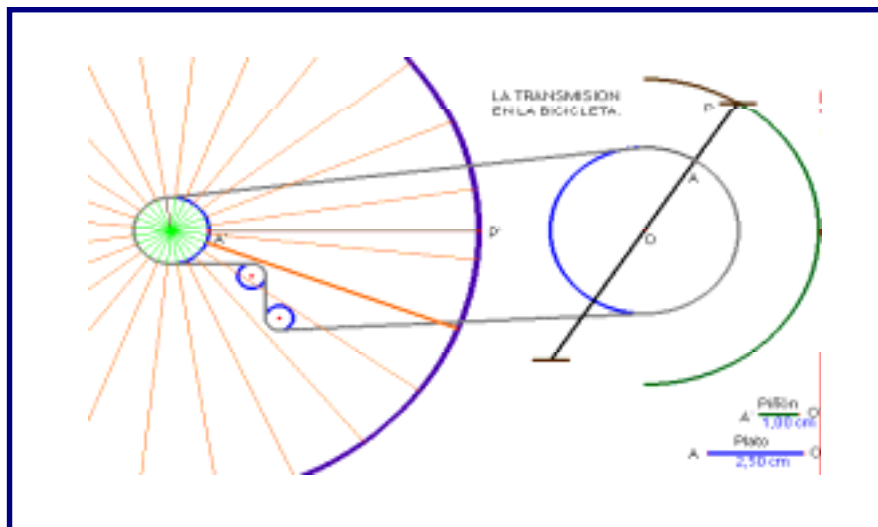
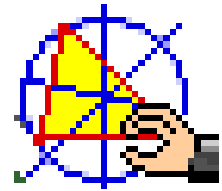


La Geometría de los mecanismos con

 Cabri-géomètre



José Antonio Mora

T3 España



T³ EUROPE

T³ EUROPE es una marca registrada de Texas Instruments

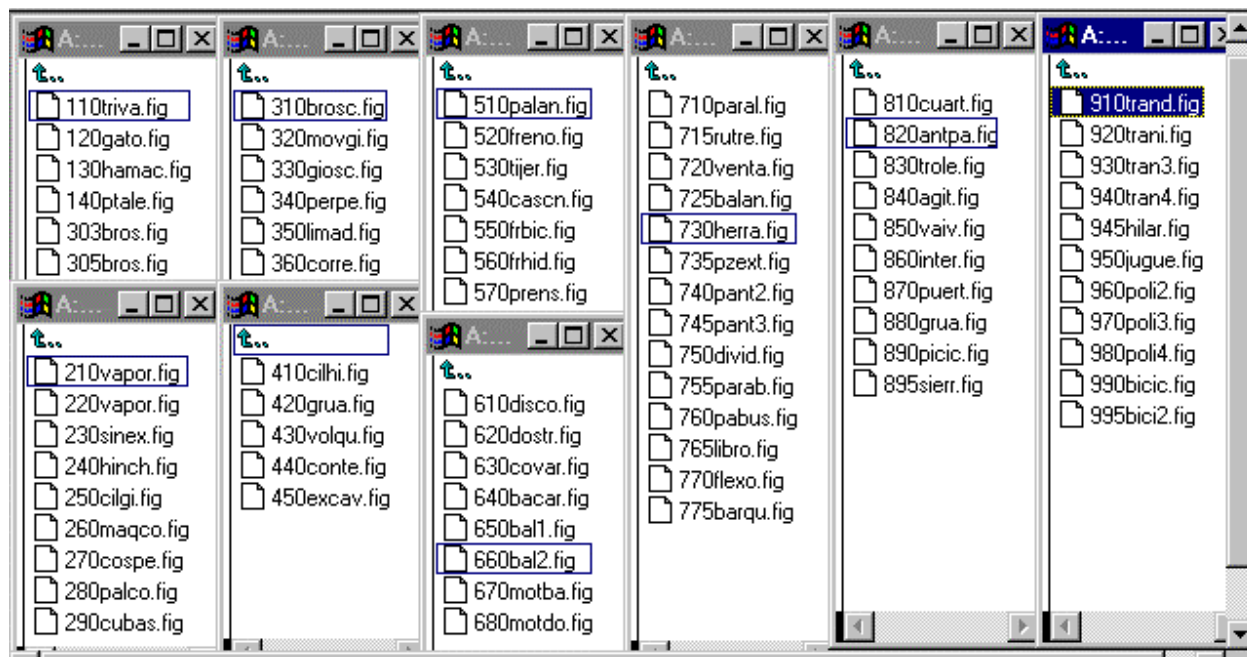
Colaboradores:

Ignacio Baeza Arnau
Francisco Jesús García García

y el equipo T³ España que está compuesto por Salvador Caballero, Floreal Gracia, Fernando Juan, Alfred Mollà, Onofre Monzó, José Antonio Mora, Pascual Pérez, Tomás Queralt y Julio Rodrigo.

NOTA

El archivo **mecanismos.zip** incluye nueve subcarpetas con los diseños de los mecanismos incluidos en cada capítulo. El contenido de estas subcarpetas se muestra en la siguiente imagen:



Índice.

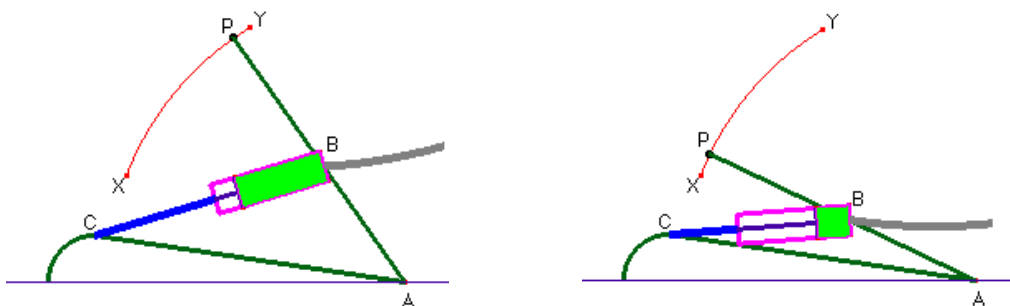
0. Presentación	4
Propósito y objetivos	
Antecedentes	
Las matemáticas	
Los mecanismos	
El programa Cabri-Geomètrell	
Utilización en clase.	
Características de la versión del programa	
1. El gato elevador	9
2. La máquina de vapor	13
3. El mecanismo de brazo oscilatorio	18
4. El cilindro hidráulico	21
5. La palanca	25
6. Combinar dos triángulos	29
7. El paralelogramo articulado	31
8. El cuadrilátero articulado	35
9. Engranajes y correas de transmisión	39
Bibliografía	45

0. Presentación.

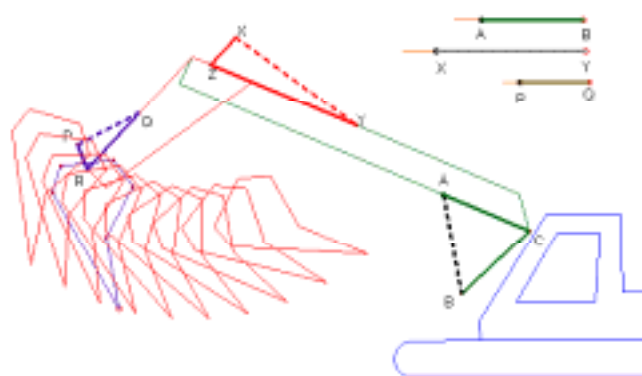
Propósito y objetivos.

El objetivo de este material es presentar una colección de diseños de mecanismos realizados con el programa informático Cabri Geomètre II, que están preparados para ser manipulados, y facilitar su estudio.

Con las construcciones realizadas se ha simulado el funcionamiento de objetos, la mayoría pertenecen al ámbito de la geometría que se utiliza en objetos de la vida cotidiana: el gato elevador, el funcionamiento del motor de la máquina de vapor, el mecanismo de brazo oscilatorio o el cilindro hidráulico, han servido de base para estudiar distintas formas de construir el triángulo que tiene un lado de longitud variable, y aplicarlo a nuevas situaciones, como la puerta levadiza de los garajes, la aguja en la máquina de coser, la limadora o las máquinas utilizadas en la construcción que utilizan brazos articulados.



Para cada polígono, se relata la secuencia de dibujo en Cabri II de forma que se resalten sus propiedades. Más adelante se analiza la forma en que esta construcción geométrica se utiliza en mecanismos de la tecnología o para analizar situaciones de la vida cotidiana: la grúa, la excavadora, la balanza de dos platillos, el limpiaparabrisas del autobús, el movimiento de la pierna del ciclista al pedalear, el mecanismo de cierre automático de las puertas, etc.



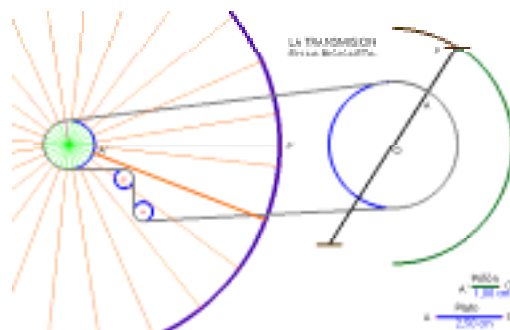
Visto de esta manera, los mecanismos se convierten en un contexto para hacer geometría y para comprender, a través de las construcciones realizadas, el funcionamiento de muchos de los objetos que nos rodean. Es muy importante poder trabajar estos temas, no sólo desde la óptica del profesor de matemáticas, y aportar también la visión de otras áreas como la física, la tecnología, la educación física, la plástica o la informática.

Antecedentes.

Mi interés sobre estos temas proviene de la primera vez que llegó a mis manos el libro de Bolt y Hiscocks "Machines, mechanisms and mathematics", en el que ya se planteaban en contextos matemáticos situaciones con barras articuladas y correas de transmisión que más adelante Brian Bolt trata con mayor profundidad en "Matemáquinas. La matemática que hay en la tecnología".

El programa Cabri-Geomètre II resulta ser una herramienta adecuada para diseñar con el ordenador estos mecanismos por la inclusión de nuevas posibilidades, de las que no disponíamos en anteriores recursos para el aprendizaje de la geometría:

*Incluye el *movimiento*: podemos construir el diseño de forma que, cuando se accione el pedal con la herramienta *animación*, todo el sistema -los puntos que hayamos asociado al que actúa como pedal-, se mueva con él simulando el funcionamiento de la máquina.



*Permite la inclusión de algunos *elementos variables* que podemos modificar. En este caso, con un simple movimiento del ratón podemos variar el radio del plato, el del piñón y también el tamaño de la rueda.

*Posibilita que el programa aprenda con nosotros mediante la construcción y ejecución de *procedimientos o macros* que, una vez construidas, podremos utilizar en cualquier momento.

*Introduce el *color*: hace que los diseños sean más atractivos y realistas.

Los diseños que aquí se presentan en formato de libro y en archivos de Cabri-Geomètre II, han sido presentados anteriormente en Congresos y Jornadas de Profesores de Matemáticas:

- *Comunicación en el 8^o I.C.M.E. celebrado en Sevilla. 1996.
- *Ponencia en las III Jornadas de la S.E.M.C.V. Al Khwarizmi , celebradas en Burjassot. 1997.
- *Taller en las 8^{as} J.A.E.M. celebradas en Salamanca en 1997.
- *Taller en las III Jornades de Didàctica de les Matemàtiques a les Comarques Meridionals celebradas en Reus. 1997.

La construcción de mecanismos también ha formado parte de los cursos de formación del profesorado, que T³ España ha organizado e impartido en ciudades como Alicante, Valencia, Pamplona, Madrid, Úbeda, Murcia, León y Almería durante los cursos 1996-97 y 1997-98.

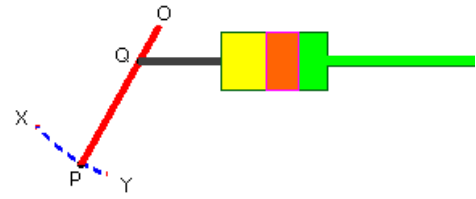
La comprensión de un mecanismo no suele ser una tarea fácil, normalmente se encuentran ocultos entre otros objetos y no se llegan a ver bien hasta que se intenta su construcción. Aquí es donde el programa Cabri II es de gran ayuda ya que proporciona una herramienta que, en cierto modo, es más asequible para muchos que el montaje real.

Los mecanismos se han distribuido en 9 capítulos, cada uno se dedica a un dispositivo utilizado en tecnología. El proceso que ha seguido intenta extraer de él la estructura geométrica que subyace: el polígono o polígonos básicos que intervienen en su construcción. Posteriormente se realiza una exposición de las dificultades iniciales que surgen cuando intentamos trasladar el modelo al lenguaje Cabri-Geomètre II y se dan ideas de cómo aprovechar el conjunto de herramientas del programa para realizar la simulación del movimiento del mecanismo. Después de esta exposición ilustrada con imágenes del proceso de construcción, se incluye una relación de los mecanismos que utilizan esa misma figura geométrica de la misma forma que la que se ha planteado inicialmente.

