que englobe una variedad y profundidad suficiente para dejar ver los elementos esenciales de las matemáticas y que represente o incluya también los contenidos curriculares convencionales de las matemáticas de manera satisfactoria.

Durante siglos, las matemáticas consistieron preferentemente en la ciencia de los números, junto a una geometría relativamente concreta. Antes del año 500 a.C., Mesopotamia, Egipto y China vieron el origen del concepto de número. Se desarrollaron operaciones con números y cantidades, entre ellas cantidades resultantes de mediciones geométricas. Entre los años 500 a.C. y 300 d.C. tuvo lugar la era de la matemática griega, que se centraba fundamentalmente en el estudio de la geometría como teoría axiomática. Los griegos se encargaron de redefinir las matemáticas como una ciencia unificada a partir de los números y las formas. El siguiente cambio importante tuvo lugar entre los años 500 y 1300 d.C. en el mundo islámico, India y China, cuando el álgebra pasó a constituir una rama de las matemáticas. Con ello se estableció el estudio de las relaciones. Con las invenciones independientes del cálculo diferencial (el estudio del cambio, el crecimiento y el límite) por parte de Newton y Leibniz en el siglo XVII, las matemáticas se convirtieron en un estudio integrado del número, la forma, el cambio y las relaciones.

Los siglos XIX y XX vivieron diferentes explosiones del conocimiento matemático y del alcance de los fenómenos y problemas que podían tratarse mediante las matemáticas, especialmente los aspectos relacionados con la aleatoriedad y la indeterminación. Este desarrollo comportó que cada vez fuera más difícil hallar respuestas sencillas a la pregunta *¿qué son las matemáticas?* En este nuevo milenio, mucha gente considera las matemáticas como la ciencia de las regularidades (en un sentido general). De esta manera, puede realizarse una elección de ideas principales que refleje este desarrollo: regularidades en el dominio de la *cantidad*, del *espacio* y la *forma*, y del *cambio* y las *relaciones,* constituyen los conceptos centrales y esenciales de cualquier descripción de las matemáticas y conforman el núcleo de cualquier currículum, ya sea de educación secundaria o universitaria. No obstante, ser competente en matemáticas significa algo más. Resulta esencial tratar con la incertidumbre desde una perspectiva matemática y científica. Por esta razón, los elementos de la teoría de la probabilidad y la estadística dan paso a la cuarta idea principal: la *incertidumbre*.

Por tanto, en el proyecto OCDE/PISA 2003 se utiliza la siguiente lista de ideas principales para adaptarse a los requisitos del desarrollo histórico, la cobertura del área y la plasmación de las líneas principales del currículum escolar:

- *cantidad*
- *espacio y forma*
- *cambio y relaciones*
- *incertidumbre*

A través de estas ideas, el contenido matemático se organiza en un número suficiente de áreas para garantizar que las preguntas de la prueba cubran el conjunto del currículo pero, al mismo tiempo, en un número suficientemente pequeño para evitar una división demasiado detallada que resultase perjudicial a la hora de atender los problemas basados en situaciones reales.

La concepción básica de una idea principal es un conjunto que engloba hechos y conceptos y que cobra sentido y puede encontrarse a lo largo de un gran número de situaciones diferentes. Debido a su misma naturaleza, cada idea principal puede percibirse como una especie de noción general que trata algún tipo de dimensión de contenido matemático. Esto implica que las ideas principales no pueden definirse de manera exacta en función de otra existente, porque no se puede trazar una línea de separación clara entre unas y otras[2]. Por el contrario, cada una de ellas representa una perspectiva o punto de vista que puede concebirse como poseedora de un núcleo, un centro de gravedad y, de algún modo, un área circundante difusa que permite la intersección con otras ideas principales. En principio, una idea principal posee una intersección con cualquier otra idea principal. Las cuatro ideas principales se resumen en el apartado siguiente y se tratan con mayor profundidad más adelante.

Cantidad

Esta idea principal se centra en la necesidad de cuantificar para organizar el mundo. Las características importantes engloban la comprensión del tamaño relativo, el reconocimiento de las regularidades numéricas y la utilización de los números para representar cantidades y atributos cuantificables de los objetos del mundo real (recuentos y medidas). Además, la *cantidad* tiene que ver con el procesamiento y comprensión de los números que de diferentes maneras se nos presentan.

Un aspecto importante al tratar con la cantidad es el razonamiento cuantitativo. Los componentes esenciales del razonamiento cuantitativo son el sentido para los números, la representación de los números de diferentes maneras, la comprensión del significado de las operaciones, la percepción de la magnitud de los números, los cálculos matemáticamente elegantes, la estimación y el cálculo mental.

Espacio y forma

Las regularidades se encuentran en todas partes: en el habla, la música, los vídeos, el tráfico, las construcciones y el arte. Las formas pueden considerarse como regularidades: casas, edificios de oficinas, puentes, estrellas de mar, copos de nieve, callejeros, hojas de trébol, cristales y sombras. Las regularidades geométricas pueden servir como unos modelos relativamente simples de muchas clases de hechos, y su estudio resulta posible y deseable en todos los niveles (Grünbaum, 1985).

El estudio de la forma y las construcciones exige buscar similitudes y diferencias al analizar los componentes formales y al reconocer las formas en diferentes representaciones y diferentes dimensiones. El estudio de las formas está estrechamente vinculado al concepto de *percepción espacial*. Esto comporta aprender a reconocer, explorar y conquistar, para vivir, respirar y movernos con mayor conocimiento en el espacio en que vivimos (Freudenthal, 1973).

Para conseguirlo es preciso comprender las propiedades de los objetos y sus posiciones relativas. Debemos ser conscientes de cómo vemos las cosas y de por qué las vemos de ese modo. Debemos aprender a orientarnos por el espacio y a través de las construcciones y formas. Ello significa entender la relación entre formas e imágenes, o representaciones visuales, tales como la relación entre una ciudad real y las fotografías y callejeros de esa ciudad. También presupone entender la representación en dos dimensiones de los objetos tridimensionales, la formación de las sombras y cómo interpretarlas, qué es la perspectiva y cómo funciona.

Cambio y relaciones

Cualquier fenómeno natural constituye una manifestación de cambio; el mundo que nos rodea presenta una gran cantidad de relaciones temporales y permanentes entre los diferentes fenómenos. Son ejemplo de ello los organismos, que cambian a medida que crecen, el ciclo de las estaciones, el flujo y reflujo de las mareas, los ciclos de desempleo, los cambios climatológicos y los índices bursátiles. Algunos de estos procesos de cambio comportan funciones matemáticas simples y pueden describirse o modelarse mediante ellas: funciones lineales, exponenciales, periódicas o logarítmicas, tanto discretas como continuas. No obstante, muchas relaciones pertenecen a categorías diferentes y, a menudo, el análisis de los datos resulta esencial para determinar qué tipo de relación se produce. A menudo las relaciones matemáticas adoptan la forma de ecuaciones o desigualdades, pero también pueden darse relaciones de una naturaleza más general (p. ej., equivalencia, divisibilidad o inclusión, entre otras).

El pensamiento funcional —es decir, el pensar sobre y en términos de relaciones— es uno de los objetivos disciplinarios más importantes de la enseñanza de las matemáticas (MAA, 1923). La relaciones pueden darse en una gran variedad de representaciones diferentes, entre ellas

[2] Y, por supuesto, tampoco pueden hacerlo las líneas de contenido matemático tradicionales.

la simbólica, la algebraica, la tabular y la geométrica. Las diferentes representaciones sirven a propósitos diferentes y poseen propiedades diferentes. Por esta razón, la traducción entre las diferentes representaciones tiene a menudo una importancia fundamental a la hora de ocuparse de diversas situaciones y tareas.

Incertidumbre

La actual "sociedad de la información" proporciona un gran número de informaciones que a menudo se presentan como precisas, científicas y en diverso grado ciertas. No obstante, en la vida diaria nos enfrentamos a resultados de elecciones inciertos, puentes que desmoronan, caídas de la bolsa, predicciones del tiempo poco fidedignas, predicciones desafortunadas del crecimiento de la población, modelos económicos que no funcionan bien y muchas otras demostraciones de la incertidumbre del mundo en que vivimos.

La *incertidumbre* está pensada para sugerir dos temas relacionados: los datos y el azar. Estos dos fenóme-nos son objeto de estudio matemático por parte de la estadística y de la probabilidad, respectivamente. Las recientes recomendaciones relativas a los currículos escolares son unánimes al sugerir que la estadística y la probabilidad deberían ocupar un lugar mucho más importante que el que han tenido en el pasado (Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools, 1982; LOGSE, 1990; MSEB, 1990; NCTM, 1989; NCTM, 2000).

Actividades y conceptos matemáticos importantes de esta área son la recogida de datos, el análisis y la presentación /visualización de los mismos, la probabilidad y la deducción.

Ahora abordaremos el aspecto más importante del marco conceptual de las matemáticas: las competencias que los alumnos deben movilizar para tratar de resolver problemas. Éstas competencias se tratan bajo el título genérico de procesos matemáticos.

PROCESOS MATEMÁTICOS

Introducción: la matematización

El proyecto OCDE/PISA examina la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y transmitir ideas matemáticas de un modo efectivo al plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones. Este tipo de resolución de problemas exige a los estudiantes que se valgan de las destrezas y competencias que han adquirido a lo largo de su escolarización y sus experiencias vitales. En el proyecto OCDE/PISA, el proceso fundamental que los estudiantes emplean para resolver problemas de la vida real se denomina matematización.

> *Newton podría haber descrito la matematización en su magna obra "Principios matemáticos de la filosofía natural" cuando escribió: «Pero nuestro objetivo consiste sólo en localizar la cantidad y propiedades de esta fuerza a partir de los fenómenos y en aplicar lo que descubramos a algunos casos sencillos mediante los cuales, de manera matemática, podamos estimar los efectos en otros casos más complejos» (Newton, 1687).*

El debate anterior sobre la base teórica del marco conceptual de Matemáticas del proyecto OCDE/PISA trazó una descripción de la matematización en cinco pasos. Estos pasos se presentan en el Cuadro 1.3.

(1) Se inicia con un problema enmarcado en la realidad.

(2) Se organiza de acuerdo a conceptos matemáticos que identifican las matemáticas aplicables.

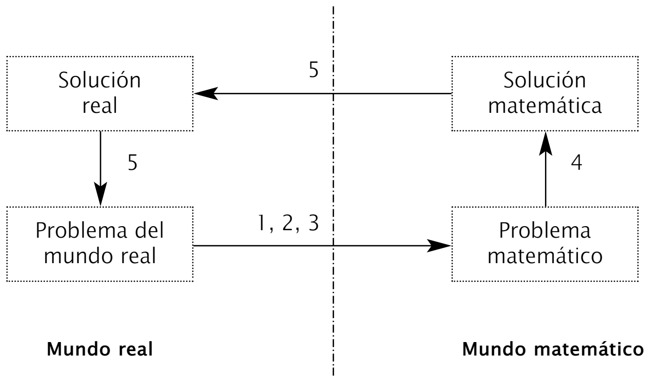
(3) Gradualmente se va reduciendo la realidad mediante procedimientos como la formulación de hipótesis, la generalización y la formalización. Ello potencia los rasgos matemáticos de la situación y transforma el problema real en un problema matemático que la representa fielmente.

(4) Se resuelve el problema matemático.

(5) Se da sentido a la solución matemática en términos de la situación real, a la vez que se identifican las limitaciones de la solución.

Como sugiere el diagrama del Cuadro 1.3, los cinco aspectos se tratan en tres fases.

Cuadro 1.3. *El ciclo de la matematización*



En primer lugar, la matematización implica traducir el problema de la «realidad» a las matemáticas. Este proceso engloba actividades como:

- identificar lo elementos matemáticos pertinentes en relación a un problema situado en la realidad;
- representar el problema de un modo diferente, organizándolo entre otras cosas de acuerdo a conceptos matemáticos y realizando suposiciones apropiadas;
- comprender las relaciones entre el lenguaje utilizado para describir el problema y el lenguaje simbólico y formal necesario para entenderlo matemáticamente;
- localizar regularidades, relaciones y recurrencias;
- reconocer aspectos que son isomórficos con relación a problemas conocidos;
- traducir el problema en términos matemáticos, es decir, en términos de un modelo matemático (De Lange, 1987, pág. 43).

Cuando el alumno ha traducido el problema a una forma matemática, el procedimiento continúa ya dentro de las matemáticas. Los estudiantes formularán preguntas como: «¿Hay...?», «En ese caso, ¿cuántos?» o «Cómo puedo hallar...» utilizando destrezas y conceptos matemáticos conocidos. Intentarán trabajar en su modelo de problema, adaptarlo, establecer regularidades, identificar conexiones y crear una buena argumentación matemática. A esta parte del proceso de matematización se la conoce normalmente como la parte deductiva del ciclo de construcción de modelos (Blum, 1996; Schupp, 1988). No obstante, en este estadio pueden desempeñar un papel otros procesos que no sean estrictamente deductivos. Esta parte del proceso de matematización incluye:

- utilizar diferentes representaciones e ir cambiando entre ellas;
- utilizar operaciones y lenguaje simbólico, formal y técnico;
- pulir y adaptar los modelos matemáticos, combinando e integrando modelos;
- argumentar;
- generalizar.

El último o los últimos pasos a la hora de resolver un problema conllevan una reflexión sobre todo el pro-ceso matemático y los resultados obtenidos. En este punto los estudiantes deben interpretar los resultados con una actitud crítica y validar todo el proceso. Esta reflexión tiene lugar en todas las fases del proceso, pero resulta de especial importancia en la fase final. Este proceso de reflexión y validación incluye:

- la comprensión del alcance y los límites de los conceptos matemáticos;

- la reflexión sobre los argumentos matemáticos y la explicación y justificación de los resultados;

- la comunicación del proceso y de la solución;

- la crítica del modelo y de sus límites.

Esta fase viene indicada en dos puntos del Cuadro 1.3 mediante la etiqueta “5”, donde el proceso de matematización pasa de la solución matemática a la solución real, y donde vuelve a relacionarse con el problema original perteneciente a la realidad.

Las competencias

El apartado anterior se centraba en los procesos y conceptos principales asociados a la matematización. Un individuo que deba participar con éxito en la matematización en una gran variedad de situaciones, contextos intra y extramatemáticos e ideas principales necesita poseer un número suficiente de competencias matemáticas que, juntas, puedan ser consideradas como una competencia matemática comprensiva. Cada una de estas competencias puede dominarse a diferentes niveles. Las distintas partes de la matematización se sirven de manera diferente de estas competencias, tanto en lo que se refiere a las competencias individuales como en relación con el nivel de dominio necesario. Para identificar y examinar estas competencias, el proyecto OCDE/PISA ha decidido utilizar ocho competencias matemáticas características que se basan en su forma actual en el trabajo de Niss (1999) y sus colegas daneses. Otras formulaciones similares se encuentran en las obras de muchos otros autores (tal y como se indica en Neubrand *et al.*, 2001). No obstante, algunos de los términos utilizados tienen una acepción diferente entre los distintos autores.

1. *Pensar y razonar.* Formular preguntas características de las matemáticas («Hay...?», «En ese caso, ¿cuántos?», «Cómo puedo hallar...»); conocer los tipos de respuestas que dan las matemáticas a esas preguntas; diferenciar entre los diferentes tipos de afirmaciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, aseveraciones condicionadas); y entender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados.

2. *Argumentación.* Saber lo que son las demostraciones matemáticas y en qué se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático; seguir y valorar el encadenamiento de argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener un sentido heurístico («¿Qué puede o no puede pasar y por qué?»); y crear y plasmar argumentos matemáticos.

3. *Comunicación.* Esto comporta saber expresarse de diferentes maneras, tanto oralmente como por escrito, sobre temas de contenido matemático y entender las afirmaciones orales y escritas de terceras personas sobre dichos temas.

4. *Construcción de modelos.* Estructurar el campo o situación que se quiere modelar; traducir la realidad a estructuras matemáticas; interpretar los modelos matemáticos en términos de “realidad”; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados; comunicar opiniones sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones de tales resultados); y supervisar y controlar el proceso de construcción de modelos.

5. *Formulación y resolución de problemas.* Representar, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (por ejemplo, “puro”, “aplicado”, “abierto” y “cerrado”); y la resolución de diferentes tipos de problemas matemáticos de diversas maneras.

6. *Representación.* Descodificar y codificar, traducir, interpretar y diferenciar entre las diversas formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y las interrelaciones entre las varias representaciones; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación dependiendo de la situación y el propósito.

7. *Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.* Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico y comprender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal; manejar afirmaciones y expresiones con

símbolos y formulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.

8. *Empleo de soportes y herramientas.* Tener conocimientos y ser capaz de utilizar diferentes soportes y herramientas (entre ellas, herramientas de las tecnologías de la información) que pueden ayudar en la actividad matemática; y conocer sus limitaciones.

La intención del proyecto OCDE/PISA no consiste en desarrollar preguntas de prueba que evalúen las competencias arriba mencionadas por separado. Dichas competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que el intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área. Las diferentes competencias que presenten los alumnos variarán considerablemente de una persona a otra. Esto es en parte así debido a que todo el aprendizaje tiene lugar a través de experiencias, y «la elaboración del conocimiento propio tiene lugar a través de los procesos de interacción, negociación y colaboración» (De Corte, Greer y Verschaffel, 1996, pág. 510). El proyecto OCDE/PISA parte del hecho de que gran parte de las matemáticas que saben los estudiantes la han aprendido en la escuela. La comprensión de un área de conocimiento es algo que se va adquiriendo gradualmente. Con el tiempo van apareciendo maneras más formales y abstractas de representación y razonamiento como resultado de ir participando en actividades diseñadas para desarrollar ideas informales. La competencia matemática también se adquiere a través de experimentar interrelaciones asociadas en diferentes situaciones o contextos sociales.

Para describir y transmitir de manera productiva las capacidades de los estudiantes, así como sus puntos fuertes y sus puntos débiles desde una perspectiva internacional, es necesaria cierta estructura. Un modo de ofrecerla de una manera comprensible y manejable es describir grupos de competencias a partir de los tipos de requisitos cognitivos necesarios para resolver diferentes problemas matemáticos.

Grupos de competencia

El proyecto OCDE/PISA ha elegido describir las acciones cognitivas que estas competencias engloban de acuerdo a tres *grupos de competencia*: el grupo de *reproducción*, el grupo de *conexión* y el grupo de *reflexión*. En las secciones siguientes se definen los tres grupos y se tratan las maneras en que se interpretan cada una de las competencias dentro de cada grupo.

El grupo de reproducción

Las competencias de este grupo implican esencialmente a la reproducción del conocimiento estudiado. Incluyen aquellas que se emplean más frecuentemente en las pruebas estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, reconocimiento de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos.

1. *Pensar y razonar.* Formular las preguntas más simples («¿cuántos...?», «¿cuánto es...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta («tantos», «tanto»); distinguir entre definiciones y afirmaciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente.

2. *Argumentación.* Seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados.

3. *Comunicación.* Comprender y saber expresarse oralmen te y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera.

4. *Construcción de modelos.* Reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo.

5. *Formulación y resolución de problemas.* Exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada;

resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera.

6. *Representación.* Descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación.

7. *Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.* Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios.

8. *Empleo de soportes y herramientas.* Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares en contextos, situaciones y procedimientos similares a los ya conocidos y practicados a lo largo del aprendizaje.

Las preguntas que miden las competencias del grupo de reproducción se pueden describir mediante los siguientes descriptores clave: reproducir material practicado y realizar operaciones rutinarias.