El programa Cabri-Geomètre II

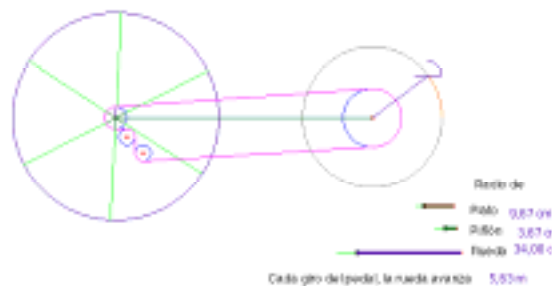
Una de las características de los mecanismos es que en la mayoría existe una pieza con la que iniciamos el movimiento, y otra encargada de ejecutar el trabajo marcado. Entre ellas tenemos un conjunto de elementos, que se van a encargar de la transmisión de los movimientos desde el impulsor hasta el seguidor. Este esquema de trabajo se adapta a la perfección a la filosofía de Cabri II, con él es relativamente sencillo situar un punto sobre la pantalla de dibujo, que se mueva libremente o sujeto a ciertas condicio-

nes, y crear otros a partir de él, nuevas figuras a partir de estos puntos, y así sucesivamente. Cuando desplazemos los objetos iniciales, todo el sistema se moverá con ellos. En el ejemplo del freno hidráulico, el movimiento del punto P en el arco XY, hace que la barra roja contacte con la negra en el punto Q y presione sobre el émbolo que se desplaza por el interior del cilindro.

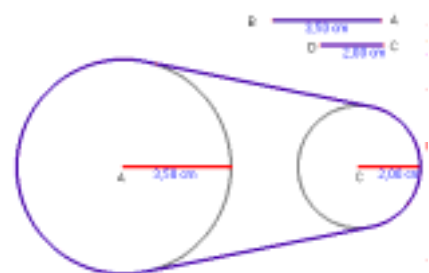


Como ya se ha señalado, podemos imprimir movimiento a estos sistemas para ver el mecanismo en acción y así analizar las partes que lo componen, la región del plano por la que podrán desplazarse ciertos elementos o las distintas velocidades de las piezas que lo componen.

Para facilitar el estudio de los sistemas, en algunos de los diseños se ha cuidado de dejar algunos parámetros para que puedan ser manipulados por el usuario, con el fin de que pueda captar mejor el funcionamiento del mecanismo. Por ejemplo, en el diseño de la transmisión de la bicicleta, podemos modificar el radio del plato y el del piñón, así como el tamaño de la rueda. Una vez establecidas las dimensiones podemos observar el movimiento del sistema y obtener algunos cálculos como el desplazamiento de la bicicleta cada vez que damos una vuelta completa de pedal.



Como ya se ha señalado anteriormente, Cabri II incluye la posibilidad de realizar macroconstrucciones o procedimientos con los que podemos “enseñar” al programa a realizar ciertas construcciones que, una vez diseñadas, podemos utilizar en el momento en que las necesitamos. Dadas dos circunferencias, podemos realizar el proceso de construcción de las tangentes a esas circunferencias. Si ya hemos realizado una vez la construcción, podemos pedir al programa que lo almacene como un archivo, para poder utilizarlo como una herramienta más: dadas dos circunferencias, dibujará los dos segmentos situados sobre las rectas tangentes, y que tienen por extremos los puntos de tangencia, con lo que tenemos el diseño que servirá de base a las correas de transmisión.



Utilización en clase

Podemos señalar dos posibilidades para la utilización didáctica de los mecanismos realizados en Cabri II, dependiendo del tipo de trabajo que se proponga a los estudiantes:

- *Diseño de mecanismos sencillos*: los estudiantes de secundaria se familiarizan rápidamente con las herramientas y la filosofía del programa, y en poco tiempo muchos se encuentran en disposición de elaborar algunos diseños sencillos (el gato, la puerta levadiza, la máquina de vapor, etc.). En la introducción a cada capítulo se incluyen las posibles ayudas, que el profesorado puede suministrar a los estudiantes, en el proceso de construcción de los mecanismos más sencillos que se presentan en él.
- *Manipulación de máquinas complejas*: La preparación por parte del profesor de matemáticas, cuando sea posible junto con el de tecnología, de algunos diseños que incidan en los temas del currículo. En matemáticas puede ser especialmente interesante para el estudio de los polígonos desde una perspectiva dinámica, para el análisis de las transformaciones geométricas en el plano y para el trazado de curvas.

Características de la versión demo de Cabri II

Se puede obtener una versión Demo para DOS, Windows y Macintosh del programa Cabri Géomètre II en la dirección de internet:

<http://www-cabri.imag.fr/produits/cabripc.html>.

Limitaciones. Es una versión incompleta del programa, que no incluye las opciones de archivo, imprimir ni cortar-copiar-pegar. Además, presenta el inconveniente de la limitación de tiempo: únicamente permite trabajar de forma continuada durante quince minutos, al cabo de los cuales, el programa se cierra automáticamente con lo que perdemos las modificaciones realizadas desde la última vez que hemos grabado. Para continuar trabajando debemos iniciar de nuevo el programa.

Si no disponemos de la versión comercial, esta versión permite el análisis de los archivos ya elaborados que se presentan en el directorio **mecanismos** del disco que acompaña a este libro. Ahora bien, si se realizan modificaciones, no podremos almacenarlas para que estén disponibles en la siguiente sesión.

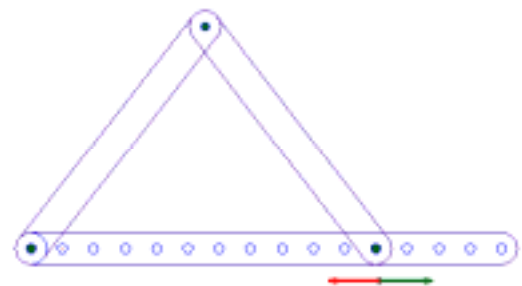
1. El gato elevador.

El gato elevador está formado por tres barras articuladas que forman un triángulo, en el que la base es de longitud variable y los otros dos lados tienen longitud fija. Cuando alargamos o acortamos la base, hacemos que el tercer vértice se sitúe a distintas alturas:

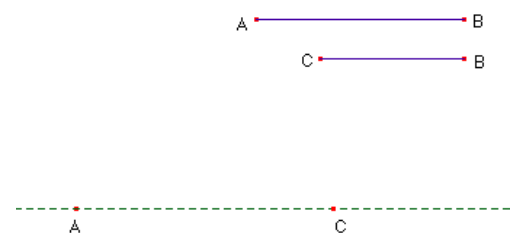


Las construcciones geométricas admiten multitud de enfoques y grados de aproximación y profundización.

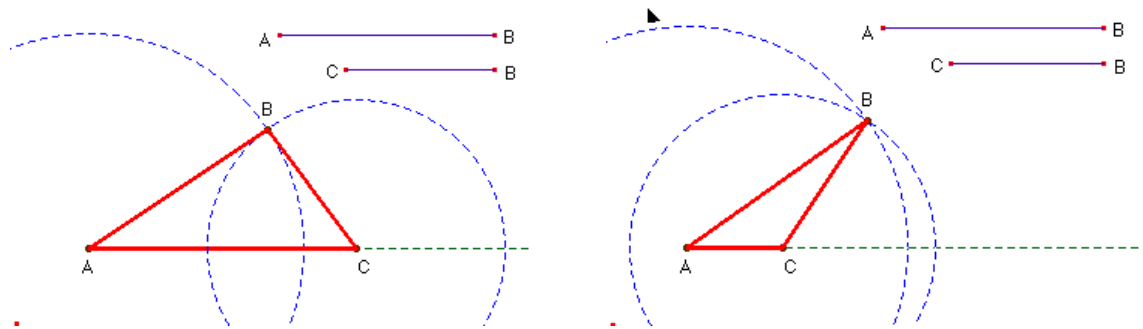
Lo que vamos a construir es un triángulo articulado con dos varillas de longitud fija y una tercera que se pueda alargar o acortar. Si hacemos la construcción con tiras de cartulina, nuestra preocupación será estudiar la forma de hacer las uniones o la forma de conseguir una varilla extensible.



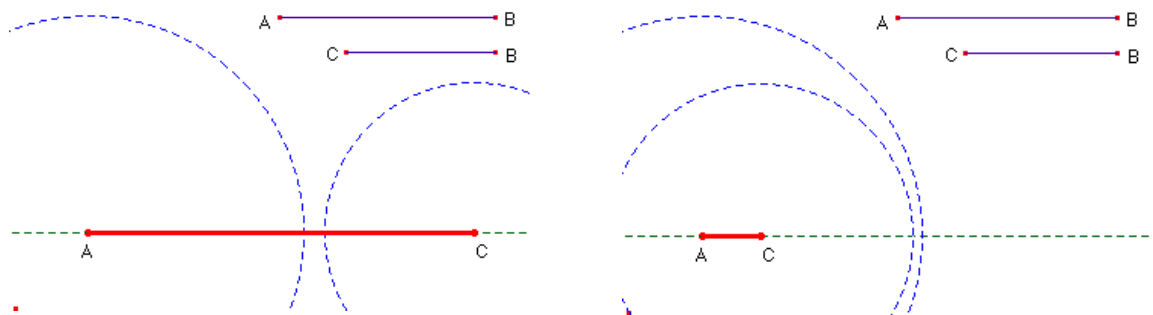
Cuando la herramienta es un programa de ordenador que utiliza puntos, segmentos, polígonos, etc., hay que revisar las relaciones entre los objetos que se relacionan en el sistema para captar los elementos básicos que lo hacen funcionar. El triángulo puede ser visto desde los vértices: uno de ellos será fijo, otro desplazarse por un segmento y el tercero vendrá determinado por los dos segmentos de longitud marcada de antemano y que cada uno de ellos tiene un extremo sobre uno de los puntos dibujados. Para esta primera construcción es conveniente que dibujemos previamente las dos varillas de longitud fija AB y BC, un punto A que será fijo y otro C que se puede desplazar —en principio—, sobre una recta que pasa por A.



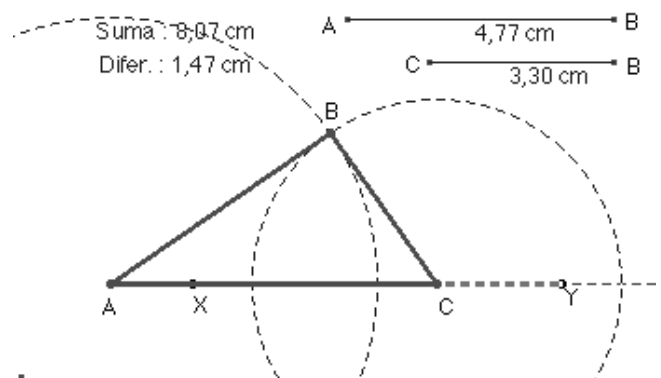
Para obtener la posición del tercer vértice, Cabri II dispone de la herramienta *Compás*: dado un segmento AB y un punto A, permite dibujar la circunferencia de centro en A y radio AB, e igualmente, se traza la circunferencia de radio CB con centro en C. El punto B será cualquiera de los dos puntos de intersección de estas circunferencias. Podemos desplazar C a lo largo de la semirrecta para obtener los posibles triángulos



Para investigar la construcción: modificamos las longitudes de los segmentos o la posición de algunos de los puntos que le han servido de base. Aquí empiezan los problemas, porque nos encontraremos con situaciones en las que el triángulo no existe, el motivo es que las circunferencias no tienen intersección.

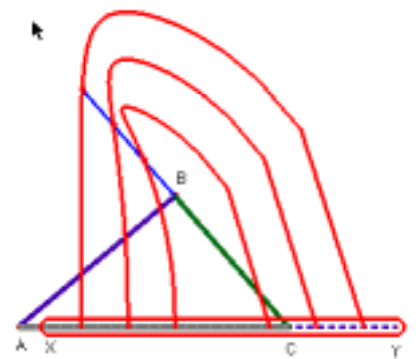
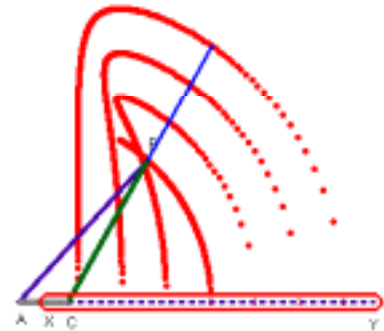


Nos replanteamos la situación para estudiar el conjunto de posiciones sobre las que se puede mover C, para que el triángulo pueda ser construido, es decir, cuando AC está entre $AB-BC$ y $AB+BC$. *Medimos* los segmentos y *calculamos* la suma y la diferencia de esas longitudes para después *transferir* esas medidas a la



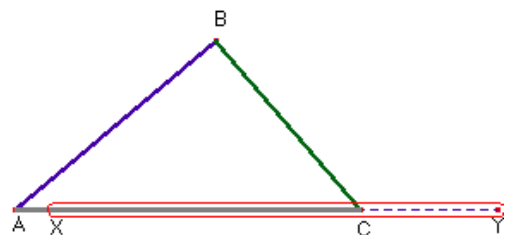
semirrecta a partir del punto A. Esto nos da dos puntos: X e Y que serán los extremos del segmento sobre el que queremos que se desplace libremente C. Ahora no tenemos más que *redefinir* el punto C para que, en lugar de pertenecer a la semirecta, esté situado en el segmento XY.