Ejemplos de preguntas del grupo de reproducción

Matemáticas, ejemplo 5:

Resuelve la ecuación $7x - 3 = 13x + 15$

Matemáticas, ejemplo 6:

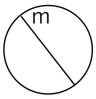
¿Cuál es la media de 7, 12, 8, 14, 15, 9?

Matemáticas, ejemplo 7:

Escribe 69% en forma de fracción

Matemáticas, ejemplo 8:

La línea m se denomina __________ de la circunferencia.



Matemáticas, ejemplo 9:

Se ingresan 1.000 zeds en una cuenta de ahorro en un banco con un tipo de interés del 4%. ¿Cuántos zeds habrá en la cuenta al cabo de un año?

Para clarificar los límites de las preguntas del grupo de reproducción hay que hacer notar que el problema presentado como Ejemplo 3 "Cuenta de ahorro" NO pertenece al grupo de reproducción. Este problema lleva a los alumnos más allá de la simple aplicación de un procedimiento de rutina, puesto que requiere la aplicación de un hilo de razonamiento y de una secuencia de pasos de cálculo que no son característicos de las competencias del grupo de *reproducción*.

El grupo de conexión

Las competencias del grupo de *conexión* se apoyan sobre las del grupo de *reproducción*, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.

1. Además de las competencias descritas para el grupo de *reproducción*, las competencias del grupo de *conexión* comprenden las siguientes:

1. *Pensar y razonar.* Formular preguntas («¿cómo hallamos...?», «¿qué tratamiento matemático damos...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.); distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después.

2. *Argumentación.* Razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener sentido de la heurística (p. ej., «¿qué puede o no puede pasar y por qué?», «¿qué sabemos y qué queremos obtener?»).

3. *Comunicación.* Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.

4. *Construcción de modelos.* Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el mo-delo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad), y sabiendo también comunicar los resultados del modelo.

5. *Formulación y resolución de problemas.* Plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).

6. *Representación.* Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación.

7. *Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.* Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares.

8. *Empleo de soportes y herramientas.* Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares en con textos, situaciones y maneras diferentes a las introducidas y practicadas a lo largo del aprendizaje.

Las preguntas de este grupo normalmente exigen alguna prueba de la integración y vinculación del material derivado de las diferentes ideas principales, de las diversas líneas curriculares matemáticas o de la conexión de las varias representaciones de un problema.

Las preguntas que miden las competencias del grupo de *conexión* se pueden describir mediante los siguientes descriptores clave: integración, conexión y ampliación moderada del material practicado.

Ejemplos de preguntas del grupo de conexión

Un primer ejemplo del grupo de *conexión* es el del Ejemplo 3, *Cuenta de ahorro*, aparecido anteriormente. A continuación se presentan otros.

Matemáticas, ejemplo 10: DISTANCIA

María vive a dos kilómetros de su colegio y Martín a cinco.
¿A qué distancia viven el uno del otro?

Cuando se mostró este problema a los profesores, muchos de ellos lo rechazaron por considerarlo demasiado fácil (se ve rápidamente que la respuesta es 3). Otro grupo de profesores argumentaron que no era una pregunta adecuada, porque no había respuesta (querían decir que no hay una única respuesta numérica). Otros argumentaron que no era adecuado porque había varias respuestas posibles, dado que, sin más información, la mayoría de alumnos podían concluir que vivían a entre 3 y 7 kilómetros de distancia (una respuesta que no es deseable para una pregunta de evaluación). Unos pocos pensaron por el contrario que se trataba de una pregunta excelente, porque exige entender la pregunta, porque es un problema real dado que no incluye una estrategia conocida por el estudiante, y porque es una cuestión matemática preciosa aunque no se sepa cómo van a resolverla los estudiantes. Esta última interpretación es la que vincula el problema con el grupo de competencias de *conexión*.

Matemáticas, ejemplo 11: ALQUILER DE OFICINAS

Los dos siguientes anuncios aparecieron en un diario de un país cuya unidad monetaria es el zed.

EDIFICIO A	EDIFICIO B
Se alquilan oficinas	Se alquilan oficinas
58-95 metros cuadrados 475 zeds al mes	35-260 metros cuadrados 90 zeds por metro cuadrado al año
100-120 metros cuadrados 800 zeds al mes	

Si una empresa está interesada en alquilar una oficina de 110 metros cuadrados en ese país durante un año, ¿en qué edificio de oficinas, A o B, deberá alquilar la oficina para conseguir el precio más bajo? Escribe tus cálculos. [© IEA/TIMSS]

Matemáticas, ejemplo 12: LA PIZZA

Una pizzería ofrece dos pizzas redondas del mismo grosor pero de diferentes tamaños. La pequeña tiene un diámetro de 30 cm y cuesta 30 zeds. La grande tiene un diámetro de 40 cm y cuesta 40 zeds. [© PRIM, Stockholm Institute of Education]

¿Qué pizza es la mejor opción en relación a lo que cuesta? Escribe tu razonamiento.

En estos dos problemas los estudiantes deben traducir una situación del mundo real a lenguaje matemático, desarrollar un modelo matemático que les permita establecer una comparación adecuada, comprobar que la solución se ajusta al contexto de la pregunta inicial y comunicar el resultado. Todas estas actividades se incluyen dentro del grupo de *conexión*.

El grupo de reflexión

Las competencias de este grupo incluyen un elemento de reflexión por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y pueden ser más «originales» (o inusuales) que los del grupo de *conexión*. Además de las competencias descritas para el grupo de *conexión*, entre las competencias del grupo de *reflexión* se encuentran las siguientes:

1. *Pensar y razonar.* Formular preguntas («¿cómo hallamos...?», «¿qué tratamiento matemático damos...?», «¿cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, especificación de los puntos clave, etc.); distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones sobre casos especiales y articular de modo activo o reflexionar sobre estas distinciones; comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos; comprender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados y generalizar los resultados.

2. *Argumentación.* Razonar matemáticamente de manera sencilla, distinguiendo entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir, evaluar y elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos de diferentes tipos; emplear la heurística (p. ej., «qué puede o no puede pasar y por qué?», «¿qué sabemos y qué queremos obtener?», «¿cuáles son las propiedades esenciales?», «¿cómo están relacionados los diferentes objetos?»).

3. *Comunicación.* Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o explicar cálculos y resultados (normalmente de más de una manera) a explicar asuntos que implican relaciones complejas, entre ellas relaciones lógicas. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.

4. *Construcción de modelos.* Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo, traducir la realidad a estructuras matemáticas en contextos complejos o muy diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes y pasar alternando de los diferentes modelos (y sus resultados) a la «realidad», incluyendo aquí aspectos de la comunicación de los resultados del modelo: recopilar información y datos, supervisar el proceso de construcción de modelos y validar el modelo resultante. Conlleva también reflexionar analizando, realizando críticas y llevando a cabo una comunicación más compleja sobre los modelos y su construcción.

5. *Formulación y resolución de problemas.* Exponer y formular problemas mucho más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más originales que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y formas de representación y

comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones). También conlleva reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.

6. *Representación.* Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y traducir y diferenciar entre ellas. También conlleva combinar representaciones de manera creativa e inventar nuevas.

7. *Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.* Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico ya practicado en situaciones y contextos desconocidos y manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos. También conlleva la habilidad de saber tratar con expresiones y afirmaciones complejas y con lenguaje simbólico o formal inusual, y realizar traducciones entre este lenguaje y el lenguaje natural.

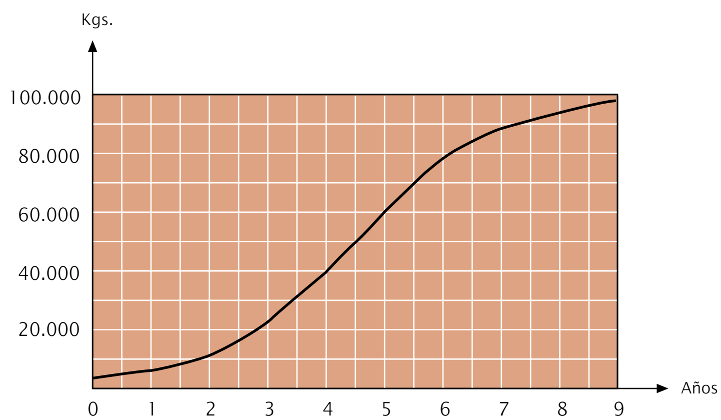
8. *Empleo de soportes y herramientas.* Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares o inusuales en contextos, situaciones y formas bastante diferentes a las ya introducidas y practicadas. También conlleva reconocer las limitaciones de tales soportes y herramientas.

Las preguntas de evaluación que miden las competencias del grupo de reflexión se pueden describir mediante los siguientes descriptores clave: razonamiento avanzado, argumentación, abstracción, generalización y construcción de modelos aplicados a contextos nuevos.

Ejemplos de preguntas del grupo de reflexión

Matemáticas, ejemplo 13: **CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN DE PECES**

Se repobló con peces un canal fluvial. El gráfico muestra un modelo de cómo ha crecido el peso total de los peces en el canal fluvial.



Supón que un pescador decide esperar unos años antes de empezar a pescar los peces del canal fluvial. ¿Cuántos años deberá esperar si desea maximizar el número de peces que pueda coger anualmente a partir de ese año? Razona tu respuesta.

Matemáticas, ejemplo 14: **PRESUPUESTO**

En un determinado país, el presupuesto nacional de defensa fue de 30 millones (en la moneda del país) en 1980. El presupuesto total de ese año fue de 500 millones. Al año siguiente, el presupuesto de defensa pasó a 35 millones, mientras que el presupuesto total fue de 605 millones. La inflación del período comprendido entre los dos presupuestos alcanzó el 10 por ciento.

a) Te invitan a dar una conferencia en una asociación pacifista. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha disminuido en este período. Explica cómo lo harías.

b) Te invitan a dar una conferencia en una academia militar. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha aumentado en este período. Explica cómo lo harías.

Fuente: De Lange y Verhage (1992). Reproducción autorizada.

Está claro que el Ejemplo 13 se ajusta a la definición de resolución de problemas de matemáticas en un contexto auténtico. Los estudiantes tendrán que encontrar sus propias estrategias y argumentación en un problema algo complejo e inusual. La complejidad radica en parte en la necesidad de combinar con esmero la información presentada de manera gráfica o textual. Además, la respuesta no resulta obvia para los estudiantes. Necesitarán interpretar el gráfico y darse cuenta, por ejemplo, de que la tasa de crecimiento alcanza su nivel máximo al cabo de unos cinco años. Para realizar el problema de manera satisfactoria, los estudiantes tienen que reflexionar sobre la solución a medida que la elaboran y considerar la adecuación de su estrategia. Además, el problema exige una explicación y una indicación de la «prueba». Una posibilidad es emplear el método de ensayo-error: ver qué pasa si sólo se espera 3 años, por ejemplo, y seguir a partir de ahí. Si se espera hasta finales del quinto año, se obtiene la mayor recolección: 20.000 kg de pescado. Si no se puede esperar tanto y se inicia la pesca un año antes, sólo se consiguen 17.000 kg, y, si se espera demasiado (seis años), sólo se pescarán 18.000 kg al año. Por tanto, los mejores resultados se obtienen cuando la recolección se inicia al cabo de cinco años.

El Ejemplo 14 se ha estudiando en profundidad con estudiantes de 16 años e ilustra muy bien los problemas del grupo de reflexión: los estudiantes reconocieron inmediatamente el aspecto matemático y con frecuencia supieron hacer algún tipo de generalización, puesto que el punto central de la solución radica en reconocer que los conceptos matemáticos clave aquí son el crecimiento absoluto y el crecimiento relativo. Por supuesto, la inflación podría dejarse a un lado para que el problema fuera más accesible para los estudiantes más jóvenes sin que por ello se perdieran las ideas conceptuales clave del problema, pero entonces se perdería complejidad y, de ese modo, parte de la matematización necesaria. Otra manera de facilitar la pregunta sería presentando los datos en una tabla o esquema. Estos aspectos de la matematización ya no son necesarios; los alumnos pueden empezar directamente por el punto central del asunto.

Resumen de los procesos matemáticos en la evaluación OCDE/PISA de matemáticas

El Cuadro 1.4 ofrece una representación gráfica de los grupos de competencia y resume las diferencias entre ellos.

Las descripciones de competencia de las páginas anteriores podrían utilizarse para clasificar las preguntas de matemáticas y asignarlas así a uno de los grupos de competencia. Una manera de hacerlo sería analizar los requisitos de cada pregunta y luego considerar cada una de las competencias para la pregunta en cuestión: uno de los tres grupos proporcionará la descripción más ajustada de los requisitos de la pregunta en relación a esa competencia. Si se considera que alguna de las competencias se ajusta a la descripción del grupo de *reflexión*, entonces la pregunta se asigna a ese grupo de competencia. Si no ocurre eso, pero se considera que alguna de las competencias se ajusta a la descripción del grupo de

Cuadro 1.4. *Representación sintética de los grupos de competencia*

Competencia matemática

Grupo reproducción

- Representaciones y definiciones estándar
- Cálculos rutinarios
- Procedimientos rutinarios
- Solución de problemas de rutina

Grupo conexión

- Construcción de modelos
- Traducción, Interpretación y solución de problemas estándar
- Métodos múltiples bien definidos

Grupo reflexión

- Formulación y solución de problemas complejos
- Reflexión y comprensión en profundidad
- Aproximación matemática original
- Múltiples métodos complejos
- Generalización

conexión, entonces la pregunta se asigna a ese grupo. Si no se da ninguno de estos casos, la pregunta se asignaría al grupo de *reproducción*, puesto que se consideraría que todas las competencias que moviliza se ajustarían a la descripción de las competencias de ese grupo.

Evaluación de la competencia matemática

CARACTERÍSTICAS DE LOS EJERCICIOS

En las secciones anteriores se ha definido la competencia matemática del proyecto OCDE/PISA y la estructura del marco conceptual de su evaluación. En este apartado se presentan con más detalle las características de los ejercicios que se utilizarán para evaluar a los estudiantes. Aquí se describen la naturaleza de los ejercicios y los tipos de formato de pregunta.

La naturaleza de los ejercicios de matemáticas

El proyecto OCDE/PISA es una evaluación internacional de las destrezas de los alumnos de 15 años. Todas las preguntas utilizadas deben ser las adecuadas para la población de estudiantes de 15 años de los países de la OCDE.

En general, las preguntas consisten en información o material de estímulo, una presentación, la pregunta propiamente dicha y la solución que se precisa. Además, para las preguntas cuyas respuestas no pueden puntuarse automáticamente se elaboran unos criterios de corrección para que correctores de los diferentes países especialmente formados puedan puntuar las respuestas de los alumnos de un modo consistente y fiable.

En un apartado anterior de este marco conceptual se han tratado detalladamente los tipos de situaciones que hay que utilizar para las preguntas de matemáticas del proyecto OCDE/PISA. En el ciclo 2003 cada pregunta se encuentra dentro de uno de los cuatro tipos de situación: personal, educacional/profesional, pública y científica. Las preguntas seleccionadas como instrumentos de matemáticas se distribuyen entre estos tipos de situación.

Además, se da preferencia a preguntas cuyos contextos que se consideren *auténticos*. Es decir, el proyecto OCDE/PISA otorga la mayor importancia a aquellos ejercicios que podrían encontrarse en situaciones reales y que poseen un contexto en el que el uso de las matemáticas para resolver el problema podría considerarse auténtico. Los problemas con contextos extramatemáticos que influyen en la solución y su interpretación se prefieren como vehículos de evaluación de la competencia matemática.

Las preguntas deben tener relación en su mayoría con una de las ideas principales (o categorías fenomenológicas de problemas) descritas en este marco conceptual. La elección de las preguntas de matemáticas en el proyecto OCDE/PISA garantiza una representación suficiente de las cuatro ideas principales.

Las preguntas deben incorporar uno o varios de los procesos matemáticos descritos en el marco conceptual y deben identificarse predominantemente con uno de los grupos de competencia.

En el desarrollo y elección de las preguntas que se incluyen como instrumento de evaluación del proyecto OCDE/PISA 2003, se considera detenidamente el nivel de lectura necesario para comprender una pregunta. La formulación de las preguntas debe ser lo más sencilla y directa posible. También se procura evitar contextos que pudieran comportar un sesgo cultural.

Las preguntas seleccionadas como instrumentos de evaluación del proyecto OCDE/PISA presenta una amplia gama de dificultad para así ajustarse a la amplia gama de habilidad de los estudiantes esperada. Además, las categorías principales del marco conceptual (en especial los grupos de competencias y las ideas principales) deben hallarse representadas en la mayor medida posible mediante preguntas de muy variada dificultad. El grado de dificultad de las preguntas se determina en una extensa prueba piloto que se realiza con anterioridad a la selección de las preguntas para la prueba principal.

Tipos de pregunta

Una vez creados los instrumentos de evaluación, deberá examinarse detenidamente el impacto de cada tipo de pregunta en el rendimiento del alumno y, por tanto, en la definición del constructo que se evalúa. Este punto es especialmente pertinente en un proyecto como PISA en el que el vasto contexto internacional plantea serias limitaciones a los de tipos de formato que pueden adoptar las preguntas.

El proyecto OCDE/PISA evaluará la competencia matemática mediante una combinación de preguntas de respuesta abierta, de respuesta cerrada y de elección múltiple. Se utiliza una cantidad más o menos igual de cada uno de estos formatos a la hora de elaborar los instrumentos de prueba del ciclo 2003.

La experiencia en la elaboración y administración de preguntas en el ciclo OCDE/PISA 2000 indica que el tipo de elección múltiple es generalmente el más adecuado para evaluar las preguntas asociadas a los grupos de competencia de *reproducción* y *conexión*. Un ejemplo de este tipo de pregunta es el Ejemplo 15, que plantea una pregunta asociada al grupo de *conexión* y que tiene un número limitado de respuestas pre-definidas. Para resolver este problema, los estudiantes deben traducir el problema a términos matemáticos, crear un modelo para representar la naturaleza periódica del contexto descrito y prolongar la secuencia para encontrar el resultado correspondiente a una de las opciones planteadas.

Matemáticas, ejemplo 15: **LA FOCA**

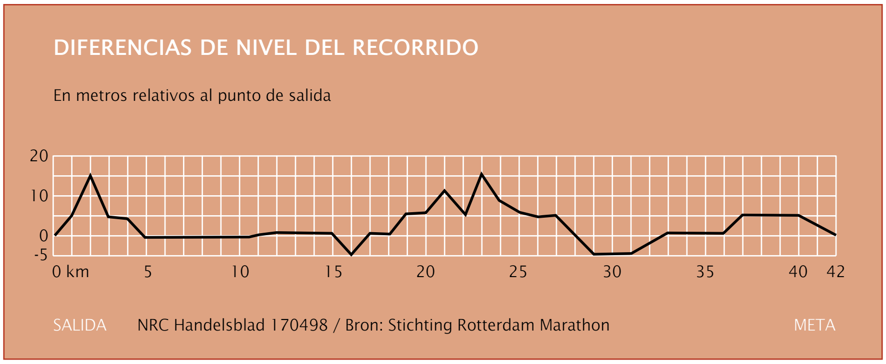
Una foca debe subir a la superficie para respirar incluso cuando duerme. Martín ha observado a una foca durante una hora. Al empezar la observación, la foca se sumergió hasta el fondo y comenzó a dormir. A los 8 minutos subió flotando lentamente hasta la superficie y respiró.
3 minutos más tarde estaba de nuevo en el fondo y todo el proceso empezó de nuevo de un modo regular.

Después de una hora la foca estaba:
a) en el fondo
b) saliendo hacia la superficie
c) respirando
d) volviendo al fondo

Para objetivos de orden superior o para procesos más complejos se han de elegir preferentemente otros tipos de pregunta. Las preguntas de respuesta construida cerrada formulan tareas o ejercicios parecidos a las preguntas de elección múltiple, pero en ellas se pide a los estudiantes que produzcan una respuesta que pueda ser juzgada fácilmente como correcta o incorrecta. El acertar por casualidad no es algo que preocupe en las preguntas de este tipo y no resulta necesario ofrecer distractores (que pueden además sesgar el constructo evaluado). Así, en el Ejemplo 16 sólo hay una respuesta correcta pero existen muchas respuestas incorrectas posibles.

Matemáticas, ejemplo 16: EL MARATÓN DE ROTTERDAM

Tepla Loroupe ganó el maratón de Rotterdam en 1998. «Ha sido fácil», dijo ella, «el recorrido era bastante llano». He aquí un gráfico de los desniveles del recorrido del maratón de Rotterdam:



¿Cuál fue la diferencia entre el punto más elevado y el más bajo de la carrera?

_____________ m

Las preguntas de respuesta construida abierta requieren una contestación más amplia por parte del alumno y el proceso de elaboración de dicha respuesta normalmente comporta actividades cognitivas de orden más elevado. Con frecuencia tales preguntas no requieren únicamente que el alumno elabore una respuesta, sino que muestre también los pasos seguidos o explique cómo llegó a tal respuesta. La característica clave de las preguntas de respuesta construida abierta es que permiten que los alumnos demuestren su competencia al proporcionar soluciones que pueden estar situadas en diferentes niveles de complejidad matemática (véase el Ejemplo 17).

Alrededor de un tercio de las preguntas de matemáticas del proyecto OCDE/PISA son preguntas de respuesta construida abierta. Las respuestas a estas preguntan deben puntuarlas personas formadas que aplican unos criterios de puntuación que requieren un cierto grado de valoración profesional. Puesto que puede producirse un desacuerdo entre los correctores de estas preguntas, el proyecto OCDE/PISA realiza estudios de fiabilidad para controlar el grado de desacuerdo. La experiencia con este tipo de estudios demuestra que pueden elaborarse unos criterios de puntuación claros y conseguir así unas puntuaciones fiables.

Matemáticas, ejemplo 17: INDONESIA

Indonesia se encuentra entre Malasia y Australia. En la siguiente tabla se muestran algunos datos de la población de Indonesia y su distribución a lo largo de sus islas.

Región	*Superficie (km2)*	*Porcentaje sobre la superficie total*	*Población en 1980 (millones)*	*Porcentaje sobre la población total*
Java/Madura	132.187	6,95	91.281	61,87
Sumatra	473.606	24,86	27.981	18,99
Kalimantan (Borneo)	539.460	28,32	6.721	4,56
Sulawesi (Célebes)	189.216	9,93	10.377	7,04
Bali	5.561	0,30	2.470	1,68
Irían Jaya	421.981	22,16	1.145	5,02
TOTAL	1.905.569	100,00	147.384	100,00

Uno de los principales problemas de Indonesia es la desigual distribución de la población a lo largo de sus islas. En la tabla se puede observar que Java, que tiene menos del 7% del total de la superficie, tiene casi el 62% del total de la población.

Diseña un gráfico (o gráficos) que muestre la desigual distribución de la población de Indonesia.

Fuente: De Lange y Verhage (1992). Reproducción autorizada.

El proyecto OCDE/PISA utiliza con frecuencia un formato de ejercicio que engloba diversas preguntas bajo un estímulo común. Los ejercicios en este formato ofrecen a los estudiantes la oportunidad de implicarse en el contexto o problema cuando se les plantea una serie de preguntas que van aumentando en complejidad. Las primeras preguntas son normalmente de elección múltiple o preguntas de respuesta construida cerrada, mientras que las siguientes suelen ser preguntas de respuesta construida abierta. Este formato puede utilizarse para evaluar cualquiera de los grupos de competencia.

Una razón para el empleo de formatos de ejercicio con un estímulo común es que permite plantear tareas realistas que reflejen la complejidad propia de las situaciones de la vida real. Otra razón tiene que ver con una utilización eficiente del tiempo de examen, puesto que reduce el tiempo necesario para que el estudiante se introduzca en la situación. No obstante, en el diseño de los ejercicios, de la puntuación de la respuesta y de los criterios de puntuación se reconoce y tiene en cuenta la necesidad de que cada elemento presente en el ejercicio sea puntuado con independencia de los demás. Se reconoce también la importancia de minimizar el sesgo que puede producir la utilización de un número reducido de situaciones.

ESTRUCTURA DE LA EVALUACIÓN

Los instrumentos de prueba del ciclo 2003 totalizan 210 minutos de tiempo de examen. Las preguntas seleccionadas se agrupan en siete grupos y a cada uno de estos grupos le corresponden 30 minutos de examen. Los grupos de preguntas se distribuyen en los cuadernillos de prueba según un diseño de rotación.

El tiempo total de la prueba de matemáticas se distribuye lo más uniformemente posible entre las cuatro ideas principales (*cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones* *e incertidumbre*) y las cuatro situaciones (*personal, educacional/profesional, pública y científica*). La proporción de preguntas asociadas a los tres grupos de competencia (*reproducción, conexión y reflexión*) es aproximadamente de 1:2:1. Alrededor de un tercio de las preguntas serán de elección múltiple, otro tercio de respuesta construida cerrada y otro tercio de respuesta construida abierta.

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS DE MATEMÁTICAS

Para sintetizar los resultados de las respuestas a los instrumentos de evaluación OCDE/PISA se crea una escala descriptiva de rendimiento de cinco niveles (Masters y Forster, 1996; Masters, Adams y Wilson, 1999). La escala se elabora con ayuda de un modelo estadístico TRI (Teoría de Respuesta al Item) que permite tener en cuenta respuestas de tipo ordinal. La escala general se utiliza para describir la naturaleza del rendimiento, clasificando los resultados de los estudiantes de diferentes países en términos de los cinco niveles de rendimiento descritos, y, de este modo, proporciona un marco de referencia para las comparaciones internacionales.

Se considera la elaboración de un cierto número de subescalas, que se basarían probablemente en los tres grupos de competencia o en las cuatro ideas principales. Las decisiones sobre la elaboración de estas sub-escalas separadas se tomarán de acuerdo a diferentes criterios, especialmente de tipo psicométrico, tras el análisis de los datos obtenidos arrojados por las pruebas OCDE/PISA. Para facilitar estas opciones hay que garantizar que se selecciona un número suficiente de preguntas para cubrir cada categoría susceptible de generar una subescala. Además, las preguntas de cada categoría deben ofrecer una amplia gama de dificultad.

Los grupos de competencia descritos anteriormente en este documento reflejan categorías conceptuales de una complejidad y exigencia cognitiva crecientes, pero no reflejan una jerarquía estricta del rendimiento de los alumnos según la dificultad de las preguntas. La complejidad conceptual es sólo uno de los componentes de la dificultad de las preguntas que influye en el nivel de rendimiento. Otros son la familiaridad con la tarea, la cercanía o lejanía del momento del aprendizaje, el grado de entrenamiento y de práctica en dicha tarea, etc. Así, una pregunta de elección múltiple que movilice competencias del grupo de *reproducción* (por ejemplo, la pregunta: «¿cuál de los siguientes objetos es un rectángulo paralelepípedo?», acompañada de las imágenes de una pelota, una lata, una caja y un cuadrado) puede resultar muy fácil para un estudiante al que se le haya enseñado el significado de estos términos, pero será muy complicada para los que no estén familiarizados con la terminología utilizada. Aunque resulta posible imaginar preguntas relativamente difíciles del grupo de *reproducción* y preguntas relativamente fáciles del grupo de *reflexión*, y aunque se deban incluir en cada grupo preguntas de diferente grado de dificultad, es esperable que exista una relación positiva entre el grupo de competencia al que pertenece la pregunta y su grado de dificultad.

Entre los factores que sustentan los niveles de dificultad creciente de las preguntas y de la competencia matemática de los alumnos se cuentan los siguientes:

- El tipo y grado de interpretación y reflexión necesarios. Ello incluye la naturaleza de los requisitos derivados del contexto del problema, el grado de visibilidad de los requisitos matemáticos del problema, el grado en que los alumnos deben aplicar su propia construcción matemática al problema y el grado necesario de perspicacia, razonamiento complejo y generalización.

- El tipo de destrezas de representación necesarias, desde los problemas en que sólo se emplea una clase de representación a los problemas en que los estudiantes deben moverse entre diferentes modos de representación para hallar por sí mismos el apropiado.

- El tipo y nivel de destreza matemática necesario, desde los problemas de un solo paso que piden a los estudiantes reproducir hechos matemáticos básicos y realizar cálculos sencillos, a los problemas de varios pasos que implican un conocimiento matemático más avanzado, y habilidades más complejas de toma de decisión, procesamiento de información, resolución de problemas y construcción de modelos.

- El tipo y grado de argumentación matemática necesario, desde problemas en que no se precisa argumentación, pasando por problemas en que los alumnos deben aplicar argumentos bien conocidos, a problemas en que éstos deben elaborar argumentos matemáticos o entender la argumentación de terceros o juzgar la corrección de los argumentos o pruebas que se presentan.

En el nivel de competencia más bajo, por lo general los estudiantes realizan procesos de un paso que implican reconocer contextos familiares y problemas matemáticos bien formulados, reproducen procesos o hechos ampliamente conocidos y aplican destrezas de cálculo simples.

En el siguiente nivel de competencia, los estudiantes realizan generalmente ejercicios más complejos de más de un paso de procesamiento. También combinan diferentes elementos de información o interpretan diversas representaciones de in-formación o de conceptos matemáticos identificando los elementos importantes y la relación entre ellos. Por lo general, trabajan con formulaciones o modelos matemáticos dados, presentados con frecuencia de forma algebraica, para identificar soluciones, o realizan una pequeña secuencia de pasos de procesamiento o cálculo para alcanzar una solución.

En el nivel de competencia más alto, los estudiantes desempeñan un papel más creativo y activo al tratar los problemas matemáticos. Normalmente interpretan información más compleja y gestionan diversos pasos de procesamiento. Elaboran la formulación de un problema y, a menudo, crean un modelo adecuado que facilita su solución. Los estudiantes con este nivel generalmente identifican y aplican herramientas y conocimientos importantes en un contexto que no les resulta familiar. Asimismo, demuestran perspicacia para identificar una estrategia de solución adecuada y otros procesos cognitivos de orden superior, como capacidad de generalización, razonamiento y argumentación para explicar o comunicar los resultados.

SOPORTES Y HERRAMIENTAS

La norma OCDE/PISA relativa al empleo de calculadoras y otras herramientas es que los estudiantes pueden utilizarlas si las utilizan normalmente en el centro.

Así se conseguirá evaluar de la forma más verosímil el rendimiento de los estudiantes y se obtendrá la comparación más informativa del rendimiento de los diversos sistemas educativos. La elección de permitir a los estudiantes utilizar las calculadoras no difiere, en principio, de otras decisiones de política formativa de los propios sistemas que quedan fuera del control de OCDE/PISA.

Los estudiantes acostumbrados a disponer de una calculadora para ayudarse a resolver preguntas se verían en desventaja si se les privara de este aparato.

Síntesis

El objetivo del estudio OCDE/PISA es el desarrollo de indicadores que demuestren el grado de efectividad conseguida por diferentes países en la preparación de sus alumnos de 15 años para convertirlos en ciudadanos activos, reflexivos e inteligentes desde el punto de vista del empleo de las matemáticas. Para lograrlo, el proyecto OCDE/PISA ha desarrollado evaluaciones que se centran en determinar el grado en que los estudiantes son capaces de utilizar lo que han aprendido.

Este marco conceptual ofrece una definición de la competencia matemática y determina el contexto para su evaluación en el año 2003, de manera que los países de la OCDE puedan controlar algunos resultados importantes de sus sistemas educativos. La definición de competencia matemática seleccionada para este marco es coherente con las definiciones adoptadas para la competencia de lectura y de ciencias y con la orientación de OCDE/PISA de evaluar las capacidades de los alumnos para convertirse en miembros activos y participativos de la sociedad.

Los principales componentes del marco conceptual de matemáticas, que son coherentes con otros marcos del proyecto OCDE/PISA, incluyen contextos para el empleo de las matemáticas, contenido matemático y procesos matemáticos derivados de la definición de competencia. Los desarrollos sobre el contexto y el contenido hacen hincapié en los rasgos de los problemas a los que los estudiantes se enfrentan como ciudadanos, mientras que los desarrollos de los procesos hacen hincapié en las competencias a las que deben recurrir los alumnos para resolver estos problemas. Las competencias se han agrupado en tres grupos llamados "grupos de competencia" para facilitar un tratamiento racional del modo en que se interpretan los procesos cognitivos complejos dentro de un programa de evaluación estructurado.

El énfasis que hacen las evaluaciones de matemáticas OCDE/PISA en la utilización del conocimiento matemático para resolver los problemas del día a día representa la plasmación de un ideal que ya ha sido puesto en marcha, en grados diversos, en diferentes sistemas educativos a lo largo del mundo. Las evaluaciones OCDE/PISA intentan ofrecer una variedad de problemas matemáticos que incluyen diferentes grados de estructura y orientación, pero promoviendo problemas de tipo auténtico en que los estudiantes deben elaborar el razonamiento por sí mismos.

Ejemplos adicionales

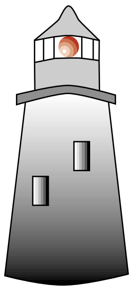
En este apartado se presentan nuevas preguntas de matemáticas para ilustrar determinados aspectos del marco conceptual. Las preguntas van acompañadas de comentarios que relacionan aspectos de las preguntas con diversas categorías del marco conceptual.

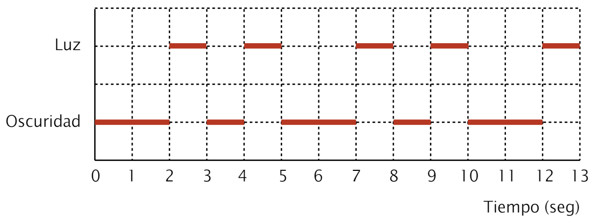
Éste es el tercer conjunto de ejemplos de preguntas de matemáticas publicado por la OCDE. Siete unidades (un total de 14 preguntas) fueron publicadas en *Measuring Student Knowledge and Skills* (OCDE, 2000), y otras cinco unidades (un total de 11 preguntas) fueron publicadas en *Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment* (OCDE, 2002a).

Aquí se incluyen trece unidades completas, con un total de 27 preguntas. Todas estas preguntas se emplearon en la prueba piloto del año 2002 como parte del proceso de elaboración de pruebas para el ciclo PISA 2003. Estas preguntas no fueron incluidas en la prueba final por diversas razones, relacionadas en buena parte con la necesidad de obtener un complejo equilibrio de características al estructurar los instrumentos definitivos de la prueba. Algunas de ellas tienen propiedades psicométricas que las convierten en poco apropiadas para una evaluación internacional; no obstante, resultan útiles a modo ilustrativo y, probablemente, para su empleo en clase.

Matemáticas, Unidad 1: EL FARO

Los faros son torres con un foco luminoso en la parte superior. Los faros ayudan a los barcos a seguir su rumbo durante la noche cuando navegan cerca de la costa.
Un faro emite destellos de luz según una secuencia regular fija. Cada faro tiene su propia secuencia.
En el diagrama de abajo se puede ver la secuencia de un faro concreto. Los destellos de luz alternan con períodos de oscuridad.





Se trata de una secuencia regular. Después de algún tiempo la secuencia se repite. Se llama período de la secuencia al tiempo que dura un ciclo completo, antes de que comience a repetirse. Cuando se descubre el período de la secuencia, es fácil ampliar el diagrama para los siguientes segundos, minutos o incluso horas.

Matemáticas, Ejemplo 1.1:

¿Cuánto dura el período de la secuencia de este faro?

A 2 segundos.
B 3 segundos.
C 5 segundos.
D 12 segundos.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 1.1

Máxima puntuación
Código 1: Respuesta C: 5 segundos.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Elección múltiple
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Pública

La manera inusual en que este problema auténtico se plantea a los estudiantes hace que el problema vaya más allá del grupo de competencia de *reproducción*. La representación gráfica resultará ser una novedad para la mayoría de los estudiantes, si no para todos. Ello exige movilizar destrezas de interpretación y razonamiento desde el principio. Probablemente la mayoría de los estudiantes reproducirán la situación mentalmente: oscuridad-oscuridad-luz-oscuridad-luz-oscuridad-oscuridad-luz y así sucesivamente. Deberán encontrar el «ritmo», ya sea con ayuda de la representación gráfica o mediante alguna otra representación de tipo más lingüístico como la que acabamos de presentar. La acción de establecer conexiones entre diferentes representaciones hace que el problema se incluya dentro del grupo de competencia de *conexión*.

El concepto subyacente de periodicidad es importante tanto dentro de la disciplina de las matemáticas como en la vida diaria. La prueba piloto indica que la mayoría de los estudiantes no encontraron este problema excesivamente complicado a pesar de su aspecto no habitual.

Alguien podría argumentar que el contexto podría favorecer a los estudiantes de poblaciones costeras. No obstante, debe señalarse que la competencia matemática también engloba la capacidad de saber utilizar las matemáticas en contextos diferentes a los propios. Esto no significa necesariamente que los estudiantes de poblaciones costeras no vayan a estar, en cierto modo, en una posición privilegiada. Sin embargo, el análisis por países de la pregunta en cuestión indica que no ha sido este el caso: los países sin litoral no tuvieron resultados diferentes a los países con litoral.

Matemáticas, Ejemplo 1.2:

¿Durante cuántos segundos emite este faro destellos de luz a lo largo de 1 minuto?

A 4
B 12
C 20
D 24

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 1.2

Máxima puntuación
Código 1: Respuesta D: 24.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Elección múltiple
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Pública

Este ejemplo es ligeramente más difícil que el Ejemplo 1.1 y el problema también es de una naturaleza algo diferente. Los estudiantes tienen que traducir y ampliar el modelo visual dado a un modelo numérico que les ayude a analizar la secuencia periódica a lo largo de un minuto. No es necesario que los estudiantes hayan contestado correctamente a la pregunta del Ejemplo 1.1, pero la utilización de este resultado es una de las estrategias posibles: dado que el período es 5, hay 12 períodos por minuto y, puesto que cada período tiene 2 destellos de luz, la respuesta es 24.

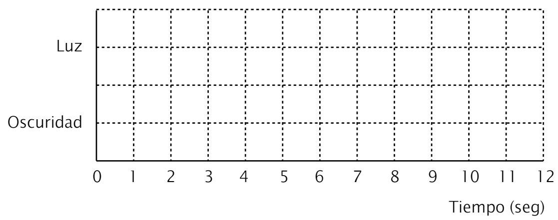
Otra estrategia que pueden utilizar los estudiantes de este nivel es examinar los primeros 10 ó 12 segundos en el gráfico, puesto que ambos son números por los que se puede dividir 60. Si examinan los primeros 10 segundos, verán 4 destellos de luz que deberán multiplicar por 6, y así hallarán la respuesta de 24. De este modo, sin embargo, no contaremos con la «prueba» de que hayan entendido completamente el problema. Lo mismo sucede si examinan los primeros 12 segundos: 4 destellos de luz 5 veces dan un resultado de 20, que no es lo correcto. La diferencia reside en que escogiendo 10, los estudiantes obtienen exactamente 2 períodos, mientras que, escogiendo 12, no obtienen un múltiplo del período.