Como se ha visto anteriormente, en el gato elevador los desplazamientos horizontales del punto C consiguen que B se sitúe a diferentes alturas. Es más, podemos alargar el segmento BC, y situar sobre él diferentes puntos de apoyo para estudiar las distintas trayectorias que siguen esos puntos, cuando C se desplaza sobre el segmento. En el dibujo de la parte superior se ha dejado la *traza activada* de los cuatro puntos marcados sobre el segmento, para analizar los distintos caminos que seguirán. Otra forma de hacerlo sería con la *herramienta Lugar Geométrico* –el dibujo inferior–, que es especialmente interesante porque los lugares geométricos se transforman automáticamente cuando modificamos las longitudes iniciales de los segmentos, algo que no ocurre con el rastro que deja la traza cuando está activada.



110triva. El triángulo de base variable.

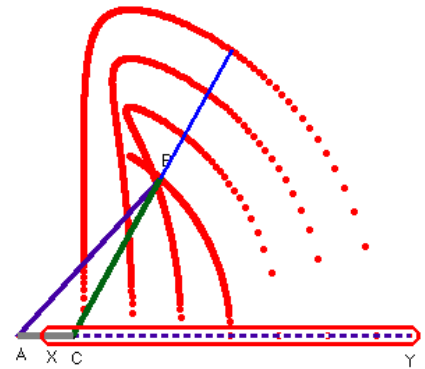
Triángulo articulado con dos lados de longitud fija AB y BC y otro variable AC. Se acciona al mover C en el segmento XY. Podemos observar la altura del triángulo en B



120gato. El gato elevador.

Cuando desplazamos el punto C de un lado a otro, es decir, modificamos la base del triángulo, conseguimos que la altura varíe, con lo que puede ser utilizado como elevador.

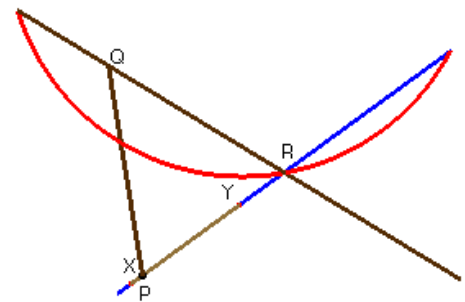
Mover P entre X e Y y dejar el trazo de Q, Q', Q'' y Q'''



130 hamac. La hamaca.

El triángulo PQR con el lado PR de longitud variable hace que la hamaca se abra o se cierre.

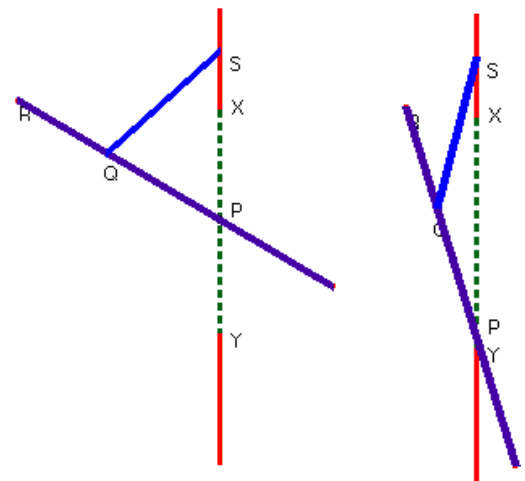
Desplazar P sobre el segmento XY marcado.



140 hamac. La puerta levadiza.

Se basa en el triángulo PQS con el lado PS de longitud variable.

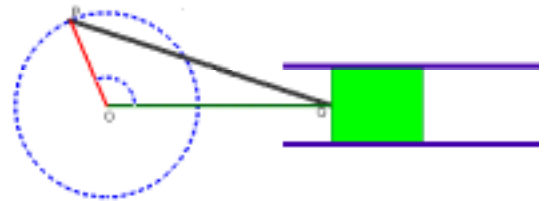
Conseguimos que la puerta se eleve modificando la altura del punto P y con ello la inclinación del segmento PQ.



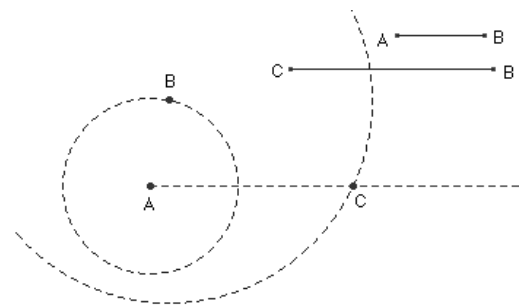
El mecanismo de apertura de la puerta de acceso a muchos garajes utiliza una nueva visión del triángulo de base variable: ahora la base del triángulo se coloca en posición vertical. La posición de C en el segmento XY determinará la mayor o menor inclinación del segmento BC, que hará que la puerta se abra al quedar horizontal, o se cierre al alejarse C de A, y quedar la puerta vertical para que se cierre.

2. La máquina de vapor

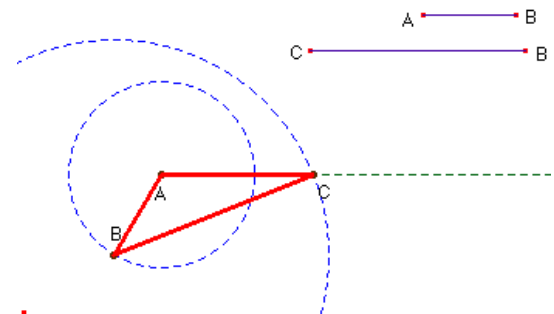
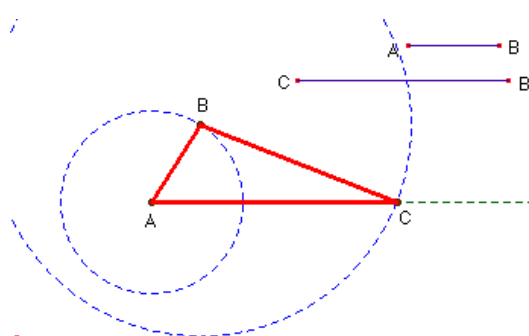
Uno de los ejemplos tradicionales de la relación entre el movimiento de rotación con el desplazamiento en vaivén lo constituye el funcionamiento de la máquina de vapor. Aquí tenemos un triángulo de base variable: cuando B gira alrededor de A, la biela BC transfiere el movimiento a un émbolo, que se mueve por el interior de un cilindro. En la realidad, el punto impulsor es C y su movimiento de vaivén se traduce en un movimiento de rotación de B alrededor de A, pero esta construcción presenta algunos problemas en Cabri y se ha optado por la contraria.



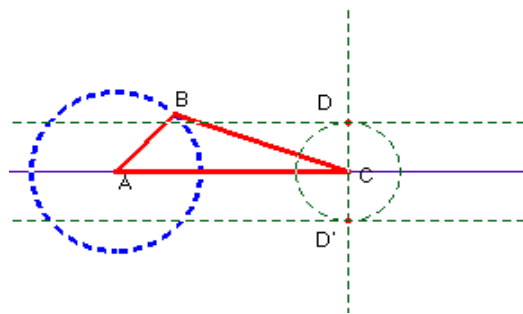
Para analizar el modelo de la máquina de vapor, en lugar de situar el punto C sobre un segmento XY, como en la construcción del gato elevador, hacemos que el grado de libertad del sistema recaiga sobre el punto B. La condición que debemos imponer a este punto es distinta a la construcción del gato. Como el segmento AB tiene longitud fija, B ha de ser un punto situado sobre la circunferencia de centro A y radio AB. Para situar la otra varilla de longitud fija debemos hacer un nuevo *compás* de centro B y radio BC, de esta manera tendremos una circunferencia que corta a la semirrecta en el punto C.



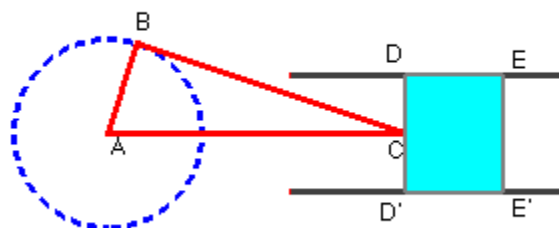
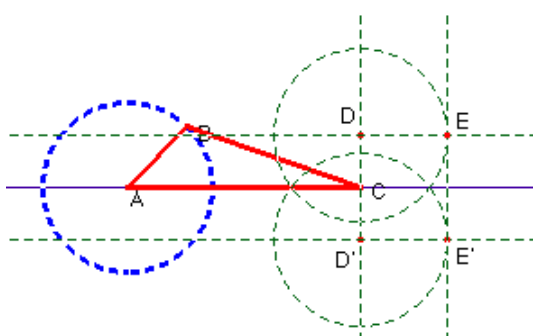
El triángulo de base variable tendrá ahora otra apariencia; un punto B gira alrededor de A e impulsa una biela, uno de cuyos extremos es obligado a moverse por una línea recta.



El punto C es el que debe arrastrar consigo el rectángulo que simula el pistón. Uno de los lados del triángulo estará situado sobre la *recta perpendicular* al segmento AC que pasa por C, tomamos dos puntos de esa recta D y D' que estén a la misma distancia de C, que serán dos vértices y trazamos dos *rectas paralelas* a AC que pasen por ellos.



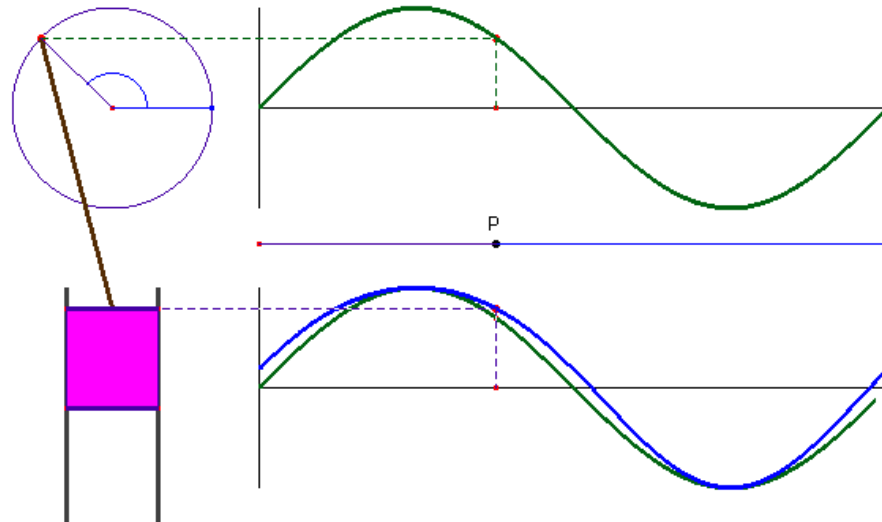
Dibujamos después dos circunferencias del mismo radio DE con centro en D y D', y los puntos de corte con las últimas rectas dibujadas nos determinan los dos vértices E y E' del rectángulo. Para acabar, trazamos el polígono DEE'D', ocultamos las líneas auxiliares e introducimos algunos elementos de presentación para que el resultado sea lo más realista posible.



El diseño de la máquina de vapor es útil para profundizar en conceptos matemáticos, como la medida de ángulos y las funciones trigonométricas. Con un punto, que gira alrededor de una circunferencia de radio unidad, es sencillo dibujar la función seno como la medida de la distancia del punto al eje de abscisas.

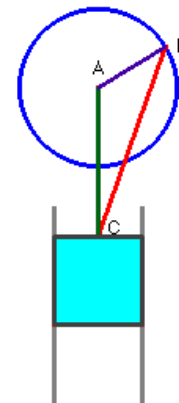
Podemos utilizar el sistema biela-manivela de la construcción del motor de explosión con Cabri II para estudiar la altura que alcanza el émbolo en el cilindro, y construir la gráfica que determina la posición de este punto cuando da una vuelta completa. Es interesante comparar esta gráfica con la función seno, veremos que hay pequeñas diferencias, algunas de ellas vienen marcadas por detalles que no son fáciles de detectar: la construc-

ción realizada hace que tarde más en ir de derecha a izquierda por la parte de arriba que al revés, consecuencia de esto es que la gráfica que indica la posición del cilindro –en azul- esté por encima de la del seno, excepto en dos puntos: $\pi/2$ y $3\pi/2$ que son los únicos en los que ambas coinciden.



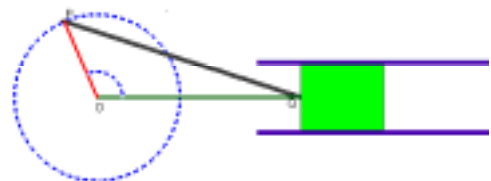
210 vapor. Máquina de vapor (1).

Un punto B gira alrededor de A mientras la biela BC transfiere este movimiento al punto C que está situado sobre una recta que pasa por A, y arrastra consigo al pistón por el interior del cilindro.



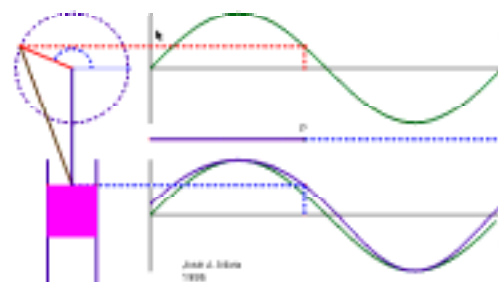
220 vapor. Máquina de vapor (2).

Igual que el anterior situado en otra posición



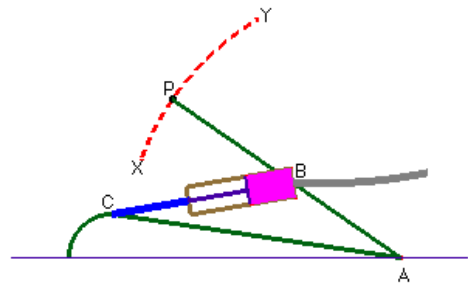
230 sinex. La máquina de vapor y la función seno.

Esta construcción sirve para comparar la gráfica de la función seno con la que determina la posición del pistón dentro del cilindro.



240hinch. El hinchador.

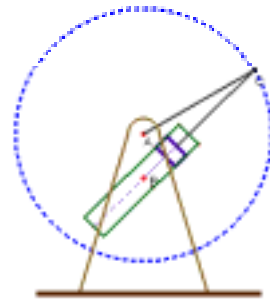
El triángulo de base variable se acciona con una palanca desde el punto P. Con ella conseguimos acortar la longitud del segmento BC para que expulse el aire del interior del cilindro.



250cilgi. Cilindro giratorio.

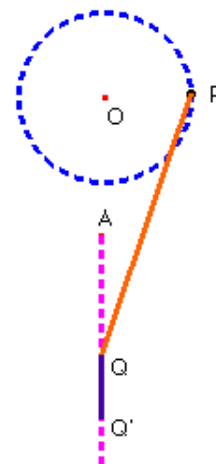
El triángulo ABC con BC de longitud variable se acciona mediante la manivela AC.

Cuando C gira, obliga al pistón a desplazarse por el interior del cilindro a la vez que gira.



260maqco. La aguja en la máquina de coser.

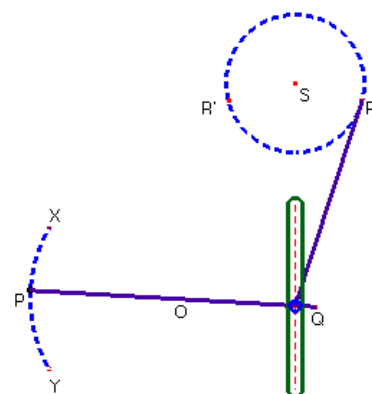
Con un funcionamiento muy parecido a la máquina de vapor, conseguimos el movimiento arriba-abajo de la aguja en la máquina de coser



270cospe. Máquina de coser a pedal.

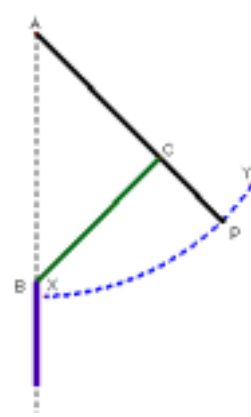
PQ hace de pedal que bascula alrededor de O. La biela transfiere este movimiento a la rotación de un punto alrededor de una circunferencia.

En el diseño sólo podemos ver el movimiento sobre media circunferencia. En la realidad la inercia se encargará de que R dé la vuelta completa



280palco. La palanca acodada.

Tiene un funcionamiento muy parecido al hinchador. En este caso se aprovecha el hecho de que, cuando P está próximo a X, sus desplazamientos se convierten en movimientos muy pequeños de B, con lo que será más fácil conseguir que la barra se introduzca por el interior de un pasador.

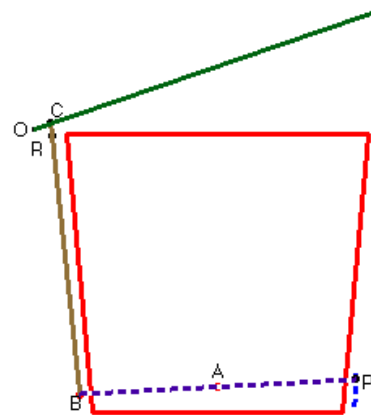


290cubas. El cubo de basura.

Al bajar P en el pequeño arco marcado, hacemos que B bascule con él alrededor de A. La barra BC está articulada de forma que pase por R. Cuando B se eleve, C presionará sobre la tapa para abrirla.

De la misma forma, cuando dejemos de presionar sobre P, la tapa caerá sobre C y se producirá el movimiento al contrario.

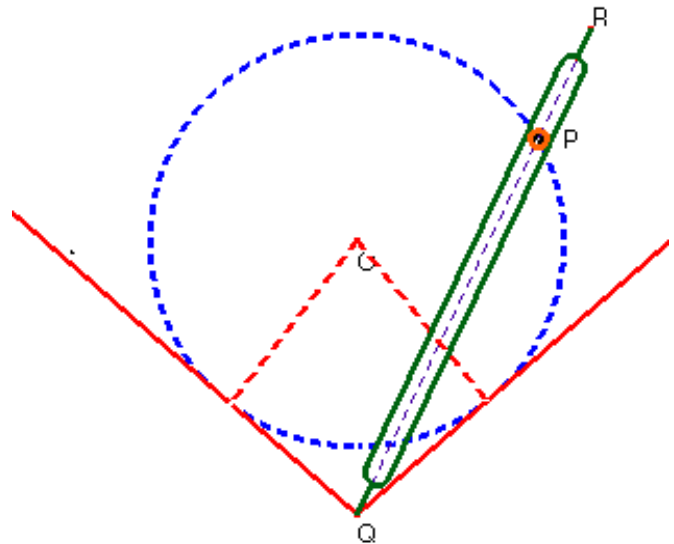
Este último triángulo situado en el



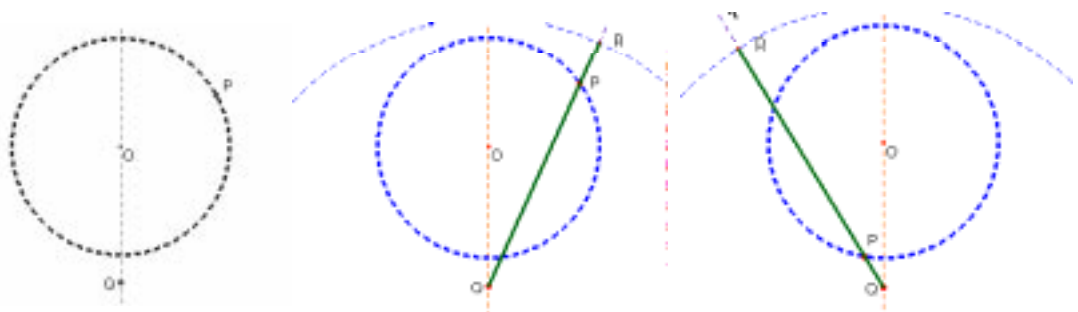
mecanismo a pedal de apertura de la tapadera del cubo de basura, es uno de los más difíciles de ver, porque el triángulo se encuentra oculto dentro del armazón. El diseño se ha realizado tomando como base el triángulo ABC con un lado AC de longitud variable. El pedal se baja en P, punto que se mueve sobre un pequeño arco y hace balancear una barra con punto fijo en A para que B suba y eleve consigo una barra que es obligada a pasar por el punto R. En C contacta con la tapa del cubo que gira alrededor del punto fijo O y la levanta.

3. El mecanismo de brazo oscilatorio.

El mecanismo de brazo oscilatorio se utiliza cuando se desea un movimiento de alimentación lenta y retroceso rápido. Ahora tenemos dos puntos fijos O y Q, mientras el punto P se mueve alrededor de O con velocidad constante. La barra QR tiene una ranura en la que está alojado P, de forma que el segmento adquiere un movimiento de vaivén con la característica de que tarda mucho más en realizar el trayecto de ida que el de vuelta. Cuanto más cerca se encuentre el punto Q de la circunferencia, más acusada será esta diferencia.

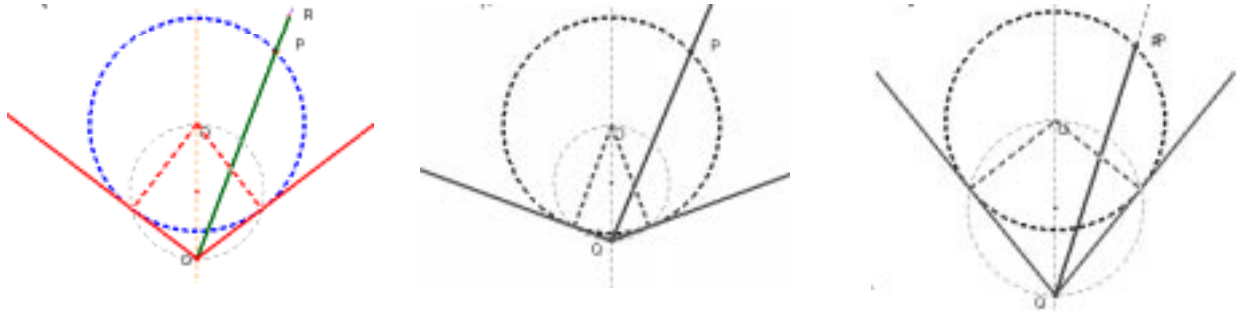


El diseño se inicia con el punto O como centro de una circunferencia sobre la que situamos a P. Situamos el punto Q exterior a la circunferencia aunque próximo a ella. Para dibujar la barra oscilante, trazamos la semirrecta que tiene origen en Q y pasa por P. Con una circunferencia con centro en Q dibujamos el segmento QR –en verde–.

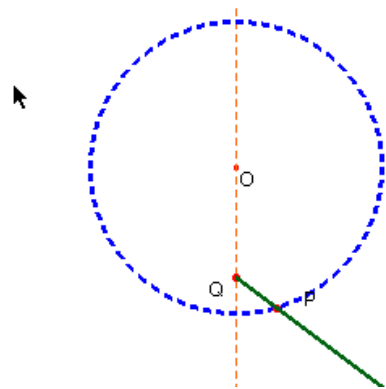


Si queremos marcar los límites en los que se mueve el segmento y los tramos de ida y vuelta, debemos trazar las tangentes a la circunferencia que pasan por Q. El trazado de las tangentes se explica más adelante en el capítulo 9.

Podemos modificar los tramos de ida y vuelta sin más que mover el punto Q, cuando lo acercamos a la circunferencia los puntos de tangencia se encuentran más cerca uno de otro con lo que aumentamos el tiempo que tarda en ir de derecha a izquierda, mientras que si lo alejamos, lo que aumentará es la duración del trayecto de vuelta.

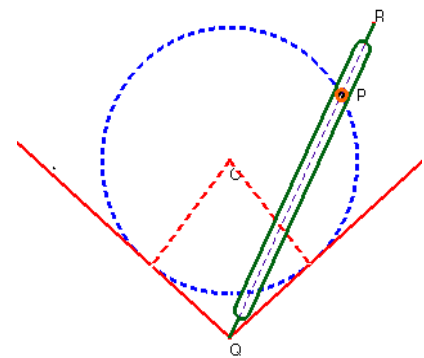


Si hacemos que el punto sea interior a la circunferencia, el segmento ya no hace el movimiento de vaivén, sino que da vueltas completas, aunque el tiempo que el segmento pasa por la parte superior del punto Q es mayor que el que pasa por debajo.



310brosc. El brazo oscilatorio.

El punto P gira alrededor de O y solidariamente lleva consigo a la barra QP que está fija en Q. El movimiento giratorio se transforma en un movimiento de vaivén, con distinto tiempo para la ida que para la vuelta.

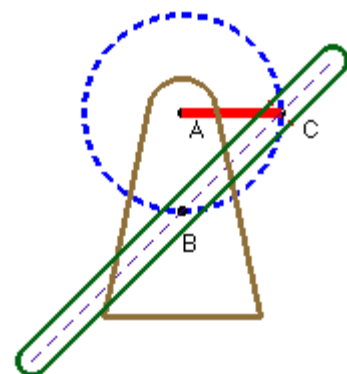


Se utiliza cuando se quiere una alimentación lenta y un retorno rápido.

320movgi. Barra con movimiento giratorio.