Un problema auténtico, pero no demasiado difícil, asociado al grupo de conexión porque también son necesarios múltiples pasos.

La redacción del problema indica de entrada que éste es «abierto»: «En la cuadrícula de abajo traza el gráfico de una posible secuencia de destellos de luz». Aunque la pregunta parezca estar estrechamente relacionada con las dos preguntas anteriores, la tasa de respuestas correctas fue considerablemente inferior, lo que hace que esta pregunta sea “bastante difícil”.

Matemáticas, Ejemplo 1.3:

En la cuadrícula de abajo traza el gráfico de una posible secuencia de destellos de luz de un faro que emita 30 segundos de destellos de luz cada minuto. El período de esta secuencia debe ser de 6 segundos.



Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 1.3

Máxima puntuación

Código 2: El gráfico muestra una secuencia de luz y oscuridad con destellos de luz de 3 segundos por cada 6 segundos, y un período de 6 segundos. Esto se puede hacer de las siguientes maneras:

- 1 destello de un segundo y otro de dos segundos (y esto también se puede representar de diferentes maneras), o
- 1 destello de 3 segundos (lo cual puede hacerse de cuatro maneras distintas).
- Si están representados 2 períodos, la secuencia debe ser la misma para ambos.

Puntuación parcial

Código 1: El gráfico muestra una secuencia de luz y oscuridad con destellos de luz de 3 segundos por cada 6 segundos, pero el período no es de 6 segundos. Si se presentan 2 períodos, la pauta debe ser la misma para ambos.

- 3 destellos de un segundo alternando con 3 períodos de oscuridad de un segundo.

Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Reflexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Pública

Resulta interesante que a los estudiantes se les pida "construir" o "diseñar"; esto constituye un aspecto importante de la competencia matemática: utilizar las capacidades matemáticas no sólo de una manera pasiva o indirecta sino elaborando una respuesta. La solución del problema no es algo trivial, porque deben satisfacerse dos condiciones: igual cantidad de luz y de oscuridad (30 segundos por minuto) y un período de seis segundos. Esta combinación implica que los estudiantes alcancen verdaderamente un nivel conceptual de comprensión de la periodicidad, una prueba de que están trabajando con el grupo de competencias de *reflexión*.

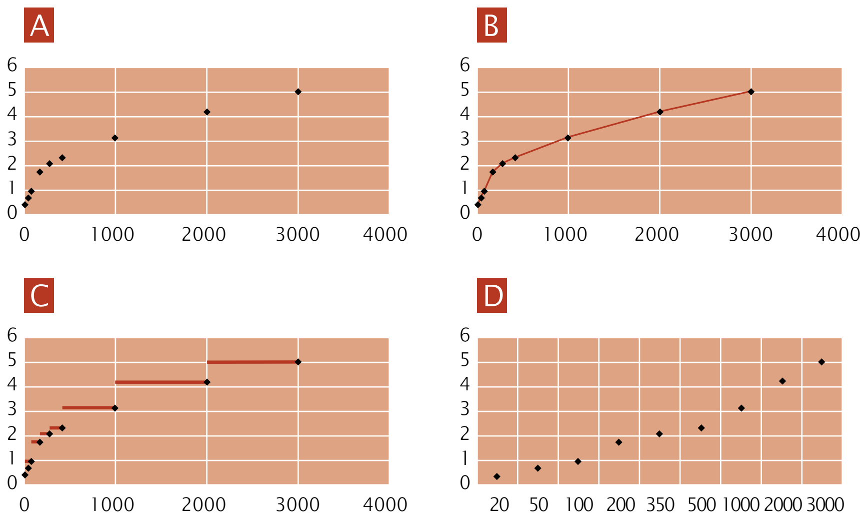
Matemáticas, Unidad 2: TARIFAS POSTALES

Las tarifas postales de Zedlandia están en basadas en el peso de los paquetes (redondeado al gramo más cercano), como se muestra en la tabla siguiente:

Peso (redondeado al gramo más cercano)	Tarifas
Hasta 20 g	0,46 zeds
21 g – 50 g	0,69 zeds
51 g – 100 g	1,02 zeds
101 g – 200 g	1,75 zeds
201 g – 350 g	2,13 zeds
351 g – 500 g	2,44 zeds
501 g – 1000 g	3,20 zeds
1001 g – 2000 g	4,27 zeds
2001 g – 3000 g	5,03 zeds

Matemáticas, Ejemplo 2.1:

¿Cuál de los siguientes gráficos es la mejor representación de las tarifas postales en Zedlandia? (El eje horizontal muestra el peso en gramos, y el eje vertical muestra el precio en zeds.)



Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 2.1

Máxima puntuación
Código 1: Respuesta C

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Elección múltiple
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Incertidumbre
Situación: Pública

Se trata claramente de una situación pública y de un problema que se presenta con frecuencia, aunque no necesariamente de esta forma. En la vida diaria los ciudadanos sencillamente entregan el paquete y preguntan cuánto cuesta enviarlo. No obstante, se espera que los ciudadanos bien informados reflexionen mínimamente sobre la estructura del sistema de tarifas postales u otras estructuras similares. Muchas personas suelen saber que las tarifas postales aumentan muy rápidamente al principio pero que a medida que el peso es mayor el aumento se hace menor. Este tipo de estructura es muy común.

No obstante, darse cuenta de que dicha estructura pueda representarse de modo visual es algo muy distinto. El gráfico es un gráfico de tramos, que probablemente los estudiantes no hayan encontrado nunca o muy raramente en el currículum escolar. Ésta es probablemente la razón principal por la que los estudiantes encontraron difícil este problema. A los estudiantes se les ha enseñado a unir los puntos de los gráficos y, a veces, se plantean si unir los puntos mediante líneas rectas o curvas (como la alternativa B de este ejemplo). La B parece una buena respuesta, ya que da el precio por cada kilo, a diferencia de la alternativa A. El problema es que no todos los precios «existen» y que la gama de precios es muy limitada: 0,46–0,69–1,02 y así sucesivamente. Por tanto, el gráfico B no es el correcto. El gráfico C es el que mejor se ajusta a la tabla de pesos y tarifas.

Otro factor de complicación a la hora de vincular la tabla al gráfico es el hecho de que los gráficos A, B y C resultan complicados de interpretar para los primeros 500 gramos por las escalas utilizadas. Si el interés de los estudiantes se centra en los valores menores, entonces la alternativa D puede resultarles atractiva, porque muestra una interpretación bien legible de la tabla, y los estudiantes pueden no darse cuenta de que la escala horizontal no es lineal. Pero si se dan cuenta de que los puntos aislados del gráfico no pueden nunca representar una estructura como la de la tabla, no tendrán en cuenta esta opción.

De los comentarios realizados se deduce que el grupo de competencia es el de *conexión,* debido a la representación inusual y a las destrezas de interpretación necesarias para contestar la pregunta.

Matemáticas, Ejemplo 2.2:

Juan quiere enviar a un amigo dos objetos que pesan 40 g y 80 g respectivamente.

Según las tarifas postales de Zedlandia, decide si es más barato enviar los dos objetos en un único paquete o enviar los objetos en dos paquetes separados. Escribe tus cálculos para hallar el coste en los dos casos.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 2.2

Máxima puntuación
Código 1: Será más barato enviar los objetos en dos paquetes separados. El coste será de 1,71 zeds para dos paquetes separados, y de 1,75 zeds para un único paquete que contenga los dos objetos.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cantidad
Situación: Pública

Este ejemplo es más práctico que el anterior y en el estudio piloto resultó ser relativamente fácil para los alumnos.

Se podría clasificar dentro del grupo de conexión, dado que no resulta familiar para los estudiantes y requiere algo más que meras competencias de reproducción. Juan quiere enviar a un amigo dos objetos que pesan 40 g y 80 g. Aunque es ligeramente contraria a la intuición, la respuesta puede hallarse con facilidad en las tablas: un envío de 40 g cuesta 0,69 zeds y uno de 80 gramos cuesta 1,02 zeds, así que dos paquetes cuestan 1,71 zeds. Enviar un paquete de 120 g costaría 1,75 zeds. Este problema no resulta complejo matemáticamente hablando, pero representa un ejemplo relevante de la competencia matemática: es un tipo de pregunta que un ciudadano llega a plantearse en diversas situaciones de su vida cotidiana.

Matemáticas, Unidad 3: LATIDOS DEL CORAZÓN

Por razones de salud la gente debería limitar sus esfuerzos, al hacer deporte, por ejemplo, para no superar una determinada frecuencia cardiaca.

Durante años la relación entre la máxima frecuencia cardiaca recomendada para una persona y su edad se describía mediante la fórmula siguiente:

Máxima frecuencia cardiaca recomendada = 220 – edad

Investigaciones recientes han demostrado que esta fórmula debería modificarse ligeramente. La nueva fórmula es la siguiente:

Máxima frecuencia cardiaca recomendada = 208 – (0,7 x edad)

Matemáticas, Ejemplo 3.1:

Un artículo de periódico afirma: "El resultado de usar la nueva fórmula en vez de la antigua es que el máximo número recomendado de latidos cardíacos por minuto disminuye ligeramente para los jóvenes y aumenta ligeramente para los mayores."
¿A partir de qué edad aumenta la máxima frecuencia cardiaca recomendada como resultado de introducir la nueva fórmula? Escribe tus cálculos.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 3.1

Máxima puntuación
Código 1: Se acepta 41 ó 40.
220 – *edad* = 208 – 0,7 x *edad* resulta una *edad* = 40, por lo que las personas por encima de 40 años tendrán un máximo ritmo cardiaco recomendado más alto con la nueva fórmula.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Pública/Personal

La clasificación de la situación depende obviamente de si la gente está o no interesada en la información sobre su salud y su cuerpo. Uno puede argumentar sin temor a equivocarse que la pregunta es científica (por el empleo de fórmulas), pero muchos deportistas (aficionados al *footing*, a la bicicleta, al remo, a pasear, etc.) sí que controlan de manera regular sus latidos durante su ejercicio. La disponibilidad de dispositivos electrónicos cada vez más baratos ha conseguido que este aspecto de la salud sea accesible para la gente corriente. Ello explica que la pregunta se clasifique como "Pública/Personal".

Dado que tratamos aquí más con la construcción de un modelo que con la solución de un problema rutinario, se impone su clasificación dentro del grupo de *conexión*, así como también se impone su pertenencia a la idea principal de *cambio y relaciones*.

Comparar dos fórmulas que hacen referencia a la salud de una persona puede resultar una actividad que excita la curiosidad, especialmente cuando se presentan de manera verbal. Normalmente esto las hace más accesibles a los estudiantes. Incluso antes de preguntar nada, la reacción inicial de los estudiantes puede ser ver cómo su edad les conduce a resultados recomendados diferentes. Dado que los alumnos evaluados por PISA tienen 15 años, el resultado que surge de la fórmula original es de 205 latidos por minuto (y hay que caer en la cuenta de que se trata de una frecuencia *por minuto*, información que no se ofrece en el enunciado) y con la fórmula revisada es de 198 (ó 197). De este modo los alumnos pueden haber dado con un indicio de que la afirmación del artículo puede ser correcta.

No obstante, el ejemplo formulado es algo más complicado que todo esto. Requiere que los estudiantes averigüen a qué edad coincide el resultado de las dos fórmulas. Esto puede determinarse mediante ensayo y error (una estrategia bien asimilada por muchos estudiantes), pero es más probable que se utilice la vía algebraica: 220 – edad = 208 – (0,7 x edad), que da una respuesta de unos 40.

Desde el punto de vista de la competencia matemática y de unas matemáticas más orientadas al currículum, este problema resulta ser muy relevante e interesante. Sin embargo, los datos de la prueba piloto indican que los alumnos de 15 años encontraron este problema bastante difícil.

Matemáticas, Ejemplo 3.2:

La formula para la *máxima frecuencia cardiaca recomendada* = 208 – (0,7 x *edad*) se usa también para determinar cuándo es más eficaz el ejercicio físico. Las investigaciones han demostrado que el ejercicio físico es más eficaz cuando los latidos cardíacos alcanzan el 80% de la máxima frecuencia cardiaca recomendada.
Escribe una fórmula que calcule la frecuencia cardiaca recomendada para que el ejercicio físico sea más efectivo, expresada en términos de edad.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 3.2

Máxima puntuación
Código 1: Cualquier fórmula que sea el equivalente de multiplicar la fórmula del máximo ritmo cardiaco recomendado por el 80%.

- frecuencia cardiaca = 166 – 0,56 x *edad*.
- frecuencia cardiaca = 166 – 0,6 x *edad*.
- f = 166 – 0,56 x e.
- f = 166 – 0,6 x e.
- frecuencia cardiaca = (208 – 0,7 x *edad*) x 0,8.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Pública/Personal

Este ejemplo *parece* medir exactamente las mismas competencias que el Ejemplo 3.1. El porcentaje de respuestas correctas es casi idéntico (en la prueba piloto). Pero hay una diferencia importante: en el Ejemplo 3.1 los alumnos tienen que comparar dos formulas y decidir cuándo coinciden en el resultado. En el Ejemplo 3.2 se les pide que elaboren una fórmula, algo que normalmente no se les exige en muchos países durante su formación escolar. Desde un punto de vista estrictamente matemático la pregunta no es nada difícil: se trata sencillamente de multiplicar la fórmula por 0,8. Por ejemplo, *frecuencia cardiaca* = *(208 – 0,7 x edad) x 0,8.* Podría parecer que incluso este simple manejo de las expresiones algebraicas presentadas en un contexto práctico y real representa un reto sustancial para muchos jóvenes de 15 años.

Matemáticas, Unidad 4: PAGO POR SUPERFICIE

Los habitantes de un edificio de pisos deciden comprar el edificio. Pondrán el dinero entre todos de modo que cada uno pague una cantidad proporcional al tamaño de su piso.

Por ejemplo, una persona que viva en un piso que ocupa la quinta parte de la superficie del conjunto de pisos, deberá pagar la quinta parte del precio total del edificio.

Matemáticas, Ejemplo 4.1:

Rodea con un círculo la palabra *Correcto* o *Incorrecto* para cada una de las siguientes afirmaciones.

Afirmación	*Correcto / Incorrecto*
La persona que vive en el piso más grande pagará más dinero por cada metro cuadrado de su piso que la persona que vive en el piso más pequeño.	Correcto / Incorrecto
Si se conocen las superficies de dos pisos y el precio de uno de ellos, entonces se puede calcular el precio del otro.	Correcto / Incorrecto
Si se conoce el precio del edificio y cuánto pagará cada propietario, entonces se puede calcular la superficie total de todos los pisos.	Correcto / Incorrecto
Si el precio total del edificio se redujera en un 10%, cada uno de los propietarios pagaría un 10% menos.	Correcto / Incorrecto

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 4.1

Máxima puntuación
Código 1: Respuestas que especifican: Incorrecto, Correcto, Incorrecto, Correcto, en este orden.

Ninguna puntuación
Código 0: Cualquier otra combinación de respuestas.

Tipo de pregunta: Elección múltiple compleja
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Pública

Esta pregunta exige un nivel bastante alto de competencia de razonamiento proporcional y hace referencia a una situación de vida práctica en sociedad que probablemente no resulte muy familiar a los jóvenes de 15 años. El formato de elección múltiple compleja utilizado exige que los estudiantes demuestren que han comprendido ampliamente los conceptos implicados. Además, los estudiantes deben leer y entender una serie de enunciados matemáticos complejos. En la prueba piloto esta pregunta resultó muy difícil.

Matemáticas, Ejemplo 4.2:

Hay tres pisos en el edificio. El mayor de ellos, el piso 1, tiene una superficie total de 95 m^2. Los pisos 2 y 3 tienen superficies de 85 m^2 y 70 m^2 respectivamente. El precio de venta del edificio es de 300.000 zeds.
¿Cuánto deberá pagar el propietario del piso 2? Escribe tus cálculos.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 4.2

Máxima puntuación
Código 2: 102.000 zeds, con o sin cálculos. No es necesario especificar la unidad.

- Piso 2: 102.000 zeds
- Piso 2: $\frac{85}{250}$ x 300.000 = 102.000 *zeds*
- $\frac{300.000}{250}$ = 1.200 zeds por cada metro cuadrado, luego el apartamento 2 cuesta 102.000.

Puntuación parcial
Código 1: Método correcto, con errores menores de cálculo.

- Piso 2: $\frac{85}{250}$ x 300.000 = 102.000 *zeds*

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cantidad
Situación: Pública

El Ejemplo 4.2 es un ejemplo más concreto que incluye pisos "reales" cuya superficie es "real". Los resultados de la prueba piloto confirmaron que esta pregunta resulta mucho más fácil que la primera, que es más abstracta.

La clasificación en el grupo de competencia de conexión es la adecuada dado que la resolución del problema comporta múltiples pasos y el contexto no es familiar.

Matemáticas, Unidad 5: ESTATURA DE LOS ALUMNOS

Matemáticas, Ejemplo 5.1:

Un día, en clase de matemáticas, se mide la estatura de todos los alumnos. La estatura media de los chicos es de 160 cm y la estatura media de las chicas es de 150 cm. Elena ha sido la más alta: mide 180 cm. Pedro ha sido el más bajo: mide 130 cm.

Dos estudiantes faltaron a clase ese día, pero fueron a clase al día siguiente. Se midieron sus estaturas y se volvieron a calcular las medias. Sorprendentemente, la estatura media de las chicas y la estatura media de los chicos no cambió.

¿Pueden las siguientes conclusiones deducirse de esta información?

Rodea con un círculo la palabra *Sí* o *No* para cada conclusión.

Conclusión	*¿Puede deducirse esta conclusión?*
Los dos estudiantes son chicas.	Sí / No
Uno de los estudiantes es un chico y el otro es una chica.	Sí / No
Los dos estudiantes tienen la misma estatura.	Sí / No
La estatura media de todos los estudiantes no cambió.	Sí / No
Pedro sigue siendo el más bajo.	Sí / No

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 5.1

Máxima puntuación
Código 1: *No* en todas las conclusiones.

Ninguna puntuación
Código 0: Cualquier otra combinación de respuestas.

Tipo de pregunta: Elección múltiple compleja
Grupo de competencia: Reflexión
Idea principal: Incertidumbre
Situación: Educativa

La clasificación es sencilla: *incertidumbre*, puesto que precisa la comprensión de conceptos estadísticos; *educativa*, puesto que es el tipo de problema que se encuentra en un escenario escolar; y *reflexión*, por el importante aspecto comunicativo: los estudiantes tienen que entender el lenguaje detalladamente y los conceptos subyacentes, que son bastante sofisticados. El problema implica la habilidad de formular preguntas («¿cómo puedo saber...?», «cómo puedo hallar...?», «¿qué puede pasar?»), «¿qué pasaría si...?») y la habilidad de comprender y manejar conceptos matemáticos (media) en contextos complejos.

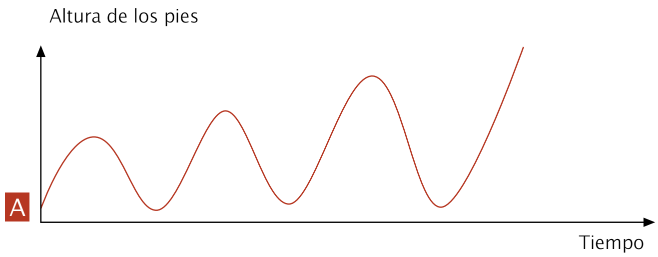
Resulta importante el aspecto de la matematización consistente en identificar la información y el contenido matemáticos relevantes. Una lectura superficial conducirá al desastre. La situación es verdaderamente compleja: varía en la clase y a lo largo del tiempo. La entidad *clase* se utiliza cuando se trata la media de chicos y chicas por separado, pero, posteriormente, se afirma que Elena es la persona (chica o estudiante) más alta y Pedro, la persona (chico o estudiante) más baja. Los alumnos deben realizar una lectura cuidadosa para darse cuenta de que Pedro es un chico y de que Elena es una chica. La variación en el tiempo consiste en que en un primer momento faltan dos estudiantes y en que cuando al día siguiente se les incluye en la medición, la media no se altera. La clase ha aumentado, pero no se sabe si estos dos estudiantes añadidos son dos chicas, dos chicos o un chico y una chica.