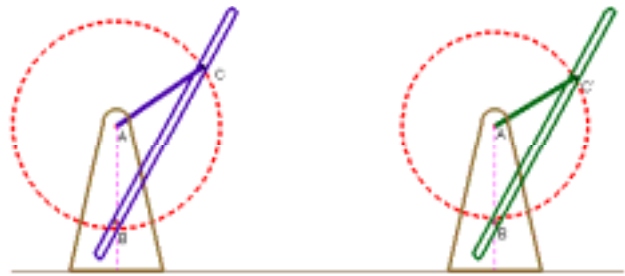
Aquí $AB = AC$ y BC es la barra de longitud variable. C gira alrededor de A y se desliza por el interior de la barra para conseguir que gire alrededor de B.

Para que la barra realice una vuelta completa, la manivela ha de dar dos.



330giosc. Movimientos giratorio y oscilante.

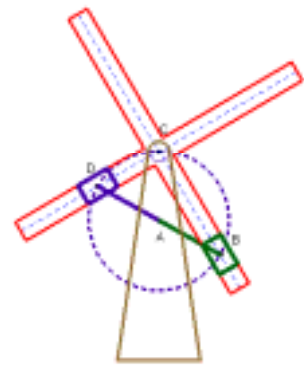
Se basan en las dos construcciones anteriores. A la izquierda $AC > AB$ y la barra dará vueltas completas, mientras que en el de la derecha $AC < AB$ con lo que se imprime a la barra un movimiento de vaivén.



340perpe. Movimiento giratorio

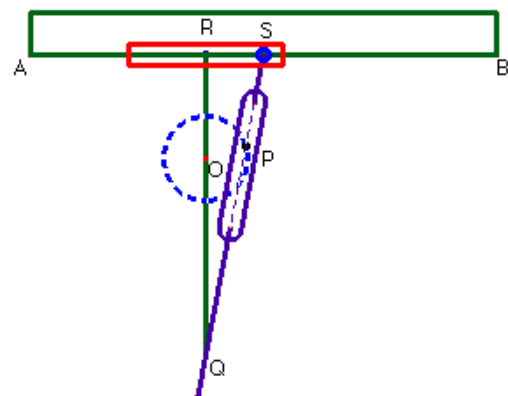
D gira alrededor de A a la vez que se desliza por el interior de la barra y B se desliza por otra barra perpendicular a la anterior.

El triángulo es ABC y el lado de longitud variable es BC



350limad. La limadora.

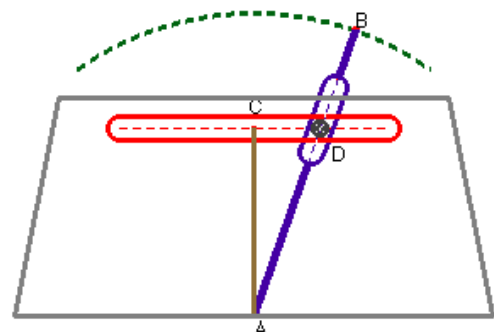
Utiliza el triángulo OPQ con un lado de longitud variable PQ para transformar un movimiento de rotación (de P alrededor de O) en otro de vaivén del segmento AB a partir del punto S.



360corred. La corredera.

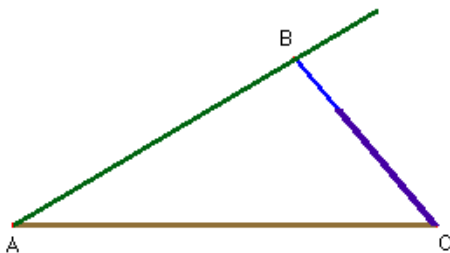
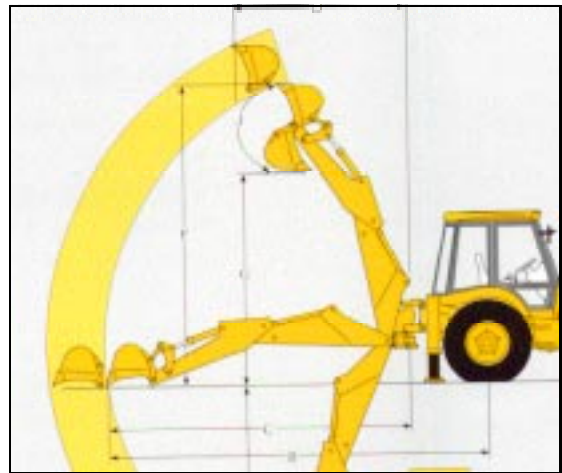
Sirve para transformar el movimiento oscilatorio de B sobre un arco con centro en A, en un movimiento de vaivén en D.

Se ha utilizado el triángulo ABC con BC de longitud variable.



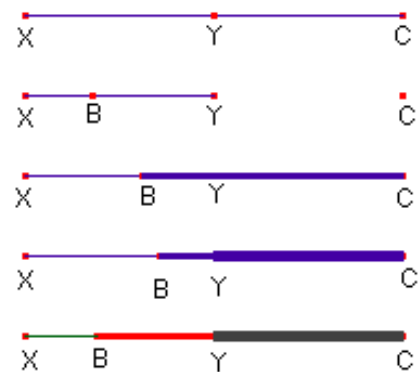
4. El cilindro hidráulico.

El cilindro hidráulico que se utiliza en volquetes y excavadoras nos sugiere una nueva vía para abordar el triángulo de base variable. Ahora los puntos A y C serán fijos y queremos que la mayor o menor longitud de CB determine la dirección del segmento AB.

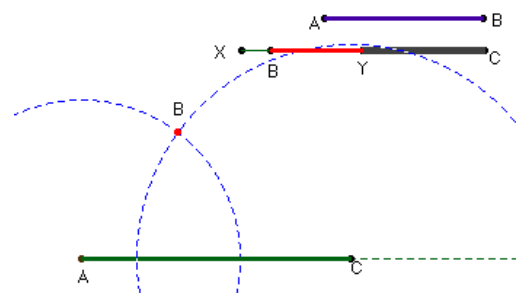


En Cabri-Geomètre II, para diseñar un cilindro hidráulico de longitud CB partimos de un segmento CX y llamamos Y al punto medio. El punto B será un punto cualquiera del segmento XY.

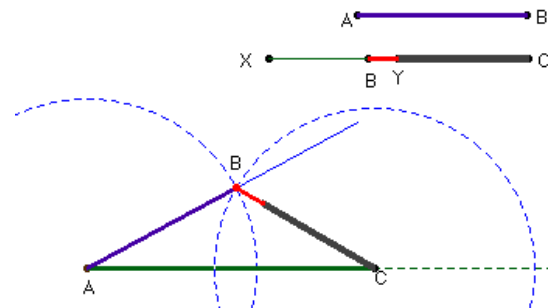
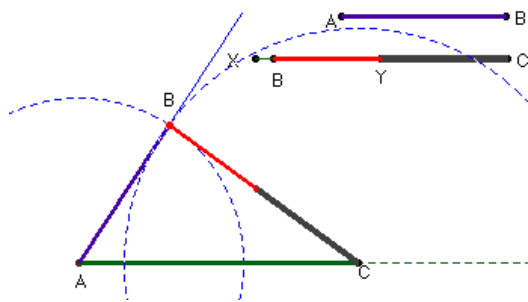
La longitud del cilindro será CB, medida que estará siempre entre CX y CY. Se señala con trazo más grueso CY que es la base del cilindro, un trazo intermedio para YB que es la longitud que se ha expandido y más fina para BX, que indica la longitud máxima que puede alcanzar y se utilizan distintos colores en la presentación. Por último, podemos crear una macro que construya el cilindro completo cuando le demos dos extremos.



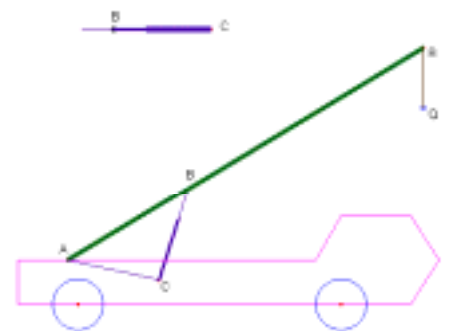
La construcción del triángulo que utiliza el cilindro se inicia con los dos segmentos de longitud fija: AB y AC. Si AC es el lado inmóvil, entonces B ha de ser un punto de la circunferencia de centro en A y radio AB. La circunferencia de centro en C y radio CB determina en cada momento la longitud del cilindro hidráulico y uno de los puntos de intersección de estas circunferencias determina el punto B.



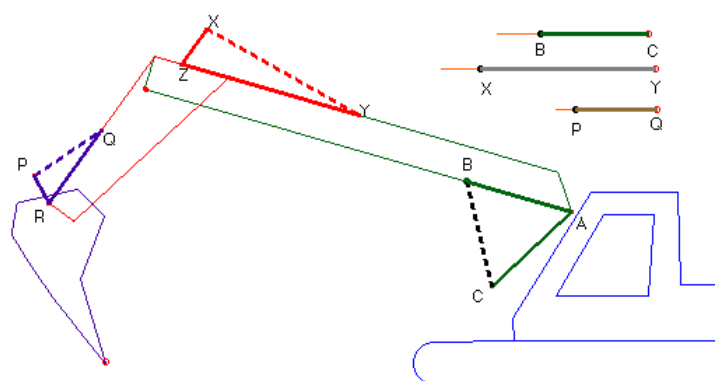
De esta forma ya tenemos el triángulo en el que el vértice B determina la dirección del tercer lado. El sistema se gobierna desde el punto B del segmento CB que hay en la parte superior derecha del diseño, que extrae el cilindro hidráulico hacia el exterior y con ello abre el ángulo CAB o lo introduce en su interior para cerrarlo. Ahora no tenemos más que construir el triángulo y estudiar la relación entre la longitud del cilindro y la medida del ángulo.



La utilización del cilindro hidráulico como lado de longitud variable en un triángulo articulado es muy amplia en aquellas barras o plataformas que han de modificar su inclinación de acuerdo con nuestras necesidades, es el caso del brazo de la grúa.



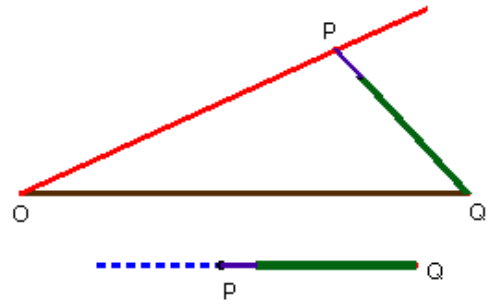
A veces puede ser conveniente combinar dos o más cilindros hidráulicos para conseguir el movimiento deseado como en el brazo articulado de la excavadora que está compuesta por dos barras articuladas, cada una con un cilindro hidráulico - ABC y XYZ -, que modifica su inclinación. Además, incorpora un tercer cilindro PQR para alterar el ángulo de la pala respecto de la barra a la que está sujeta. Con Cabri II podemos gobernar cada uno de los cilindros hidráulicos de la excavadora por separado, como lo haría el operador en la cabina.



410cilhi. El cilindro hidráulico.

En el triángulo OPQ, PQ es un cilindro que puede salir del interior de otro hasta alcanzar el doble de longitud.

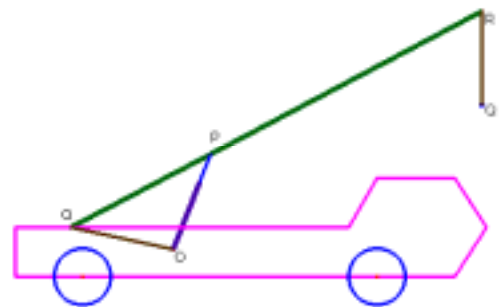
El segmento OQ es fijo y la longitud de PQ determina la inclinación del segmento OP



420grua. La grúa.

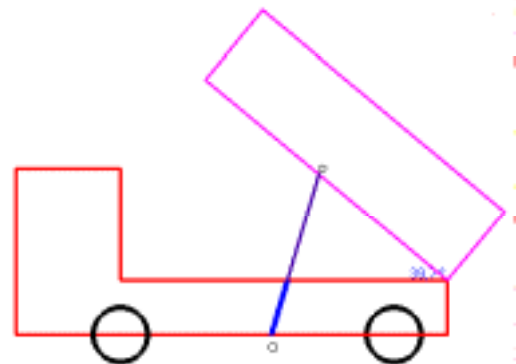
El brazo de esta grúa se eleva mediante un cilindro hidráulico OP que es el lado de longitud variable del triángulo OPQ.

El segmento OQ se ha fijado al armazón del remolque y el lado OP determina la inclinación del brazo de la grúa.



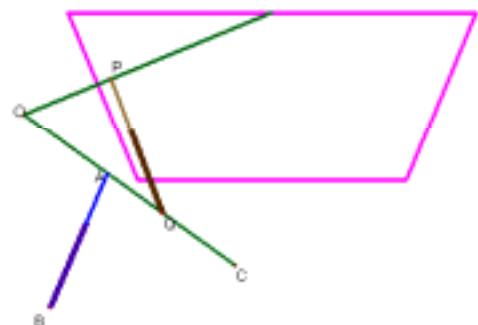
430volq. El volquete.

Para que la caja del camión pueda elevarse ángulos grandes, es necesario que el cilindro hidráulico se pueda extender tres o cuatro veces la longitud del cilindro. Para ello es preciso contar con mecanismos telescópicos.



440conte. El porta-contenedores.

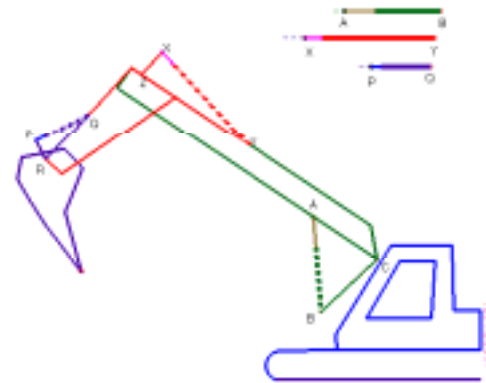
El camión que deposita y recoge los contenedores de las obras en nuestras ciudades, podría estar compuesto por dos cilindros hidráulicos articulados para facilitar el movimiento del contenedor



450excav. La excavadora.

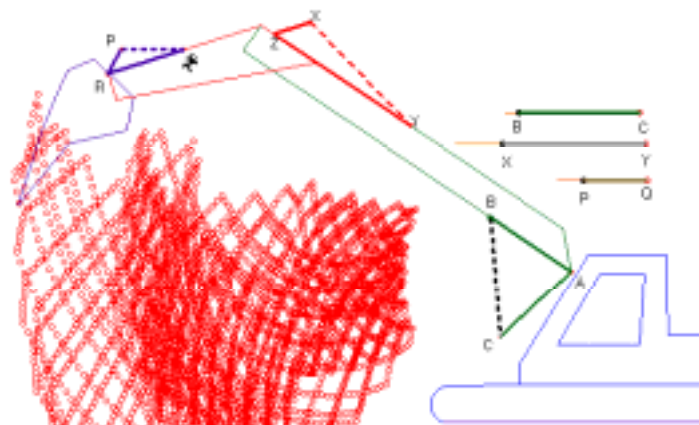
La composición de tres cilindros hidráulicos permite el movimiento de la pala excavadora.

Con ABC elevamos el primer brazo (en verde), con XYZ inclinamos el segundo brazo (en rojo) y con PQR giramos la pala

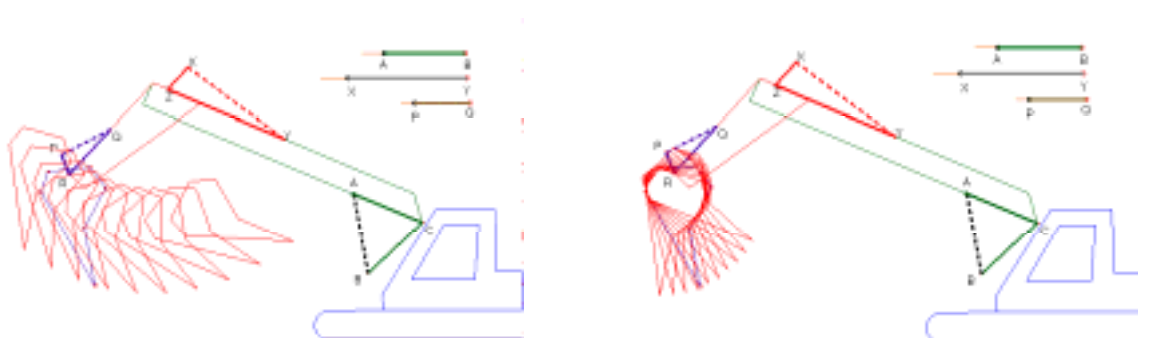


Con Cabri II podemos gobernar cada uno de los cilindros hidráulicos de la excavadora por separado, tal como el operador en la cabina manipula los controles desde la cabina.

Si lo que queremos es hacernos una idea de la región que puede alcanzar la máquina, podemos dejar el trazo de la punta de la pala y realizar una animación múltiple de los tres cilindros al azar. Si lo dejamos actuar un par de minutos tenemos un dibujo como el de la derecha.

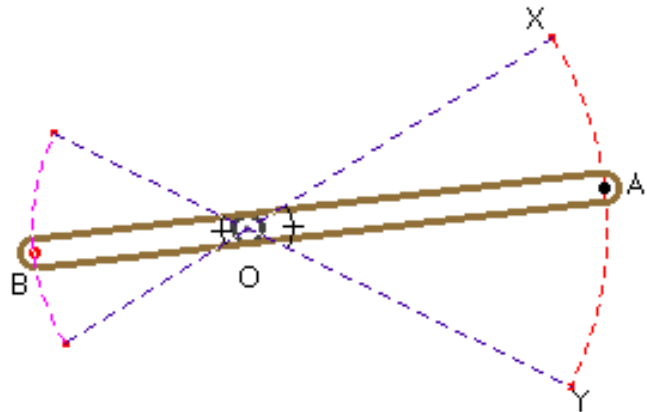


Para ver el efecto de cada uno de los cilindros hidráulicos por separado, tenemos la posibilidad de construir el lugar geométrico de un objeto que depende de otro, en nuestro caso nos permite estudiar qué posiciones ocuparía la pala cuando el cilindro toma diez posiciones equidistantes a lo largo de su recorrido. Aquí tenemos las posiciones obtenidas para cada uno de los tres cilindros:



5. La palanca.

Una barra AB que puede girar alrededor de un punto fijo O es una palanca. Su utilidad se sustenta en que las distancias recorridas por A y por B sobre los arcos, dependen únicamente de las longitudes OA y OB, porque tratamos con arcos de circunferencia trazados con ángulos iguales.



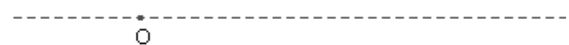
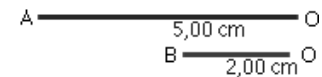
La ley física de la palanca nos dice que las fuerzas aplicadas en los extremos de la barra, son inversamente proporcionales a las distancias respecto del centro de giro. Esto se debe a que el trabajo realizado en los dos puntos ha de ser igual o, lo que es lo mismo, han de ser iguales los productos de las fuerzas aplicadas en cada punto por las distancias desde O a cada punto.

$$F_A \times OA = F_B \times OB$$

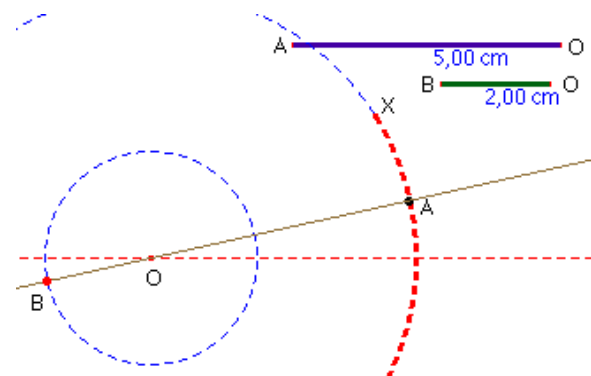
de donde

$$F_B / F_A = OA / OB$$

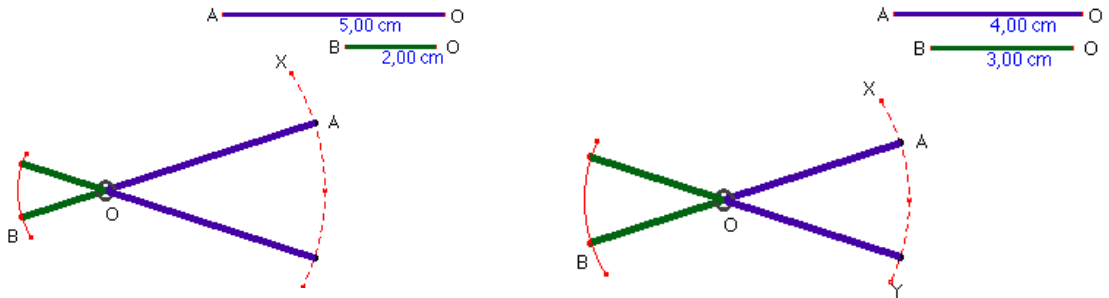
La construcción de una palanca se inicia, como en casos anteriores, con los dos segmentos que contienen las longitudes de los brazos de la barra OA y OB y marcamos el centro de giro O.



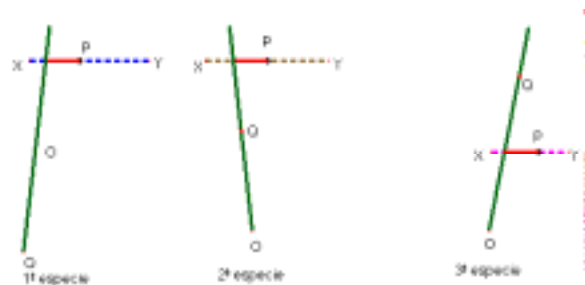
Si tomamos el punto A como el impulsor y B como seguidor, ambos estarán situados sobre arcos de circunferencia con centro en O, que podemos situar sobre las circunferencias dibujadas con el compás. Colocamos primero A sobre el arco XY y trazamos la recta que pasa por O y A, B será el punto de intersección de esta recta con la otra circunferencia.



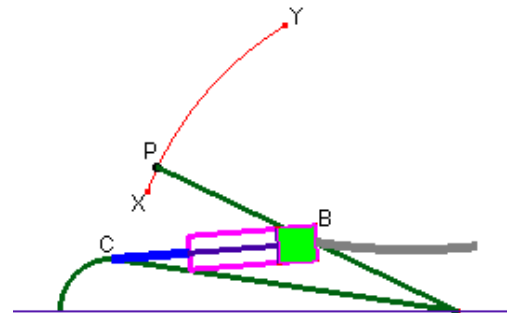
El arco sobre el que se mueve B se puede marcar como el lugar geométrico del punto B, cuando A toma posiciones distintas sobre el arco XY. Después de esto podemos modificar los brazos de la palanca, cuando sea necesario, con sólo desplazar A y B.



En la figura 520freno.fig se estudian tres tipos de palancas dependiendo de la posición relativa que mantengan los puntos P (impulsor), Q (seguidor) y O (punto de apoyo):



- **1ª especie:** cuando impulsor y seguidor están a distintos lados del punto de apoyo. Tenemos ejemplos en la palanca del freno de mano, en las tijeras y el cascanueces.
- **2ª especie:** cuando impulsor y seguidor están del mismo lado, pero el impulsor está más alejado del punto de apoyo. Ejemplos son el freno hidráulico, que se ve en esta sección y el hinchador, que apareció en la figura 240hinch.fig.

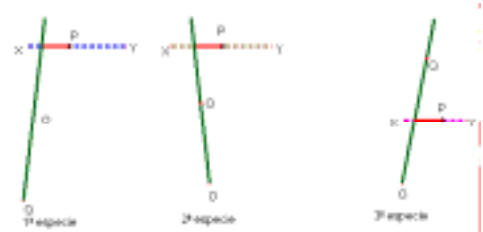
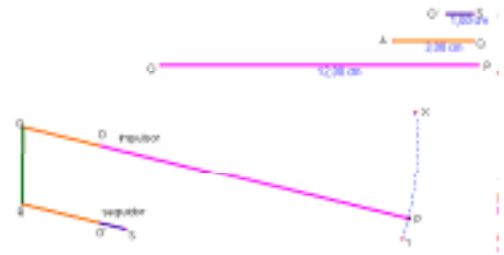


3ª especie: también están impulsor y seguidor del mismo lado del punto de apoyo, y el impulsor está más cerca que el seguidor. Se utiliza cuando queremos que pequeños movimientos se amplifiquen, es más difícil de ver en los mecanismos, pero tenemos ejemplos en las básculas de baño en las que pequeños movimientos de la plataforma han de traducirse en otros mucho mayores de la aguja que marca el peso.

510palan. La palanca.

Combinación de palancas en las que podemos estudiar el factor de transmisión. O y O' son puntos fijos sobre los que el sistema puede bascular.

Podemos variar las longitudes de las barras.



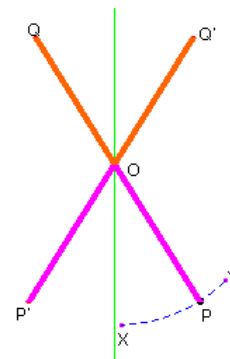
520freno. El freno.

Estudio de las tres clases de freno, dependiendo de la situación del punto de apoyo (O), el impulsor (P) y el seguidor (Q).

530tijer. Las tijeras.

La palanca se ha utilizado para producir el movimiento de corte de las tijeras.

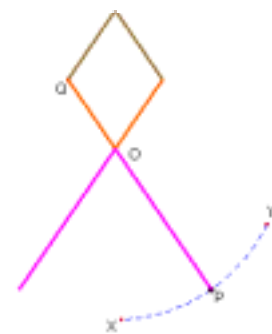
El sistema se acciona en el punto P, que está situado sobre el arco XY con centro en O.