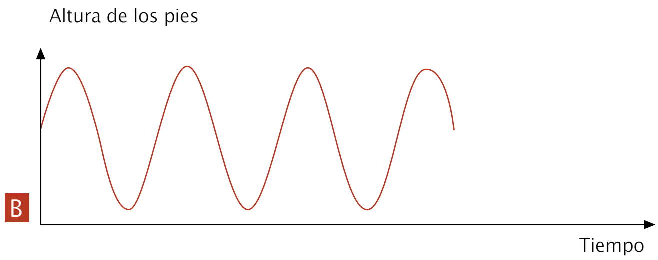
Para responder correctamente a las cinco partes de esta pregunta, los alumnos deben explorar de un modo complejo las relaciones entre los datos y los resúmenes estadísticos de dichos datos. La prueba piloto mostró que esta pregunta constituía todo un reto para los jóvenes de 15 años.

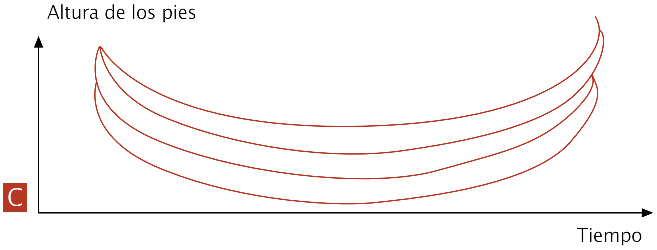
Matemáticas, Unidad 6: EL COLUMPIO

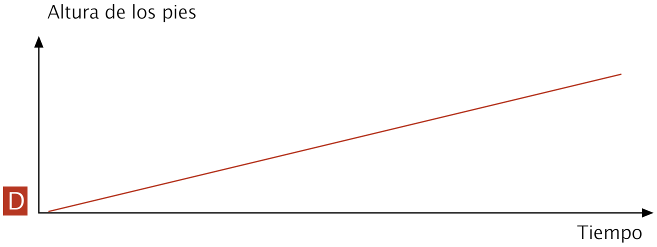
Matemáticas, Ejemplo 6.1:

Mohammed está sentado en un columpio. Empieza a columpiarse. Está intentando llegar tan alto como le sea posible. ¿Cuál de estos gráficos representa mejor la altura de sus pies por encima del suelo mientras se columpia?









Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 6.1

Máxima puntuación
Código 1: Respuesta A.
Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Elección múltiple
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Personal

Este tipo de pregunta es muy popular en ciertos países: ¿qué representación gráfica se ajusta al enunciado? En la década de los años setenta, fue el profesor de matemáticas canadiense Janvier quien promovió el formato al pedir a los estudiantes que identificaran el circuito de carreras que correspondía al gráfico de velocidad dado. En el ciclo PISA 2000 se utilizó una pregunta similar, que puede consultarse en la publicación *Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment* (OCDE, París, 2002a).

En el caso del columpio, la pregunta parece más fácil que la de PISA 2000, porque aquí se pueden desechar ciertas alternativas casi inmediatamente, lo que no era el caso en el problema del circuito de carreras.

La respuesta A parece ajustarse bastante bien. La B no comienza con los pies en el suelo y no aumenta con poco balanceo; la C es una mera visualización de la acción de balanceo; y en la D no hay balanceo. Por tanto, la respuesta correcta es A, y es la que eligieron la mayor parte de los estudiantes.

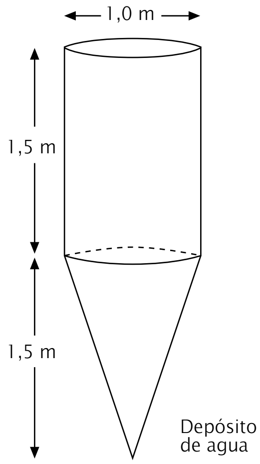
La clasificación dentro del grupo de *conexión* es apropiada, porque los estudiantes tienen que interpretar y vincular al menos dos representaciones, textual y gráfica, y vincular el mejor gráfico al texto. La familiaridad con el contexto puede añadir un componente práctico a la evaluación de las opciones de respuesta. Los estudiantes tienen que entender el gráfico en el contexto familiar que se les presenta; no obstante, las representaciones gráficas no resultan tan familiares.

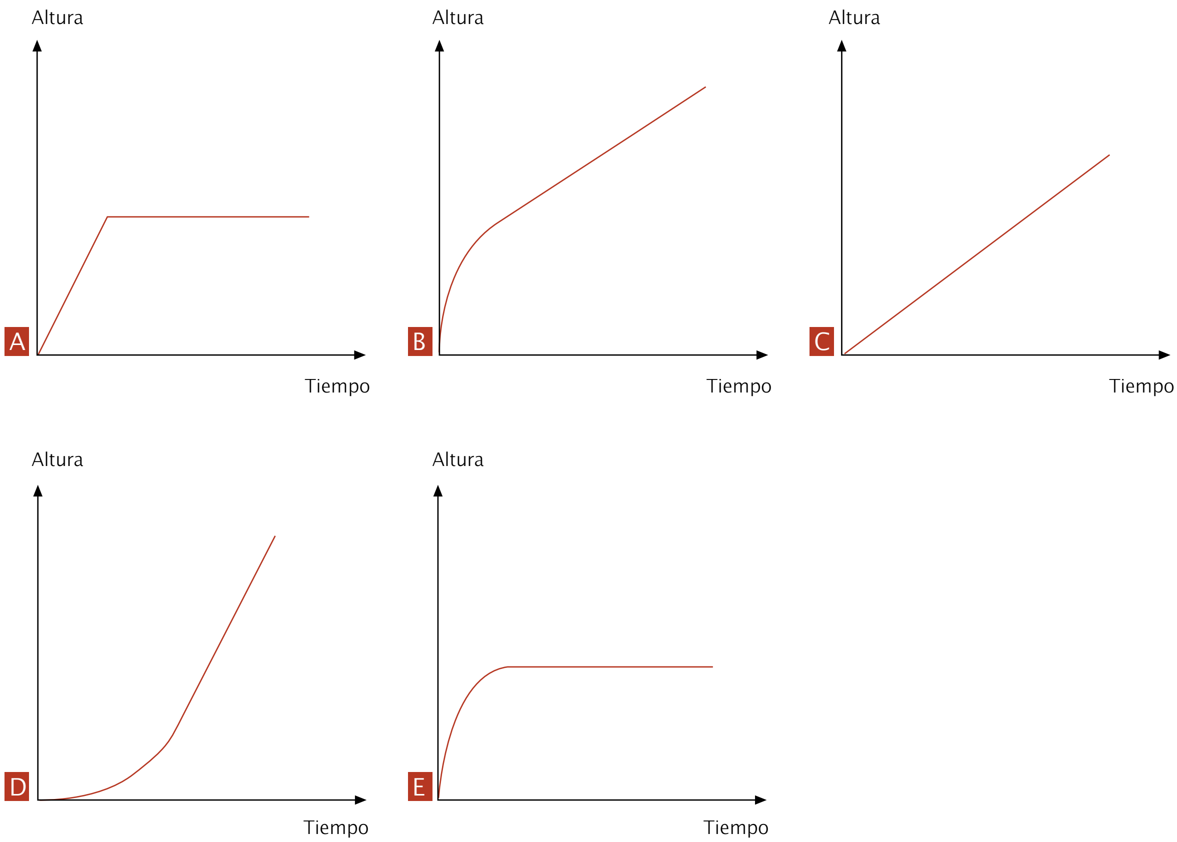
Matemáticas, Ejemplo 7.1:

Un depósito de agua tiene la forma y dimensiones que se muestran en el dibujo.

Inicialmente el depósito está vacío. Después se llena con agua a razón de un litro por segundo.

¿Cuál de los gráficos siguientes muestra cómo va cambiando la altura del agua en la cisterna en función del tiempo?





Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 7.1

Máxima puntuación
Código 1: Respuesta B.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Elección múltiple
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Científica

Este ejemplo no es muy complicado de entender para los es-tudiantes: hay poco texto y un dibujo claro. Los estudiantes deben vincular el texto y el dibujo y relacionar su comprensión con las representaciones gráficas de las opciones de respuesta. Estas competencias se engloban dentro del grupo *conexión.*

Es interesante observar que esta pregunta contiene información superflua. Se detallan las medidas del depósito y el caudal constante que se indica es de un litro por segundo. No obstante, esta cuantificación no sirve de ayuda a los alumnos, puesto que los gráficos son únicamente "globales" o "cualitativos". Esto es interesante porque normalmente nunca se da información superflua en las preguntas de matemáticas, mientras que en los problemas del mundo real aparece continuamente. En realidad, una parte importante de cualquier proceso de matematización consiste en identificar la parte matemática importante y desechar la información superflua.

Aunque el contexto de la pregunta se ha clasificado como *científico*, este tipo de problemas se presentan también en situaciones personales. Llenar un vaso, un jarrón o un cubo, especialmente cuando el recipiente no es cilíndrico, puede comportar alguna sorpresa si no se tiene en cuenta que la velocidad del aumento en la altura de llenado depende de la forma del recipiente. Ser consciente de este tipo de hechos es algo que se engloba en la definición de competencia matemática.

Matemáticas, Unidad 8: TIEMPO DE REACCIÓN

En una carrera de velocidad, el tiempo de reacción es el tiempo que transcurre entre el disparo de salida y el instante en que el atleta abandona el taco de salida. El tiempo final incluye tanto el tiempo de reacción como el tiempo de carrera.
En la tabla siguiente figura el tiempo de reacción y el tiempo final de 8 corredores en una carrera de velocidad de 100 metros.

Calle	*Tiempo de reacción (s)*	*Tiempo final (s)*
1	0,147	10,09
2	0,136	9,99
3	0,197	9,87
4	0,180	No acabó la carrera
5	0,210	10,17
6	0,216	10,04
7	0,174	10,08
8	0,193	10,13

Matemáticas, Ejemplo 8.1:

Identifica a los corredores que ganaron las medallas de oro, plata y bronce en esta carrera. Completa la tabla siguiente con su número de calle, su tiempo de reacción y su tiempo final.

Medalla	*Calle*	*Tiempo de reacción (s)*	*Tiempo final (s)*
ORO			
PLATA			
BRONCE			

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 8.1

Máxima puntuación
Código 1:

Medalla	*Calle*	*Tiempo de reacción (s)*	*Tiempo final (s)*
ORO	3	0,197	9,87
PLATA	2	0,136	9,99
BRONCE	6	0,216	10,04

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Reproducción
Idea principal: Cantidad
Situación: Científica

Una pregunta de *reproducción* que exige la comprensión de la notación decimal (cantidad) pero a la que se añade algo de información superflua y de complejidad a causa del tiempo de reacción, que no es necesario para contestar el primer ejemplo. Alrededor de las dos terceras partes de los alumnos que participaron en la prueba piloto dieron con la respuesta correcta, lo que indica que se trata de una pregunta relativamente fácil para la mayoría de los jóvenes de 15 años.

Matemáticas, Ejemplo 8.1:

Hasta la fecha, nadie ha sido capaz de reaccionar al disparo de salida en menos de 0,110 segundos.

Si el tiempo de reacción registrado para un corredor es inferior a 0,110 segundos, entonces se considera que se ha producido una salida falsa porque el corredor tiene que haber salido antes de oír la señal.

Si el tiempo de reacción del corredor que ha ganado la medalla de bronce hubiera sido menor, ¿podría haber ganado la medalla de plata? Justifica tu respuesta.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 8.2

Máxima puntuación
Código 1: Sí, con una explicación correcta. Por ejemplo:

- Sí. Si su tiempo de reacción hubiera sido 0,05 s menor, habría igualado el segundo lugar
- Sí, podría haber obtenido la medalla de plata si su tiempo de reacción hubiera sido menor o igual que 0,166 s.
- Sí, con el tiempo de reacción más rápido posible, él habría hecho 9,93, que es suficiente para conseguir la medalla de plata.

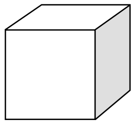
Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas, incluyendo sí pero sin una explicación correcta.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cantidad
Situación: Científica

Este ejemplo precisa de un cierto nivel de razonamiento verbal y matemático. Si se ha contestado correctamente el Ejemplo 8.1, se ve claramente que el corredor de la calle 6 (Bronce) tiene un tiempo de reacción lento (es el más lento de todos) y que el de la calle 2 (Plata) tiene un tiempo de reacción muy rápido (el más rápido de todos), pero ambos acaban prácticamente con el mismo tiempo final (con una diferencia de sólo 0,05 segundos). Por tanto, el corredor de la calle 6 podría haber obtenido la medalla de plata si su tiempo de reacción hubiera sido algo más rápido, puesto que la diferencia de sus tiempos de reacción fue un bastante mayor que la diferencia en sus tiempos finales.

Dadas las destrezas de interpretación necesarias más una comparación poco habitual de decimales con diferentes grados de redondeo, esta pregunta forma parte del grupo de competencias de *conexión*.

A Susana le gusta construir bloques con cubos pequeños como el que se muestra en el siguiente gráfico:



Cubo pequeño

Susana tiene muchos cubos pequeños como éste. Utiliza pegamento para unir los cubos y construir otros bloques.

Primero Susana pega ocho cubos para hacer el bloque que se muestra en el gráfico A:

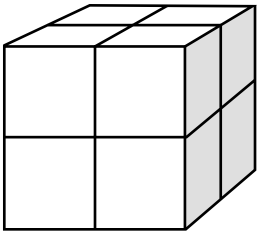


Gráfico A

Luego Susana hace los bloques macizos que se muestran en los siguientes gráficos B y C:

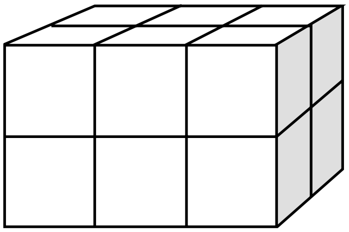


Gráfico B

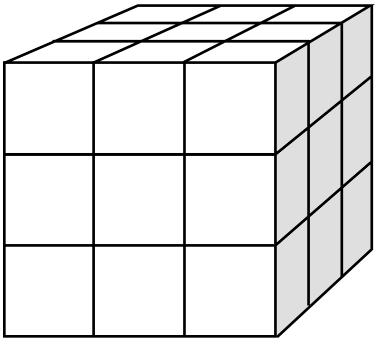


Gráfico C

Matemáticas, Ejemplo 9.1:

¿Cuántos cubos pequeños necesitará Susana para hacer el bloque que se muestra en el gráfico B?
Respuesta: .... cubos.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 9.1

Máxima puntuación
Código 1: 12 cubos.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Reproducción
Idea principal: Espacio y forma
Situación: Personal

En cada grupo de preguntas es obligatorio incluir preguntas muy fáciles y también preguntas más difíciles, medidas según los resultados de los estudiantes. Esta pregunta es realmente fácil: los estudiantes pueden imaginar el problema directamente puesto que es muy probable que hayan utilizado este tipo de bloques a menudo (Lego, Duplo, etc.), y no habrán necesitado siquiera hacer una multiplicación para obtener la respuesta correcta. En el Gráfico B ven los seis primeros cubos y saben que hay seis cubos más detrás. Tanto por su carácter familiar como por su sencillez esta es una pregunta típica del grupo de *reproducción.*

Matemáticas, Ejemplo 9.2:

¿Cuántos cubos pequeños necesitará Susana para hacer el bloque macizo que se muestra en el gráfico C?
Respuesta: .... cubos.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 9.2

Máxima puntuación
Código 1: 27 cubos.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Reproducción
Idea principal: Espacio y forma
Situación: Personal

El Ejemplo 9.2 se diferencia del Ejemplo 9.1 en que el número de cubos es algo mayor (27 en lugar de 12), pero conceptualmente se trata de la misma pregunta. La prueba piloto muestra que esta pregunta resultó relativamente fácil para los alumnos. Era de esperar, dado que las competencias para resolver este problema son muy básicas. Los expertos de los países participantes estuvieron de acuerdo en que las preguntas de este tipo son muy parecidas a las de sus currículos respectivos.

Matemáticas, Ejemplo 9.3:

Susana se da cuenta de que ha utilizado más cubos pequeños de los que realmente necesitaba para hacer un bloque como el que se muestra en el gráfico C. Se da cuenta de que podía haber construido un bloque como el del gráfico C pegando los cubos pequeños, pero dejándolo hueco por dentro.
¿Cuál es el mínimo número de cubos que necesita para hacer un bloque como el que se muestra en el gráfico C, pero hueco?
Respuesta: .... cubos.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 9.3

Máxima puntuación
Código 1: 26 cubos.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Espacio y forma
Situación: Personal

En el Ejemplo 9.2 se suponía que estábamos trabajando con cubos sueltos y que, por tanto, necesitábamos 27, puesto que, de otro modo, el bloque se desmoronaría. No obstante, si se pudiera utilizar pegamento, sería posible construir un bloque como el C utilizando menos de 27 bloques. Aunque la respuesta “obvia” es 26 (quitando el cubo central), hay diversas consideraciones sobre este ejemplo. El problema es que la pregunta no dice explícitamente que el bloque C deba verse igual desde cualquier ángulo. Esto es importante, porque si se usa pegamento y se debe conseguir algo ajustado al gráfico C, se puede quitar más de un cubo. Sin embargo, esto se afirma *implícitamente*, al decir que el bloque debe estar hueco en el *interior*. No obstante, desde un punto de vista lingüístico y de interpretación, esta pregunta no resulta tan directa como la anterior.

La pregunta puede clasificarse dentro del grupo de *conexión* por diversas razones: la matematización necesaria para captar los elementos esenciales de la pregunta, la necesidad de interpretar mentalmente el gráfico C con un agujero en el centro, el razonamiento y pensamiento necesarios para obtener la respuesta correcta y la falta de un algoritmo o procedimiento estándar.

Matemáticas, Ejemplo 9.4:

Ahora Susana quiere construir un bloque que parezca un bloque macizo y que tenga 6 cubos pequeños de largo, 5 de ancho y 4 de alto. Quiere usar el menor número posible de cubos dejando el mayor hueco posible en el interior.

¿Cuál es el mínimo número de cubos que necesitará Susana para hacer este bloque?

Respuesta: .... cubos.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 9.4

Máxima puntuación
Código 1: 96 cubos.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Reflexión
Idea principal: Espacio y forma
Situación: Personal

En el Ejemplo 9.4 hay que suponer (por la forma en que se plantea el problema) que se puede utilizar pegamento. El problema ahora es: «¿cuál es el mínimo número de cubos necesario para construir un bloque hueco de 6 x 5 x 4?»