540cascan. El cascanueces.

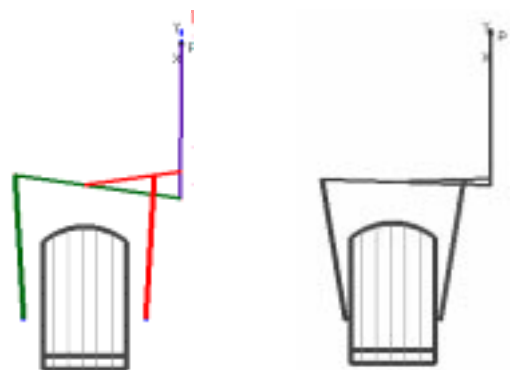
Tiene un funcionamiento parecido a las tijeras.

Dos de los segmentos se han sustituido por un rombo articulado.



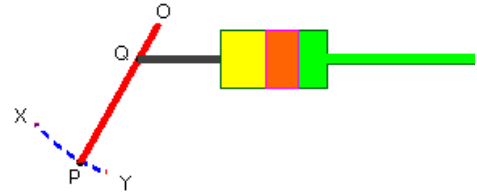
554frbic. El freno de la bicicleta.

El cable de freno utiliza una palanca en la maneta para producir tensión en un cable, que se traduce en dos palancas que obligan a las zapatas a desplazarse para presionar la rueda.



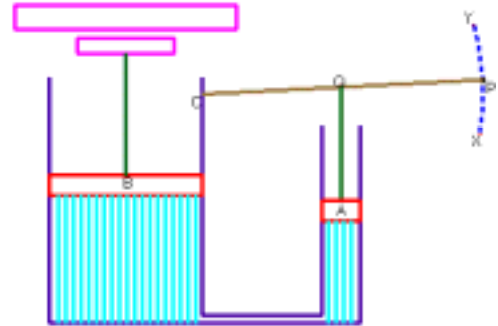
560frhidr. El freno hidráulico.

Al accionar el pedal del freno se acciona un émbolo que hace circular el líquido por los conductos hasta llegar a los discos que presionan la rueda para frenar.



570prens. La prensa hidráulica.

Las fuerzas ejercidas a un émbolo se transmiten al otro reduciendo el recorrido (se divide por 32), pero aumentando la fuerza que ejercemos multiplicando por ese mismo factor.



6. Combinación de dos triángulos.

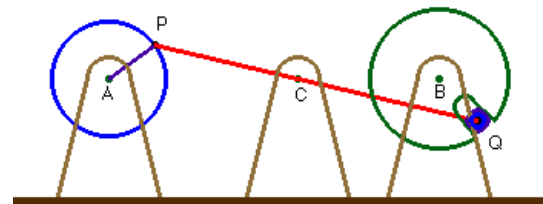
En esta sección se presentan algunos mecanismos que utilizan la combinación de dos triángulos, cada uno con un lado de longitud variable para transformar un movimiento en otro. En muchos casos se trata de convertir el movimiento de rotación de un punto (manivela), en el deslizamiento de otro, que se traslada según unas guías. Esta transformación se realiza con una barra articulada en sus extremos (biela).

También tenemos ejemplos de la transformación de un movimiento de rotación en otro movimiento también de rotación en el mecanismo de disco acoplado de la combinación de dos mecanismos de brazo oscilatorio en el banco de carpintero.

La mayoría de estos diseños están inspirados en el libro de Artobolevski que contiene una exhaustiva relación de miles de mecanismos y bastantes de ellos se pueden traducir a los diseños de Cabri-Geomètre.

610disco. Disco acoplado.

Combinamos dos triángulos, cada uno con un lado de longitud variable. La manivela AP impulsa la biela PQ, que hace girar el disco con centro en B.



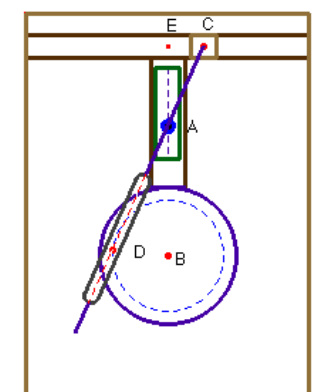
620dostr. Dos triángulos

El primero –ABC–, actúa como un mecanismo de brazo oscilatorio y transfiere su movimiento al triángulo BDE, que tiene un funcionamiento parecido al analizado en la máquina de vapor



630covar. Corredera variable.

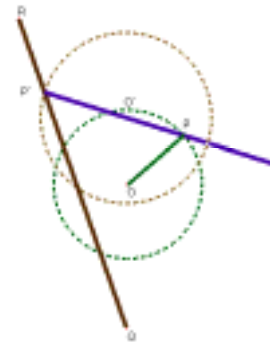
ABD es un mecanismo de brazo oscilatorio y la pieza C se desliza por una guía, formando un segundo triángulo AEC con EC variable. Podemos modificar la posición de A para aumentar o reducir el recorrido de C



640bacar. Banco de carpintero.

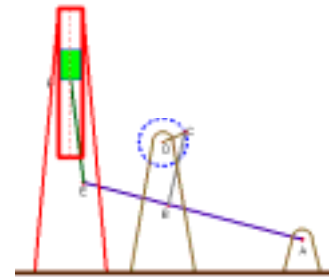
Combinación de dos mecanismos de brazo oscilatorio cuando se quiere una alimentación lenta y retorno muy rápido.

La barra QR se mueve con velocidad casi constante de derecha a izquierda excepto cuando P está justo arriba de O, que es cuando se realiza el retorno.



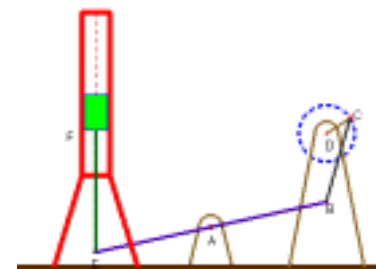
650bal1. Balancín 1.

La manivela CD y la biela BC imprimen movimiento arriba y abajo al balancín AE, que con la biela EF transfiere el movimiento al pistón, que se desplaza por el interior del cilindro



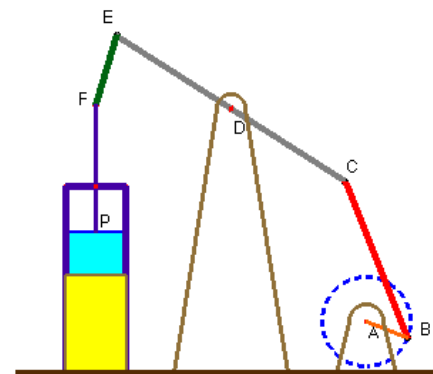
660bal2. Balancín 2

Semejante al anterior, con los elementos compuestos de otra manera. Ahora las bielas BC y EF se comunican por la barra BE que bascula en A



670motba. Motor de balancín.

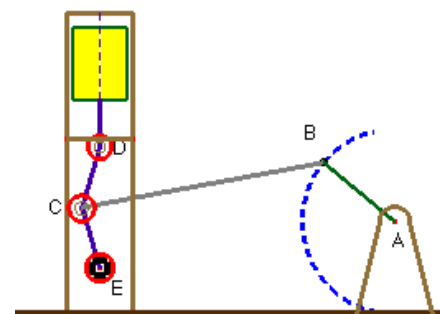
El mecanismo impulsor es la manivela AB que forma parte del triángulo ABC. La barra CE actúa como balancín alrededor de D y el triángulo DEF transmite el movimiento al pistón P.



680motdo. Motor de doble recorrido.

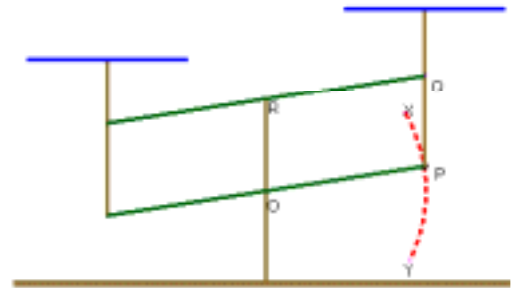
La manivela AB tiene recorrido sobre un arco e impulsa el punto C en un movimiento de vaivén lateral.

El triángulo isósceles DCE, con DE variable, consigue que el pistón haga dos ciclos completos, cada vez que B recorre el arco en uno de los sentidos.

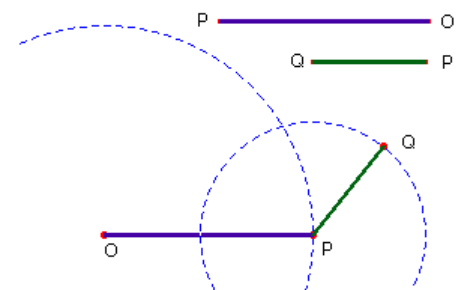


7. El paralelogramo articulado.

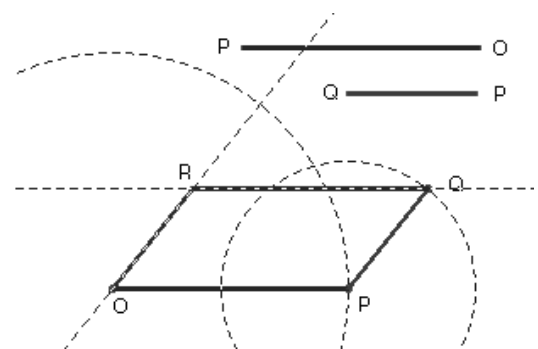
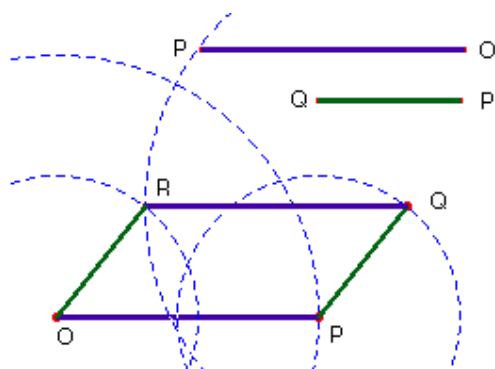
El paralelogramo es el cuadrilátero que tiene las varillas opuestas de la misma longitud. Lo utilizamos cuando queremos que se mantenga el paralelismo en diversas partes del sistema. Tenemos un ejemplo en la balanza, en la que es necesario que los platillos siempre se mantengan horizontales, para que no caigan los objetos que depositamos en ellos.



La construcción en Cabri II comienza por dos varillas de distinta longitud: OP y PQ. Si O es un vértice del paralelogramo, el siguiente P puede ser cualquier punto de la circunferencia de centro en O y radio OP. El punto Q lo situamos sobre la circunferencia que se dibuja al hacer compás en P con radio PQ.



Este montaje tendrá dos grados de libertad; en P y en Q, aunque normalmente la barra OP se mantiene fija y es Q el que provoca el movimiento en el sistema. El punto R vendrá determinado por la intersección de dos circunferencias o bien por el paralelismo de los lados.

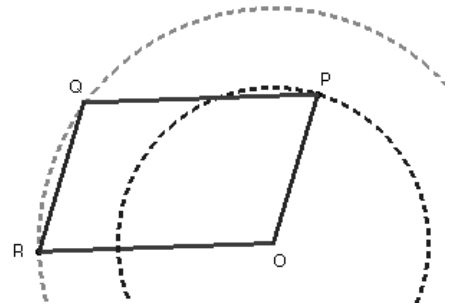


A partir de aquí podemos utilizar uno de los lados para utilizarlo en otro paralelogramo articulado, lo que provocará un efecto multiplicador del movimiento, como ocurre en el pantógrafo y en las pinzas extensibles, o bien colocar dos paralelogramos formando un ángulo fijo, como en la barquilla de reparación del alumbrado.

710paral. El paralelogramo articulado.

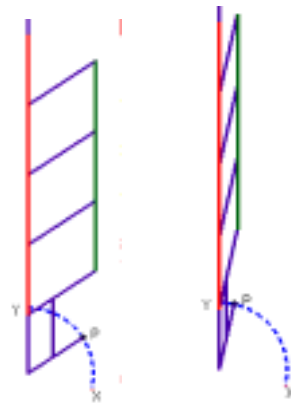
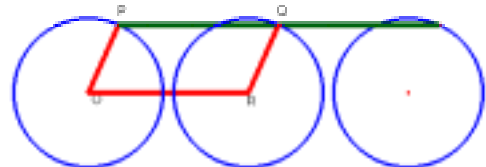
O es un punto fijo mientras P y R pueden moverse libremente.

El diseño permite modificar la longitud de los lados y la animación múltiple de los puntos móviles.



715rutre. Las ruedas del tren.

Las bielas que interconectan las ruedas de la locomotora forman un paralelogramo articulado, con el fin de que todas lleven el mismo movimiento.

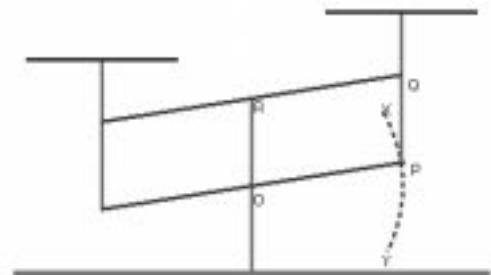


720venta. La ventana de hojas.