Tal y como se ha apuntado antes, los estudiantes no disponen de un procedimiento heurístico estándar para contestar a esta pregunta. Tener una imagen mental del cubo que falta en una construcción de 3 x 3 x 3 es algo muy diferente. En lugar de tener que extraer mentalmente un cubo, los estudiantes tienen que plantear una estrategia más generalizable que comporta un razonamiento matemático más complejo. Por tanto, tiene sentido clasificar esta pregunta dentro del grupo de competencia de *reflexión.*

¿Cómo pueden los alumnos dar con la respuesta correcta? Una buena estrategia sería empezar con el número máximo de cubos: 6 x 5 x 4 da un total de 120. Luego, mentalmente, se sacan del centro tantos como sea posible. Como hay 6 de largo, se pueden sacar 4; como hay 5 de ancho, se pueden sacar 3; como hay 4 de alto, se pueden sacar 2. El total es 4 x 3 x 2, lo que da 24. Y 120 - 24 = 96, que es la respuesta correcta. Es una buena estrategia que muestra una comprensión real. En el contexto de la clase, sería interesante pedir a los estudiantes una explicación de sus razonamientos para así descubrir técnicas de enseñanza eficaces.

Otra estrategia sería considerar todas las paredes necesarias para conseguir el bloque deseado. Un dibujo resultaría muy útil en este caso.

Para construir la pared frontal se necesitan 5 x 4 bloques; para la pared trasera, otros 5 x 4 bloques. Para la pared lateral no se necesitan 6 x 4, puesto que ya están cubiertas la parte delantera y la trasera. Por tanto, la longitud de las paredes laterales no es 6, sino 4, por lo que son necesarios

4 x 4 para cada lado. Por último, hay que cubrir la base y la parte superior sin volver a contar los cubos que ya tenemos. Esto nos da otros 3 x 4. Total: 5 x 4; 5 x 4; 4 x 4; 4 x 4; 3 x 4; 3 x 4, lo que da un total de 96.

Sin duda, los estudiantes utilizarán diferentes estrategias. Un estudio como PISA puede a veces utilizarse para descubrir las estrategias que los estudiantes crean o aplican al enfrentarse con una situación de esta complejidad, en la que los medios de que dispone el sujeto para formarse una representación en el sentido tradicional son limitados.

Este problema constituye un desafío, casi estrictamente intramatemático, pero que no por ello deja de movilizar competencias y destrezas, como la visualización en el espacio, que son esenciales para la competencia matemática.

Matemáticas, Unidad 10: CONCENTRACIÓN DE UN FÁRMACO

Matemáticas, Ejemplo 10.1:

A una mujer ingresada en un hospital le ponen una inyección de penicilina. Su cuerpo va eliminando gradualmente la penicilina de modo que, una hora después de la inyección, sólo el 60% de la penicilina permanece activa.

Esta pauta continúa: al final de cada hora sólo permanece activo el 60% de la penicilina presente al final de la hora anterior.

Supón que a la mujer se le ha administrado una dosis de 300 miligramos de penicilina a las 8 de la mañana. Completa esta tabla escribiendo el total de penicilina que permanecerá activa en la sangre de la mujer a intervalos de una hora desde las 08:00 hasta las 11:00 horas.

Hora	08:00	09:00	10:00	11:00
Penicilina (mg)	300			

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 10.1

Máxima puntuación
Código 2: Las tres entradas de la tabla son correctas.

Hora	08:00	09:00	10:00	11:00
Penicilina (mg)	300	180	108	64,8 ó 65

Puntuación parcial
Código 1: Una o dos entradas de la tabla son correctas.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Científica

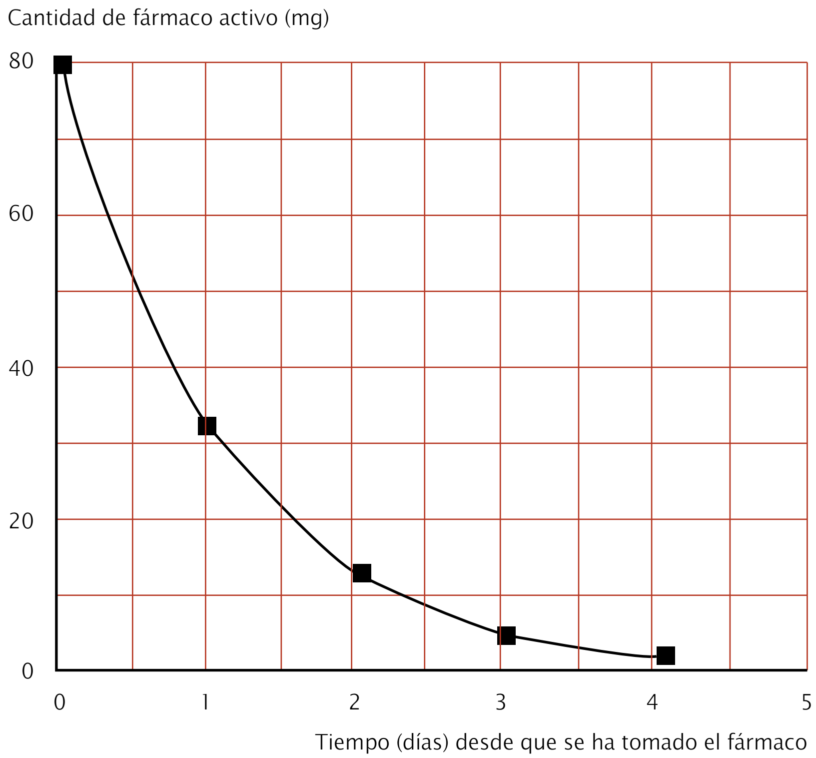
Este primer ejemplo parece poco complicado, pero la reducción exponencial no es un asunto sencillo para muchos estudiantes. 60% del 60% del 60% del... puede parecer una regla sencilla, pero los resultados de preguntas como ésta demuestran que no es el caso. Aunque los porcentajes se tratan ampliamente en la educación primaria, a menudo los estudiantes no están preparados para trabajar con este conocimiento en una situación diferente. Identificar la información matemática pertinente significa comprender la reducción porcentual o exponencial (no necesariamente entender las expresiones, pero sí el concepto), identificar el valor inicial (300) y aplicar repetidamente el proceso.

Resulta interesante observar la gran cantidad de estudiantes (50%) que no consiguieron dar con la respuesta correcta en la prueba piloto. Esto proporciona una indicación importante a la hora de juzgar la calidad y/o la eficacia del proceso de enseñanza/aprendizaje.

Matemáticas, Ejemplo 10.2:

Pedro tiene que tomar 80 mg de un fármaco para controlar su presión sanguínea.

El siguiente gráfico muestra la cantidad inicial del fármaco y la cantidad que permanece activa en la sangre de Pedro después de uno, dos, tres y cuatro días.



¿Cuánta cantidad de fármaco permanece activa al final del primer día?

A 6 mg

B 12 mg

C 26 mg

D 32 mg

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 10.2

Máxima puntuación
Código 1: Respuesta D: 32 mg

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Elección múltiple
Grupo de competencia: Reproducción
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Científica

Este ejemplo es más sencillo que el anterior y únicamente requiere que se lea un gráfico, así que podemos concluir que esta pregunta presupone competencias de *reproducción*. No obstante, la pregunta se presenta en un contexto algo inusual, y, por tanto, requiere un cierto grado de interpretación.

Matemáticas, Ejemplo 10.3:

En el gráfico de la pregunta precedente puede verse que, cada día, permanece activa en la sangre de Pedro aproximadamente la misma proporción de fármaco con relación al día anterior.

Al final de cada día, ¿cuál de las siguientes cifras representa el porcentaje aproximado de fármaco del día anterior que permanece activo?

A 20%.

B 30%.

C 40%.

D 80%.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 10.3

Máxima puntuación
Código 1: Respuesta C: 40%.

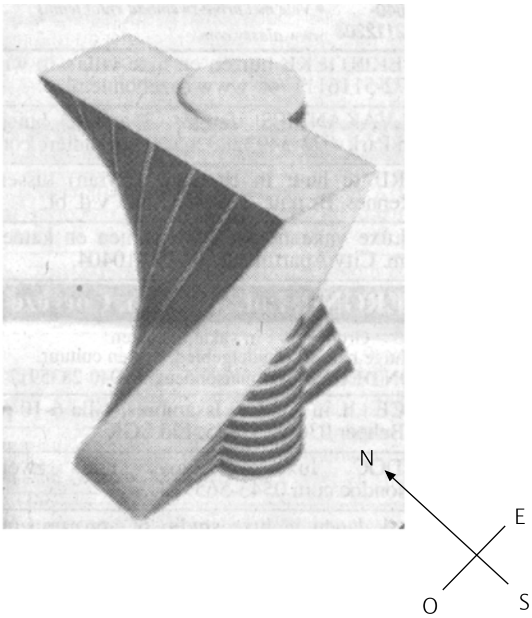
Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

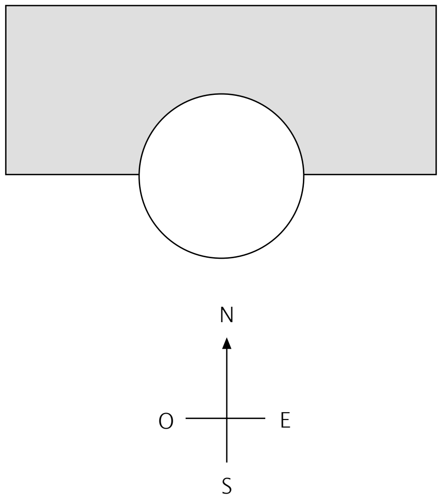
Tipo de pregunta: Elección múltiple
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Científica

El Ejemplo 10.3 remite al gráfico del Ejemplo 10.2. La pregunta en esta situación es: "¿cuál es la tasa de reducción?" Por estar presentada en un formato de elección múltiple esta pregunta permite que los estudiantes realicen una conjetura con cierta base, puesto que conocen el valor inicial, 80, y el valor siguiente, 32 (si han contestado correctamente al Ejemplo 10.2) o uno cercano a 30 (si no utilizan el Ejemplo 10.2 y van directamente al gráfico), y 3/8 es un valor cercano a 40%. Los requisitos de interpretación de esta pregunta la sitúan dentro del grupo de competencia de *conexión.*

Matemáticas, Unidad 11: EL EDIFICIO RETORCIDO

En la arquitectura moderna los edificios a menudo tienen formas inusuales. La imagen siguiente muestra un modelo diseñado por ordenador de un "edificio retorcido" y un plano de la planta baja. Los puntos cardinales muestran la orientación del edificio.





En la planta baja del edificio está la entrada principal y un espacio para tiendas. Por encima de la planta baja hay 20 plantas de viviendas.
El plano de cada planta es similar al de la planta baja, pero la orientación de cada planta es ligeramente distinta a la de la planta inmediatamente inferior. En el cilindro se encuentran el hueco del ascensor y un vestíbulo para cada planta.

Matemáticas, Ejemplo 11.1:

Calcula la altura total del edificio en metros. Explica cómo has hallado la respuesta.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 11.1

Máxima puntuación

Código 2: Se aceptan respuestas entre 50 y 90 metros si se da una explicación correcta. Por ejemplo:
- La altura aproximada de un piso del edificio es 2,5 metros. Hay algo de espacio extra entre pisos. Por tanto, un cálculo aproximado es 21 x 3 = 63 metros.
- Poniendo 4 m para cada planta, 20 de ellas hacen un total de 80 m, más 10 m por la planta baja, se obtiene un total de 90 m.

Puntuación parcial

Código 1: Explicación y método de cálculo correctos, pero se cuentan 20 plantas en lugar de 21. Por ejemplo:
- Cada vivienda podría medir 3,5 metros de alto, 20 plantas de 3,5 metros dan un total de 70 m de alto.

Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas, incluyendo una respuesta sin explicación, respuestas con un número de plantas incorrecto, y respuestas con un cálculo inadmisible sobre la altura de cada planta (4 m sería el límite máximo). Por ejemplo:
- Cada piso mide alrededor de 5 m de alto, así que 5 x 21 es igual a 105 metros
- 60 m.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Espacio y forma
Situación: Pública

Las preguntas de esta unidad requieren imaginación y perspicacia, especialmente en lo que se refiere a la visión espacial, en un contexto público que cuenta con elementos familiares pero que puede ser novedoso para muchos estudiantes. El primer ejemplo pide que los estudiantes realicen algunos juicios razonados sobre la altura adecuada para las plantas de un edificio alto, lo que incluye tanto la altura «visible» de las habitaciones de cada planta como el espacio necesario entre plantas. Los estudiantes deben llevar construir un modelo rudimentario y traducir la representación visual a una numérica. Estas competencias se encuentran asociadas al grupo de *conexión.*

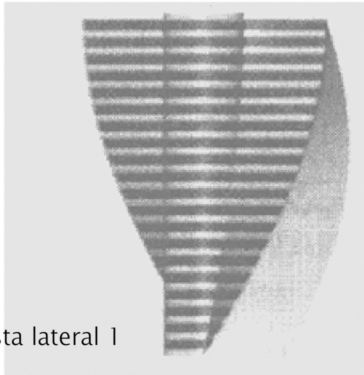
Muchos estudiantes fueron capaces de resolver este problema en la prueba piloto, con un porcentaje ligeramente mayor de chicos. Sin embargo, un número elevado de alumnos dejó la pregunta sin contestar, lo que indica que muchos no quisieron o no fueron capaces de emplear su imaginación de la manera necesaria.

Las imágenes siguientes son vistas laterales del edificio retorcido.

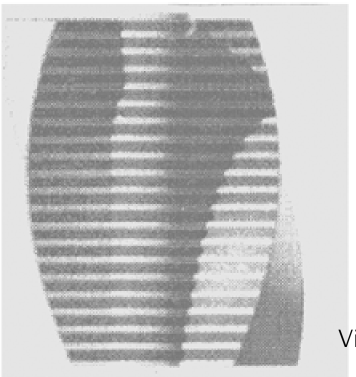
Matemáticas, Ejemplo 11.2:

¿Desde dónde se ha obtenido la vista lateral 1?

A Desde el norte.
B Desde el oeste.
C Desde el este.
D Desde el sur.



Vista lateral 1



Vista lateral 2

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 11.2

Máxima puntuación
Código 1: Respuesta C: Desde el este.
Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Elección múltiple
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Espacio y forma
Situación: Pública

El segundo ejemplo hace que los estudiantes comparen mentalmente diferentes representaciones visuales de un edificio y que seleccionen, de entre las opciones presentadas, la que describe la relación entre dichas representaciones. El razonamiento espacial exigido coloca la pregunta dentro del grupo de *conexión.*

Esta pregunta resultó mucho más fácil que la primera, pero arrojó unas características pobres de medición en varios de los países participantes. Puede que la calidad del gráfico que se utilizó en la prueba piloto no fuera la adecuada para las elevadas exigencias visuales de la pregunta.

Matemáticas, Ejemplo 11.3:

¿Desde dónde se ha obtenido la vista lateral 2?

A Desde el noroeste.
B Desde el nordeste.
C Desde el suroeste.
D Desde el sureste.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 11.3

Máxima puntuación
Código 1: Respuesta D: Desde el sureste.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

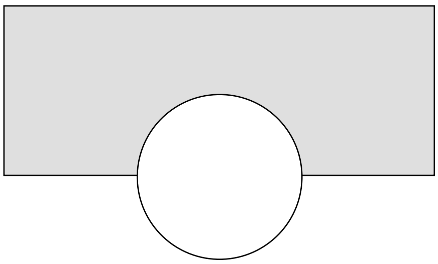
Tipo de pregunta: Elección múltiple
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Espacio y forma
Situación: Pública

El tercer ejemplo es muy parecido al Ejemplo 11.2. Es interesante observar las diferentes indicaciones visuales de las dos vistas laterales de los estímulos de los Ejemplo 11.2 y 11.3. El Ejemplo 11.3 resultó algo más difícil que el Ejemplo 11.2, posiblemente a causa de las sutilezas en las sombras de la imagen y a los requisitos de interpretación que conllevan.

Matemáticas, Ejemplo 11.4:

Cada planta de viviendas tiene cierta "torsión" con respecto a la planta baja. La última planta (la 20ª por encima de la planta baja) forma un ángulo recto con la planta baja.

La figura de abajo representa la planta baja.

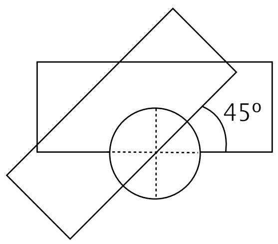


Dibuja en este mismo gráfico el plano de la 10ª planta, mostrando cómo queda situada con respecto a la planta baja.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 11.4

Máxima puntuación

Código 2: Un dibujo correcto, es decir, que el centro de rotación sea el correcto y el sentido de la rotación sea el contrario al de las agujas del reloj. Se aceptan ángulos de 40º a 50º.



Puntuación parcial

Código 1: Una de las tres cosas siguientes es incorrecta: el ángulo de rotación, el centro de rotación o el sentido de la rotación.

Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Espacio y forma
Situación: Pública

El cuarto ejemplo exige a los estudiantes imaginar el efecto acumulativo del fenómeno de torsión a lo largo de un cierto número de etapas y elaborar una representación gráfica de la 10ª planta. Nuevamente, el razonamiento espacial exigido coloca la pregunta dentro del grupo de *conexión.*

La pregunta es relativamente difícil y un número elevado de alumnos la dejaron sin contestar en la prueba piloto. Parece que para los alumnos de 15 años este tipo de construcción geométrica representa un reto.

Matemáticas, Unidad 12: EL CONCIERTO DE ROCK

Matemáticas, Ejemplo 12.1:

En un concierto de rock se reservó para el público un terreno rectangular con unas dimensiones de 100 m por 50 m. Se vendieron todas las entradas y el terreno se llenó de fans, todos de pie.

¿Cuál de las siguientes cifras constituye la mejor estimación del número total de asistentes al concierto?

A 2.000
B 5.000
C 20.000
D 50.000
E 100.000

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 12.1

Máxima puntuación
Código 1: Respuesta C: 20.000.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Elección múltiple
Grupo de competencia: Conexión
Idea principal: Cantidad
Situación: Pública

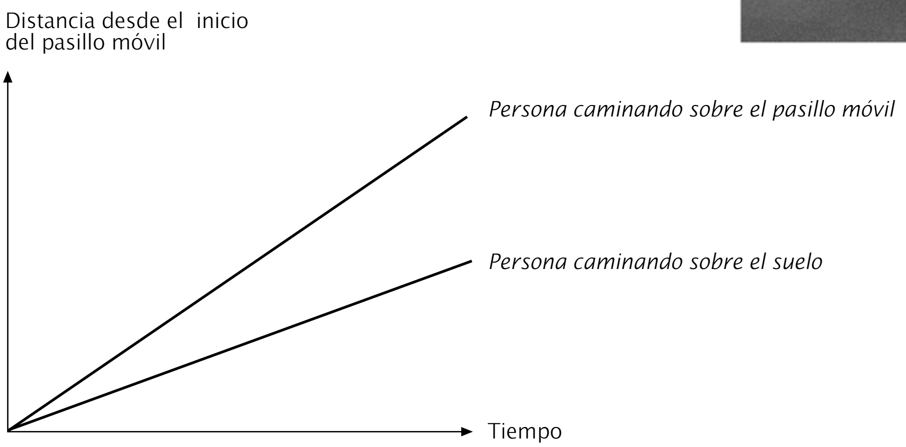
El marco conceptual de matemáticas destaca la importancia de las destrezas de estimación como parte del equipaje cuantitativo de un ciudadano competente en matemáticas. Esta pregunta se ubica en un contexto que debería resultar bastante familiar a muchos de los alumnos de 15 años. No obstante, después de interpretar un poco, los estudiantes tienen que desempeñar un papel activo para realizar suposi-ciones sobre cuánto espacio (por término medio) ocuparía una multitud de gente de pie. Este modo de formular el problema y el razonamiento matemático que conlleva coloca la pregunta dentro del grupo de *conexión.*

Se ofrecen cinco opciones de respuesta, de manera que los estudiantes sólo tienen que elegir la mejor opción. La Opción A (2.000) implica que cada persona ocuparía una media de 2,5 metros cuadrados, lo que conllevaría una asistencia muy escasa. La Opción E (100.000) implica que la media sería de 20 personas por metro cuadrado, algo difícilmente posible y, desde luego, nada realista. Ello deja a los estu-diantes tres densidades intermedias: 1 persona, 4 personas o 10 personas por metro cuadrado. ¿Cuál es la opción más realista en las condiciones descritas (todas las entradas vendidas y el terreno lleno con todos los fans de pie)? Alrededor del 30% de los alumnos escogieron la opción media más razonable, la opción C (20.000) en la prueba piloto.

Matemáticas, Ejemplo 13.1:

A la derecha hay una fotografía de pasillos móviles.

El siguiente gráfico distancia-tiempo permite comparar entre “caminar sobre el pasillo móvil” y “caminar sobre el suelo junto al pasillo móvil”.

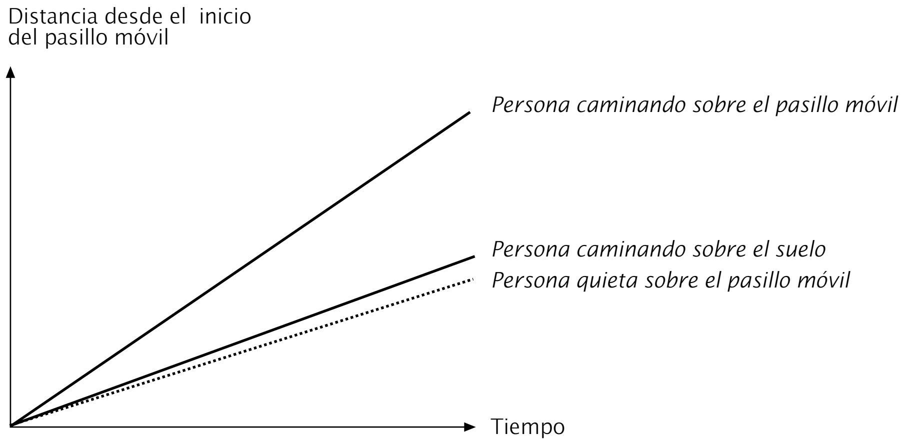


Suponiendo que, en el gráfico anterior, el ritmo del paso es aproximadamente el mismo para las dos personas, añade una línea al gráfico que represente la distancia con relación al tiempo para una persona que está quieta sobre el pasillo móvil.

Criterios de corrección y comentarios sobre el ejemplo 13.1

Máxima puntuación

Código 1: Se acepta una línea por debajo de las dos líneas, pero debe estar más cerca de la línea de *Persona caminando* sobre el suelo que del eje horizontal.



Ninguna puntuación

Código 0: Otras respuestas.

Tipo de pregunta: Pregunta de respuesta abierta
Grupo de competencia: Reflexión
Idea principal: Cambio y relaciones
Situación: Científica

El enunciado de esta pregunta presenta un objeto común en algunos lugares públicos y también recuerda a otros fenómenos similares con los que pueden estar más familiarizados los estudiantes de 15 años (como caminar al lado de unas escaleras mecánicas o bajar corriendo las escaleras al lado del ascensor). Sin embargo, la naturaleza de la pregunta la ubica en una situación *científica.*

Los estudiantes tienen que ocuparse de la representación matemática de la situación mostrada y deben emplear una cantidad considerable de imaginación y perspicacia para entender la representación. Por tanto, para resolver el problema y elaborar la respuesta apropiada es necesario un razonamiento matemático bastante sofisticado. Estas competencias son típicas del grupo de *conexión.*

En la prueba piloto esta pregunta resultó ser muy difícil; el índice de aciertos fue de un 15%.

Elaboración de las ideas principales

CANTIDAD

Descripción

Para organizar el mundo en que vivimos es necesario imperativamente cuantificarlo: necesitamos expresar qué es “grande” o “pequeño”, “alto” o “bajo”, “poco” o “mucho”, “más” o “menos”. Identificamos los modelos del mundo que nos rodea cuantificándolos: llamamos *decena* al conjunto de diez manzanas, de diez personas, diez coches o cualquier conjunto de diez elementos cualesquiera. Los números cardinales son una manera de aprehender y describir este tipo de modelos. Los números cardinales constituyen el punto de inicio de las actividades de cálculo y un origen para la búsqueda de modelos más profundos, como el de pares e impares.

Pero los números cardinales pueden no ser el primer encuentro fenomenológico para los niños pequeños. Los niños son capaces de reconocer los conceptos *pequeño* y *grande* de un modo cualitativo sin recurrir a los números, sino relacionándolos con objetos de diferentes tamaños (galleta pequeña frente a galleta grande) y a conjuntos de objetos (tres objetos frente a siete objetos).

Si se mide una magnitud, se observa una utilización de los números distinta, mucho más importante en la vida diaria. La longitud, el área, el volumen, la altura, la velocidad, la masa, la presión del aire, el valor monetario, todo ello se cuantifica mediante mediciones.

Un aspecto importante al tratar con cantidades es el razonamiento cuantitativo. Éste comporta:

- sentido numérico;
- comprensión del significado de las operaciones;
- sentido de la magnitud de los números;
- cálculos elegantes;
- cálculo mental;
- estimaciones.

El “significado de las operaciones” incluye la capacidad de realizar operaciones que implican comparaciones, proporciones y porcentajes. El “sentido numérico” se ocupa del tamaño relativo, de las diferentes representaciones de los números, de las formas numéricas equivalentes y del hecho de poder utilizar la comprensión de todo esto para describir las características del mundo.

La idea principal de *cantidad* incluye también tener un sentido para las cantidades y las estimaciones. Para poder evaluar lo razonables que son los resultados numéricos se necesita un conocimiento amplio de las cantidades (o medidas) del mundo real. ¿La velocidad media de un coche es de 5, de 50 ó de 500 km/h? ¿La población del mundo es de 6 millones, 600 millones, 6.000 millones ó 60.000 millones? ¿Cuánto puede tener una torre de altura? ¿Cuánta puede ser la anchura de un río? La capacidad para estimar rápidamente el orden de magnitud es de especial importancia, especialmente a la vista de la creciente utilización de las herramientas de cálculo electrónicas. Hay que ser capaz de estimar que 33 x 613 arrojará un resultado cercano a 20.000. Para lograr esta destreza no se necesita una ejercitación intensiva en la ejecución mental de los algoritmos que tradicionalmente se calculan por escrito, sino un empleo flexible y rápido de la comprensión del valor posicional y de la aritmética de una sola cifra (Fey, 1990).

Utilizando el sentido numérico de un modo apropiado los estudiantes pueden resolver problemas que exijan un razonamiento directo, inverso y proporcional. También pueden estimar índices de variación, ofrecer criterios para seleccionar los datos pertinentes o el nivel de precisión necesario para las operaciones y modelos que utilizan. Pueden examinar algoritmos alternativos y mostrar por qué funcionan correctamente o en qué casos fallarán. Pueden desarrollar modelos que comporten operaciones y relaciones entre operaciones para aquellos problemas que utilizan datos del mundo real, así como establecer relaciones numéricas que exigen operaciones y comparaciones (Dossey, 1997).

En la idea principal de *cantidad* hay un lugar para el razonamiento cuantitativo «elegante», como el de Gauss que aparece en el ejemplo siguiente. La creatividad asociada a la comprensión conceptual debe ser objeto de valoración en el nivel educativo destinado a los alumnos de 15 años.

Ejemplos

Gauss

Un profesor de Karl Friedrich Gauss (1777-1855) pidió a sus alumnos que sumaran todos los números del 1 al 100. Probablemente lo que pretendía con ello era tener a los alumnos ocupados durante un rato. Pero Gauss, que poseía un razonamiento cuantitativo excelente, descubrió un atajo. Su razonamiento fue el siguiente:

Se escribe la suma dos veces, una en orden ascendente y otra en orden descendente, del siguiente modo:
1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100
100 + 99 + 98 +...........+ 3 + 2 + 1

Ahora se suman las dos sumas, columna por columna, lo que da:
101 + 101 +.................+ 101 + 101

Como hay exactamente 100 copias del número 101 en esta suma, su valor es:
100 x 101 = 10 100

Dado que este producto es igual al doble de la suma original, si se divide por dos se obtiene la solución: 5 050

Números triangulares

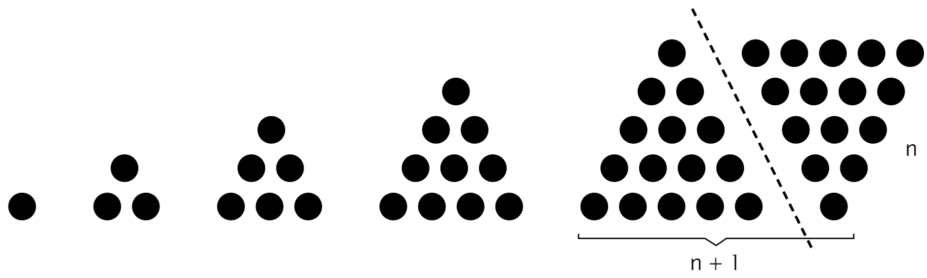
Podemos extender un poco más este ejemplo de pensamiento cuantitativo que implica regularidades numéricas para mostrar una representación gráfica de esta regularidad. Utilizaremos la fórmula que presenta el planteamiento general del problema de Gauss.

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$

Esta fórmula describe también un modelo geométrico conocido: los números que responden a la fórmula n(n+1)/2 se denominan números triangulares, puesto que son exactamente los números que se obtienen al colocar bolas en un triángulo equilátero.

Los cinco primeros números triangulares, 1, 3, 6, 10, 15, se muestran en la Figura 1:

Figura 1. *Los cinco primeros números triangulares*



Razonamiento proporcional

Sería interesante observar cómo los estudiantes de los diferentes países resuelven problemas que se prestan a la utilización de estrategias diversas. Las diferencias serían de esperar especialmente en el área del razonamiento proporcional. En algunos países se acostumbra a utilizar fundamentalmente una estrategia por pregunta, mientras que en otros se utiliza más de una estrategia. También aparecerán similitudes de razonamiento al resolver problemas que no parecen similares. Esto concuerda con los resultados de la investigación reciente de los datos TIMSS (Mitchell, J. et al., 2000). Las tres preguntas siguientes ejemplifican las diferentes estrategias y las relaciones entre ellas:

1 *Esta noche vas a dar una fiesta Quieres comprar 100 latas de refrescos ¿Cuántos paquetes de seis lastas tendrás que comprar?*

2 *Un ala delta con un índice de descenso en planeo de 1 m por cada 22 m recorridos empieza el vuelo desde un precipicio escarpado de 120 metros El piloto quiere llegar hasta un punto que se encuentra a 1 400 metros de distancia ¿Conseguirá llegar a ese lugar (en ausencia de viento)?*

3 *Un centro escolar quiere alquilar mini-buses (con asientos para ocho personas) para llevar a 98 alumnos estudiantes a un campamento escolar ¿Cuántos mini-buses necesita?*

El primer problema puede considerarse un problema de división ( ) que a continuación presenta al estudiante el problema de interpretar de nuevo el contexto (¿cuál es el significado del resto de la divi-sión?). El segundo problema puede resolverse mediante un razonamiento proporcional (por cada metro de altura se puede volar una distancia de 22 metros, así que, partiendo de 120 metros...). El tercer problema puede resolverse también mediante una división. No obstante, los tres problemas pueden resolverse también mediante el método de la tabla de proporciones:

Latas:	1	10	5	15	2	17
	6	60	30	90	12	102
Volar:	1	100	20	120		
	22	2200	440	2640		
Vehículos:	1	10	2	13		
	8	80	16	104		

Dar con esta similitud constituye una destreza propia de la competencia matemática: los estudiantes con competencia matemática no necesitan buscar la herramienta apropiada o el algoritmo adecuado, sino que disponen de una amplia gama de estrategias para elegir.

Porcentajes

Carlos fue a una tienda a comprar una chaqueta que valía 50 zeds y que ahora está de oferta con un 20% de descuento. En Zedlandia hay un impuesto sobre las ventas del 5%. El vendedor añadió primero el 5% del impuesto al precio de la chaqueta y luego restó el 20%. Carlos se quejó: quería que el vendedor dedujera primero el 20% y que añadiera luego el 5% de impuesto.

¿Supone esto alguna diferencia?

Los problemas que presentan este tipo de razonamiento cuantitativo y que necesitan realizar cálculos mentales se presentan con mucha frecuencia cuando vamos de compras. La capacidad para afrontar eficazmente estos problemas es fundamental para la competencia matemática.

ESPACIO Y FORMA

Descripción

La forma constituye un objeto matemático vital, evolutivo y fascinante que está estrechamente relacionado con la geometría, pero que la supera en contenido, significado y método. La interacción con formas reales implica comprender el mundo visual que nos rodea y su descripción, y saber codificar y descodificar informaciones visuales. También significa interpretar la información visual. Para captar el concepto de forma, los estudiantes deben ser capaces de descubrir el modo en que los objetos se parecen y diferencian entre sí, de analizar los diferentes componentes del objeto y de reconocer formas en representaciones y dimensiones distintas.

Es importante no limitarse a las formas como entidades estáticas. Una forma puede modificarse como cualquier otra una entidad. Estos cambios pueden visualizarse muy bien a través de los ordenadores. Los estudiantes deberían ser capaces de identificar pautas y regularidades cuando las formas cambian. Un ejemplo de ello se presenta en la Figura 1.6 de la siguiente sección.

Otro aspecto dinámico importante del estudio de las formas es su posición relativa respecto a las demás, dependiendo de la posición del observador. Para conseguir esto no sólo debemos comprender la posición relativa de los objetos, sino también considerar cuestiones acerca de cómo y por qué vemos las cosas del modo en que lo hacemos, etc. La relación entre las formas o imágenes y sus representaciones en dos o tres dimensiones desempeña aquí un papel fundamental.

Hay abundantes ejemplos que precisan este tipo de razonamiento. Identificar y relacionar una fotografía de una ciudad con el mapa de esa ciudad e indicar desde qué punto se tomó la fotografía, ser capaz de dibujar un mapa, entender por qué un edificio cercano parece más grande que otro más alejado, comprender por qué las vías del tren parecen juntarse en el horizonte, todas estas cuestiones pertenecen a la idea principal de espacio y forma.

Dado que los estudiantes viven en un espacio tridimensional, deberían estar familiarizados con la visión de los objetos desde tres vistas ortogonales (por ejemplo, de frente, de lado y por encima). Deben ser conscientes del alcance y las limitaciones de las diferentes representaciones de las formas tridimensionales tal y como se observa en el ejemplo de la Figura 1.7. No sólo tienen que comprender la posición relativa de los objetos, sino también cómo pueden moverse a través del espacio y de las construcciones o formas. Un ejemplo podría ser leer e interpretar un mapa y elaborar las indicaciones de cómo ir del punto A al punto B utilizando coordenadas, el lenguaje común o un dibujo.

La comprensión conceptual de las formas también conlleva la habilidad de tomar un objeto tridimensional y plasmarlo en un plano bidimensional y viceversa, incluso cuando el objeto tridimensional se presenta en dos dimensiones. Un ejemplo de ello se presenta en la Figura 1.8.

Para resumir, a continuación se presenta una lista de aspectos clave de la idea principal espacio y forma:

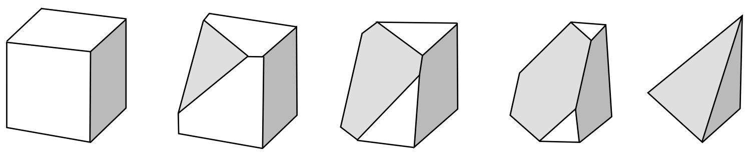
- reconocer formas y modelos;
- describir, codificar y descodificar la información visual;
- comprender los cambios dinámicos de las formas;
- similitudes y diferencias;
- posiciones relativas;
- representaciones bidimensionales y tridimensionales y relaciones ente ambas;
- orientación en el espacio.

Ejemplos

La figura 1.6 muestra un ejemplo simple de la necesidad de ser flexible a la hora de ver cómo cambian las formas. Se trata de un cubo que se va seccionando (es decir, sobre el que se realizan cortes planos). Pueden plantearse preguntas como:

¿Qué formas pueden crearse mediante un corte plano en un cubo?
¿Cuántas caras, bordes o vértices se crearán cuando se seccione un cubo de esta manera?

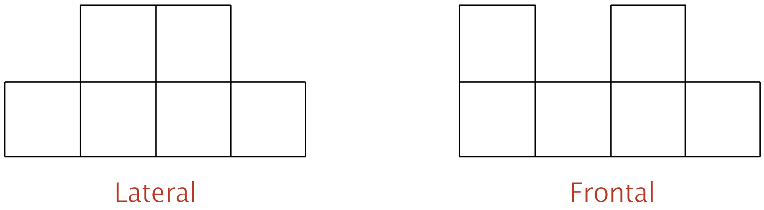
Figura 1.6 *Un cubo con cortes planos en varios lugares*



A continuación se presentan tres ejemplos de la necesidad de estar familiarizados con representaciones de formas tridimensionales. En este primer ejemplo, se dan en la Figura 1.7 las vistas lateral y frontal de un objeto elaborado con cubos. La pregunta es:

¿Cuántos cubos se han utilizado para crear este objeto?

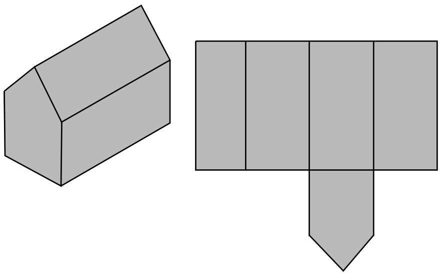
Figura 1.7 *Vistas lateral y frontal de un objeto elaborado con cubos*



Puede resultar una sorpresa para muchos (tanto alumnos como profesores) que el número máximo de cubos sea 20 y el mínimo sea 6 (De Lange, 1995).

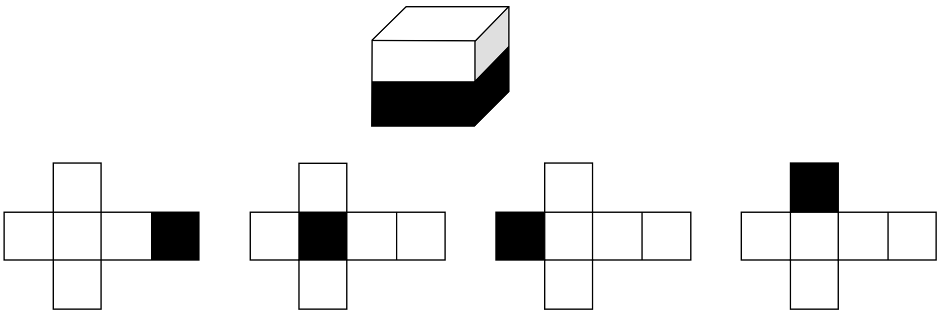
El siguiente ejemplo muestra una representación bidimensional de un granero y un desarrollo incompleto del granero. El problema consiste en completar el plano del granero.

Figura 1.8 *Representación bidimensional de un granero tridimensional y su desarrollo (incompleto)*



Un ejemplo final parecido al anterior es el de la Figura 1.9 (adaptada de Hershkovitz et al., 1996).

Figura 1.9 *Cubo de base negra*



La mitad inferior del cubo se ha pintado de negro. Cada uno de los cuatro desarrollos ya tiene la base negra. Se puede pedir a los estudiantes que acaben cada desarrollo sombreando los cuadrados pertinentes.

CAMBIO Y RELACIONES

Descripción

Para sensibilizarnos con las regularidades en ámbito del cambio, Stewart (1990) afirma que hay que:

- representar los cambios de una forma comprensible;
- comprender los tipos de cambio fundamentales;
- reconocer los diferentes tipos de cambio cuando se producen;
- aplicar estas técnicas al mundo exterior;
- controlar un universo cambiante para nuestro beneficio.

El cambio y las relaciones pueden representarse visualmente de diferentes maneras: numéricamente (en una tabla, por ejemplo), simbólicamente o gráficamente. Pasar de una a otra de estas representaciones tiene una importancia clave, así como reconocer y comprender las relaciones y los tipos de cambio fundamentales. Los alumnos deben ser conscientes de los conceptos de crecimiento lineal (proceso aditivo), crecimiento exponencial (proceso multiplicativo) y crecimiento periódico así como del crecimiento logístico, al menos de manera informal como un caso especial de crecimiento exponencial.

Los estudiantes deben poder también reconocer las relaciones entre estos modelos: las diferencias clave en-tre los procesos lineales y exponenciales, el hecho de que el crecimiento porcentual es idéntico al crecimiento exponencial, cómo y por qué se produce el crecimiento logístico tanto en situaciones continuas como discretas.

Los cambios se producen en un sistema de objetos o fenómenos interrelacionados en el que los elementos se influyen entre sí. En los ejemplos que se mencionan en el resumen, todos los fenómenos cambiaron a lo largo del tiempo. Pero hay muchos ejemplos en la vida real de asuntos en los que los objetos están interrelacionados entre sí de numerosas maneras. Por ejemplo:

Si se divide en dos la longitud de la cuerda de una guitarra, el tono nuevo que se consigue es una octava mayor que el tono original. Por tanto, el tono depende de la longitud de la cuerda.

Cuando ingresamos dinero en una cuenta bancaria sabemos que el saldo dependerá de la magnitud, la frecuencia y el número de ingresos y extracciones de dinero y de los tipos de interés.

Las relaciones conducen a la noción de dependencia. La dependencia tiene que ver con el hecho de que las propiedades y los cambios de algunos objetos matemáticos dependen de, o influyen en, las propiedades y los cambios de otros. A menudo, las relaciones matemáticas toman la forma de ecuaciones o desigualdades, pero también pueden aparecer relaciones de naturaleza más general.

La idea principal de *cambio y relaciones* hace uso del razonamiento funcional. Para los alumnos de 15 años esto conlleva tener una noción de tasa de cambio, de gradiente y de pendiente (aunque no necesariamente de manera formal) y de la dependencia de las variables entre sí. Deben poder realizar juicios sobre la velocidad a la que se producen los procesos, y también en términos relativos.

Esta idea principal está estrechamente relacionada con aspectos asociados a otras ideas principales. Un estudio de las regularidades en el ámbito de los números puede conducir al descubrimiento de relaciones sorprendentes: por ejemplo, el estudio de la sucesión de Fibonacci o del número áureo. El número áureo es un concepto que también desempeña un importante papel en geometría. En el ámbito de espacio y forma pueden hallarse muchos otros ejemplos de cambio y relaciones: por ejemplo, el crecimiento de un área en relación al crecimiento del perímetro o del diámetro. La geometría euclidiana también se presta al estudio de las relaciones. Un ejemplo conocido es la relación entre los tres lados de un triángulo. Si se conoce la longitud de dos lados, el tercero no está determinado, pero se conoce el intervalo en el que se encuentra: los extremos del intervalo son el valor absoluto de la diferencia entre los otros dos lados y de su suma, respectivamente. Entre los diversos elementos del triángulo se dan muchas otras relaciones similares.

El ámbito de la incertidumbre se presta a varios problemas que pueden observarse desde la perspectiva de la idea principal de cambio y relaciones. Si se lanzan dos dados y uno saca cuatro, ¿cuál es la posibilidad de que la suma de los dos sea más de siete? La respuesta (50%) depende de la proporción de resultados potencialmente favorables en relación al conjunto de resultados posibles, por lo que se trata de una dependencia funcional.

Ejemplos

Excursión escolar

Una centro escolar quiere alquilar un autocar para ir de excursión y se ponen en contacto con tres empresas para informarse sobre los precios.

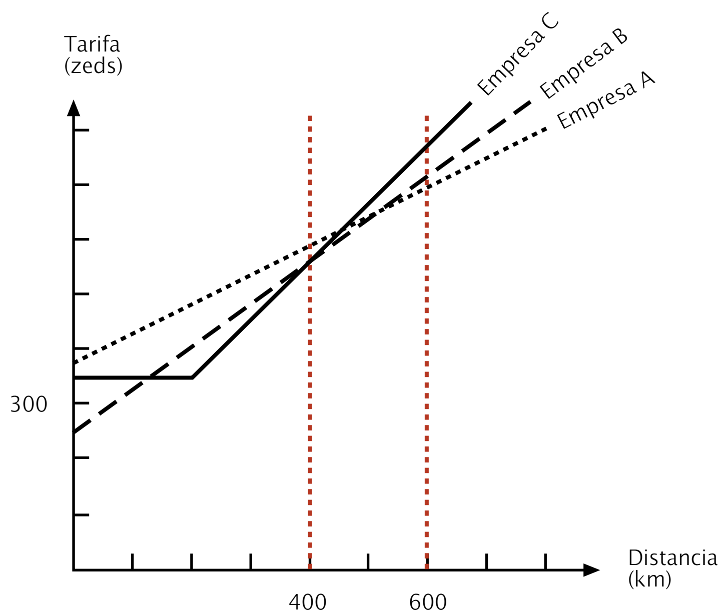
La Empresa A cobra una tasa inicial de 375 zeds y 0,5 zeds por kilómetro recorrido. La Empresa B cobra una tasa inicial de 250 zeds y 0,75 zeds por kilómetro recorrido. La Empresa C cobra una tasa fija de 350 zeds hasta 200 kilómetros y 1,02 zeds por kilómetro posterior a estos 200 km.

¿Qué empresa deberá elegir el centro si para ir de excursión tienen que recorrer una distancia total de entre 400 y 600 km?

Aunque este contexto tiene elementos ficticios, este problema podría presentarse. Para resolverlo es preciso formular y aplicar diversas relaciones funcionales así como ecuaciones e inecuaciones. También puede resolverse a través de medios gráficos o algebraicos o de una combinación de ambos. La cuestión de que la distancia total de la excursión no está indicada con exactitud también introduce asociaciones con la idea principal de incertidumbre.

En la Figura 1.10. se muestra una representación gráfica del problema.

Figura 1.10 *Tarifas de tres empresas de autocares para la excursión*



Crecimiento celular

Unos médicos están controlando la proliferación de células. Se interesan especialmente por el día en que el recuento alcance 60.000, porque es entonces cuando tienen que empezar un experimento. La tabla de resultados es la siguiente:

Tiempo (días)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Células	597	893	1.339	1.995	2.976	2.976	14.719	21.956	32.763

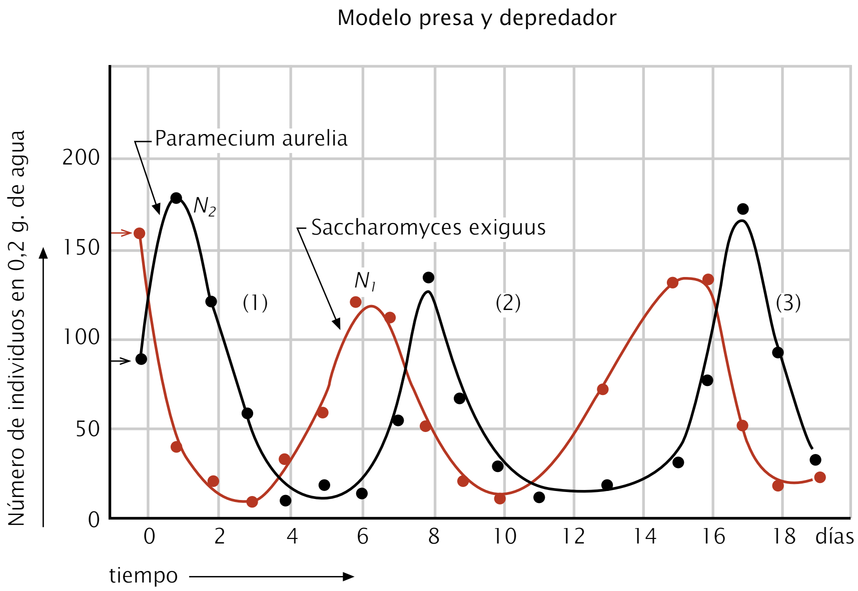
¿Cuándo llegará a 60.000 el número de células?

Presa y depredador

El gráfico siguiente muestra el crecimiento de dos organismos vivos: el paramecium y el saccharomyces:

Paramecium

Saccharomyces



Uno de los dos seres (el depredador) se come al otro (la presa). A partir del gráfico, ¿puedes identificar quién es la presa y quién el depredador?

Una característica del fenómeno presa-depredador se define así: la tasa de crecimiento es proporcional a la cantidad de presa disponible. ¿Se aplica esta propiedad en el gráfico anterior?

INCERTIDUMBRE

Descripción

La ciencia y la tecnología raramente tratan con hechos probados. Las ciencias se ocupan de intentar averiguar cómo funciona el mundo y el grado en que consiguen averiguarlo, del mismo modo que lo hace nuestra capacidad para describir con seguridad lo que ha ocurrido en el pasado y para predecir con precisión lo que es probable que suceda en el futuro. Sin embargo, el conocimiento científico rara vez es absoluto, eso sin contar las veces que se equivoca, de modo que siempre resta algo de incertidumbre incluso en las predicciones más científicas.

Las recomendaciones sobre el lugar que deben ocupar los datos, la estadística y la probabilidad en el currículum escolar hacen hincapié en el análisis de los datos. Como resultado de ello resulta fácil ver la estadística, en particular, como un conjunto de destrezas específicas. David S. Moore ha mostrado de qué trata realmente la idea de *incertidumbre*. La definición del proyecto OCDE/PISA se ajusta a sus ideas, aparecidas en *On the Shoulders of Giants* (Steen, 1990), y a las ideas de F. James Rutherford aparecidas en *Why Numbers Count* (Steen, 1997).

La capacidad para tratar de manera inteligente la variación y la incertidumbre es el objetivo de la formación sobre datos y azar. La variación es un concepto con el cual es difícil tratar: los niños que comienzan su aprendizaje la ortografía y la multiplicación piensan que el mundo es determinista; aprenden rápidamente a esperar que va a haber una respuesta correcta y que todas las demás son incorrectas, al menos cuando las respuestas tienen forma numérica. La variación es algo inesperado e incómodo.

La estadística aporta a la formación matemática algo importante y único: el razonamiento a partir de datos empíricos inciertos. Este tipo de pensamiento estadístico debería ser parte del equipamiento mental de todo ciudadano inteligente. Los elementos centrales son:

- la omnipresencia de la variación en los procesos;
- la necesidad de datos sobre procesos;
- el diseño de la elaboración de datos teniendo en cuenta la variación;
- la cuantificación de la variación;
- la explicación de la variación.

Los datos no son números únicamente, sino números en un contexto. De este modo, los datos movilizan nuestro conocimiento de su contexto para que podamos entenderlos e interpretarlos, en lugar de limitarnos a realizar meras operaciones aritméticas. La estadística no se enseña en los primeros cursos porque sí, sino porque es una manera efectiva de desarrollar el razonamiento y el entendimiento cuantitativos y de aplicar la aritmética y los gráficos a la solución de problemas.

La recogida de datos sobre asuntos importantes no es una tarea sencilla. En el estudio OCDE/PISA los datos deben ser interesantes, relevantes y prácticos y tener un significado para los estudiantes.

Los datos se obtienen a través de la medición de ciertas características, lo que significa que se representarán mediante un número. Reflexionar sobre las mediciones conduce a una comprensión madura de por qué algunos números resultan informativos y otros irrelevantes o absurdos. En primer lugar hay que definir qué se considera un modo válido de medición? Las longitudes son razonablemente sencillas: una regla servirá en muchos casos con un nivel de exactitud suficiente. Pero para las áreas puede plantearse un problema, puesto que incluso en las mediciones físicas entra en juego la incertidumbre. No sólo es importante el instrumento, sino también el grado de exactitud necesario y la variabilidad de las mediciones.

El diseño de los estudios de muestreo constituye un tema central de la estadística. El análisis de los datos se centra en la comprensión de los datos específicos disponibles asumiendo que éstos representan a una población más amplia. El concepto de muestras aleatorias simples es esencial para que los alumnos de 15 años entiendas las cuestiones relacionadas con la incertidumbre.

Un ejemplo conocido es el siguiente:

En 1975, Ann Landers, una famosa columnista, preguntó a sus lectores;

"Si tuviera que pasar por ello otra vez, ¿tendría usted hijos?"

10.000 personas contestaron, de las cuales el 70% dijo NO.

Se sabe que en las encuestas que son voluntarias, la mayoría de las respuestas proceden de la gente que tiene fuertes sentimientos (negativos) al respecto. Una muestra nacional aleatoria sobre la misma pregunta mostró que un 90% de los padres volverían a tener hijos.

La esencia del análisis de datos es dejar que los datos «hablen por sí mismos»; buscar las regularidades sin pensar primero si los datos son representativos de un universo más amplio.

Los fenómenos tienen resultados particulares inciertos y, a menudo, la pauta de los resultados repetidos es aleatoria. Se ha demostrado que nuestra intuición del cambio contradice profundamente las leyes de la probabilidad (Garfield y Ahlgren, 1988; Tversky y Kahneman, 1974). Esto se debe en parte al contacto limitado que tienen los estudiantes con el azar. El estudio de los datos ofrece un escenario natural para obtener este tipo de experiencia. Esto explica por qué la prioridad del análisis de datos debería ser un principio importante para el aprendizaje y la enseñanza de la incertidumbre, por delante de la probabilidad y la deducción. Incluso en la universidad, muchos estudiantes no son capaces de entender la probabilidad y la deducción debido a ideas falsas preconcebidas que no se han subsanado mediante el estudio de las reglas formales. El concepto de probabilidad del presente estudio OCDE/PISA se basa generalmente en situaciones relativas a objetos relacionados con el azar, como monedas o dados, o en situaciones no demasiado complejas del mundo real que puedan analizarse de manera intuitiva o que puedan modelarse fácilmente con estos objetos.

La incertidumbre aparece también de fuentes como el cambio natural de la estatura de los estudiantes, la puntuación de lectura, los ingresos de un grupo de personas, etc. Un paso muy importante, incluso para los jóvenes de 15 años, es pasar a considerar el estudio de los datos y del azar como un todo coherente. Este principio comporta el avance de las ideas desde el simple análisis de datos a la recogida planificada de los datos, hasta llegar a la probabilidad y la inferencia.

Las actividades y conceptos matemáticos específicos que son importantes de esta área son los siguientes:

- Producción de datos: ¿Cuáles son los medios válidos para medir determinadas características? ¿Son los datos válidos para la utilización prevista? La actitud crítica desempeña un papel muy importante aquí al igual que el diseño del estudio estadístico.
- Análisis de datos y presentación/visualización de datos, representaciones gráficas de datos, descripciones numéricas como media y mediana.
- Probabilidad.
- La inferencia, que desempeña un papel menor para los estudiantes de este estudio porque el tratamiento formal y los métodos específicos se reservan normalmente para la educación secundaria más avanzada.

Ejemplos

Los siguientes ejemplos ilustran la idea principal de incertidumbre.

Edad media

Si el 40% de la población de un país tiene al menos 60 años, ¿es posible que la media de edad sea de 30 años?

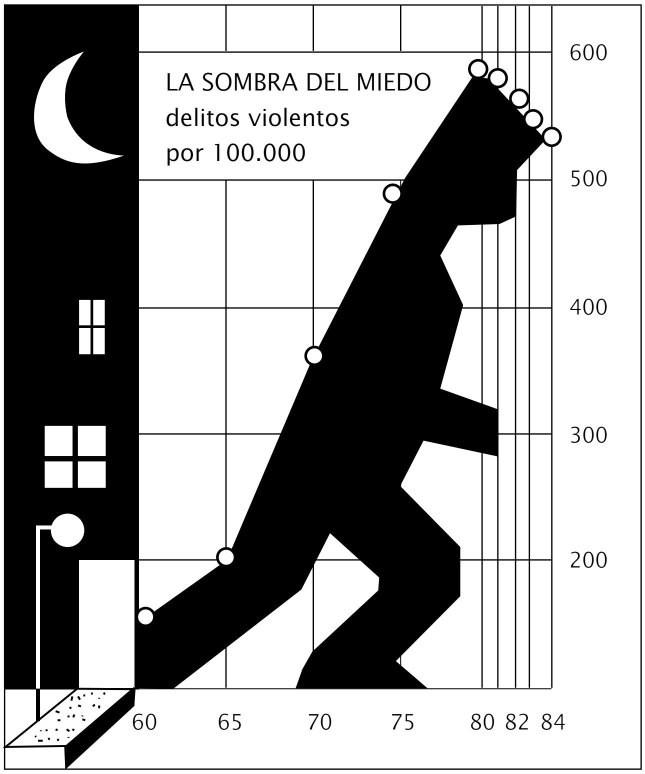
¿Aumentan los ingresos?

¿Han subido o bajado los ingresos de los habitantes de Zedlandia en las últimas décadas? La media de ingresos por hogar ha descendido: en 1970 fue 34.200 zeds, en 1980 fue de 30.500 zeds y en 1990, de 31.200 zeds. Sin embargo, los ingresos por persona aumentaron: en 1970 fueron de 13.500 zeds, en 1980 fueron de 13.850 zeds y en 1990, de 15.777 zeds.

Una hogar consiste en todas las personas que viven juntas en una misma vivienda. Explica cómo es posible que los ingresos por hogar desciendan y que, al mismo tiempo, los ingresos por persona hayan crecido en Zedlandia.

Aumento de la criminalidad

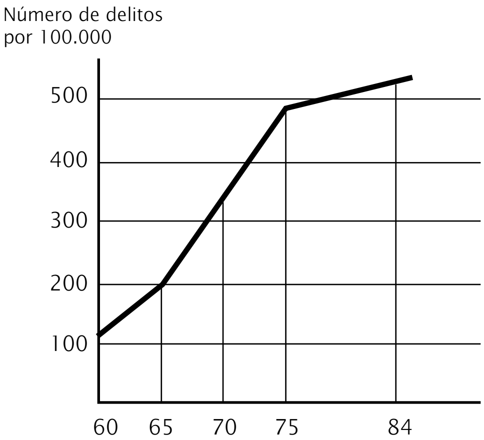
El siguiente gráfico se ha extraído de la revista semanal de Zedlandia *Las Noticias*:



Muestra el número de delitos registrados por cada 100.000 habitantes comenzando por intervalos de cinco años y cambiando luego a intervalos de un año.

¿Cuántos delitos registrados por cada 100.000 habitantes hubo en 1960?

Los fabricantes de sistemas de seguridad utilizaron estos mismos datos para elaborar el siguiente gráfico:



¡El delito se triplica!
DETENGA
su crecimiento

•COMPRE SISTEMAS DE ALARMA•

¿Cómo llegaron los diseñadores a elaborar este gráfico y por qué?

A la policía no le gustó el gráfico de los fabricantes de sistemas de seguridad porque la policía quería demostrar el éxito que había tenido en su lucha contra la delincuencia.

Diseña un gráfico que pueda usar la policía para demostrar que la delincuencia se ha reducido en los últimos tiempos.