El paralelogramo articulado asegura que todas las hojas de la ventana se mantengan paralelas para cerrar o abrir.

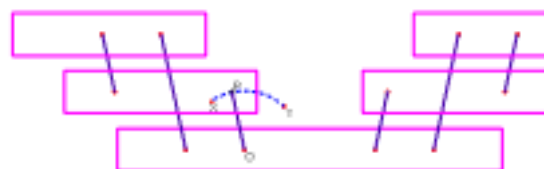
725balan. La balanza de platillos.

El paralelogramo articulado consigue que las barras que soportan los platillos se mantengan verticales y que no caigan los objetos que depositamos en ellos.



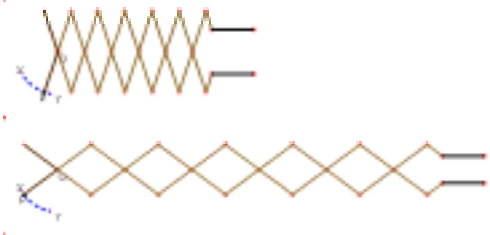
730herra. La caja de herramientas.

Utiliza la combinación de paralelogramos articulados para juntar y separar los distintos departamentos de la caja.



735pzext. Pinzas extensibles.

Utiliza la combinación de paralelogramos para extender el brazo y para cerrar o abrir la pinza.



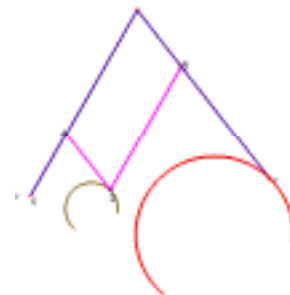
740pant2. El pantógrafo.

Cuando el punto P se mueve por el contorno de una figura, el punto Y realiza una copia de tamaño doble.



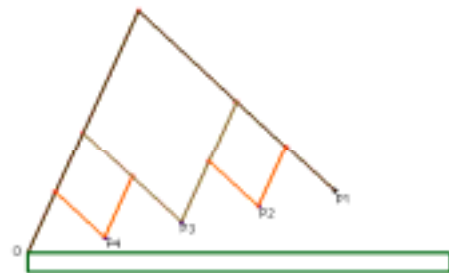
745pant3. Pantógrafo 3 a 1.

Si P se desplaza sobre un arco, Y dibuja otro arco en una escala 3:1. Esto se debe a que Y siempre se encuentra a una distancia de X triple que P.



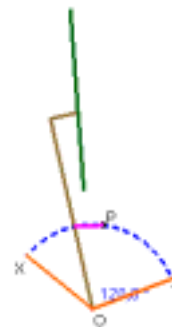
755divid. Máquina de dividir.

Es una aplicación del pantógrafo. Se utiliza para dividir un segmento OP1 en cuatro partes iguales. Llevamos P1 al otro extremo de la barra y P2, P3 y P4 marcan las divisiones.



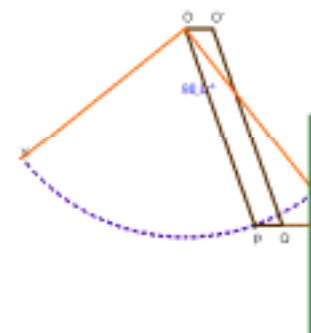
760parab. El limpiaparabrisas.

El punto P gira alrededor de O en el arco XY. La articulación transfiere el movimiento a la escobilla.



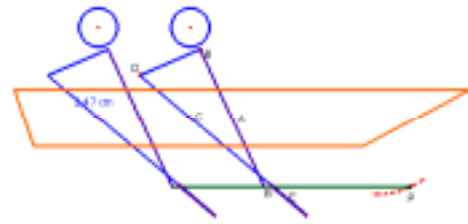
765pabus. Limpiaparabrisas autobús.

Cuando la escobilla ha de limpiar una superficie muy grande, es conveniente que se mantenga siempre vertical. Esto se consigue con un paralelogramo articulado, si OO' es fijo y horizontal al suelo, PQ también lo será y articulamos a él la escobilla de forma que sea perpendicular.



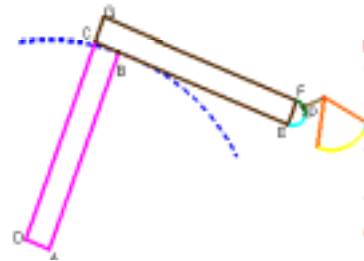
765libro. El libro móvil.

Composición de paralelogramos articulados. Al accionar el punto P con una tira de cartón hacia adelante y atrás, los personajes reman al mismo tiempo.



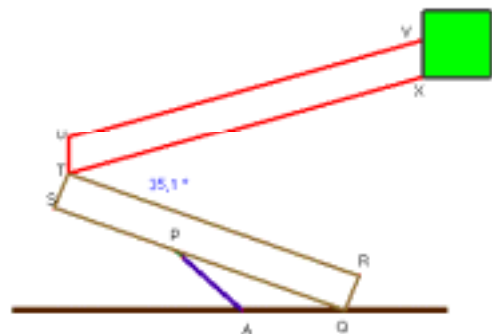
770flexo. Lámpara mesa de dibujo.

Utiliza la combinación de dos paralelogramos articulados para extender o recoger la lámpara.

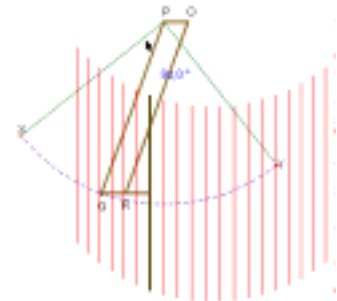


775. Barquilla para reparar alumbrado.

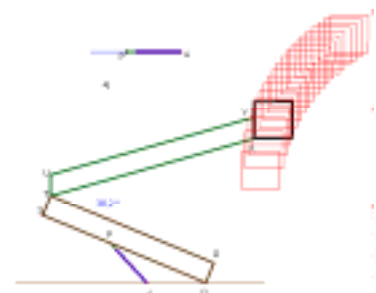
Está compuesta por dos paralelogramos articulados. El que está sujeto al suelo eleva mediante un cilindro hidráulico y el segundo forma un ángulo STU fijo, para que la barquilla no se incline y el suelo se mantenga siempre en un plano horizontal.



Los limpiaparabrisas de los autobuses deben barrer una superficie mucho mayor que la de los coches, es conveniente que la escobilla se mantenga siempre en posición vertical para que despida el agua de los cristales. En el diseño de Cabri II se ha dibujado el lugar geométrico de la escobilla, es decir, las distintas posiciones que ocupará esta barra, cuando el punto P tome 20 posiciones equidistantes sobre el arco sobre el que está situado.

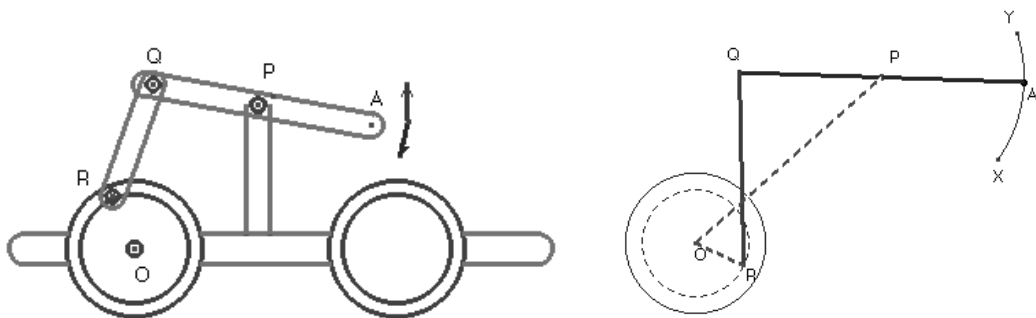


Las barquillas de reparación del alumbrado necesitan trabajar a distintas alturas, mientras el operario se mantiene en una cabina que ha de mantenerse en una posición siempre paralela al suelo, aunque se inclinen los brazos que la sustentan. Esto se consigue con la combinación de dos paralelogramos articulados que se conectan en un ángulo fijo STU. Se ha dibujado el lugar geométrico de las barquillas, 20 de las posiciones que ocuparía y que corresponde a otras tantas posiciones del cilindro hidráulico que le hace elevarse.

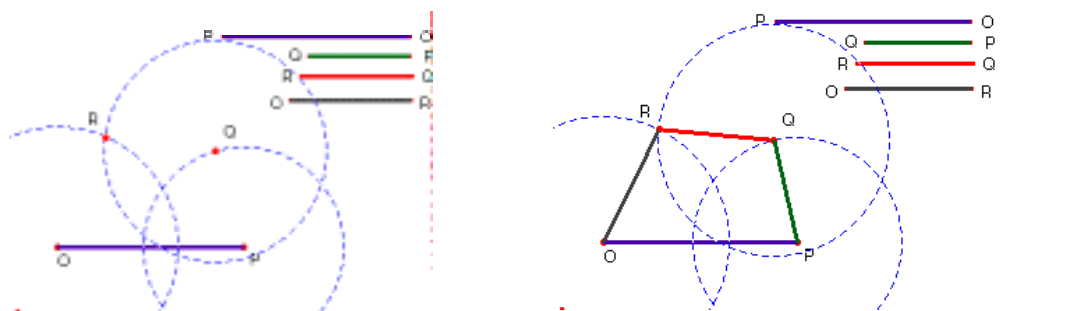


8. El cuadrilátero articulado.

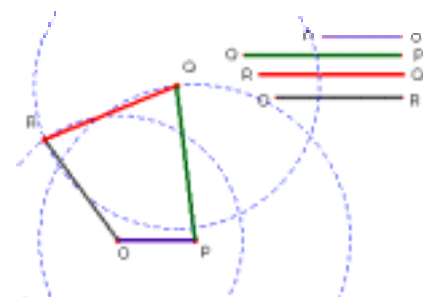
El cuadrilátero articulado está formado por cuatro varillas de distinta longitud unidas por sus extremos. Suele tener un segmento fijo OP -bastidor-, y el resto de las varillas son móviles. Se utiliza para transformar un movimiento de rotación en otro de vaivén, y al contrario. El dibujo y el esquema pertenecen al mecanismo de funcionamiento del trole, que vemos en las películas del oeste, para desplazarse por la vía. El punto A se mueve sobre un arco arriba y abajo, acciona en Q el movimiento del cuadrilátero OPQR para que R -y la rueda-, giren alrededor de O y el trole avance.



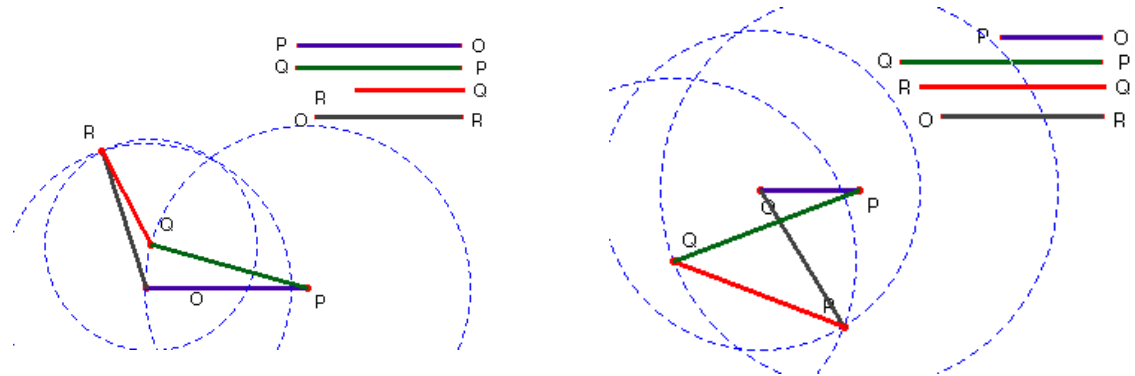
La construcción del cuadrilátero articulado con Cabri II parte de los cuatro segmentos dibujados previamente, uno de los cuales OP será el bastidor. Q será un punto cualquiera de la circunferencia de centro P y radio PQ, mientras que R será el punto de intersección de dos circunferencias: la de centro en O y radio OR y la de centro en Q y radio QR.



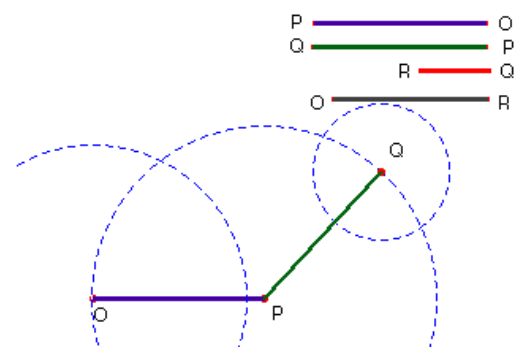
La construcción previa de las cuatro barras que después se articularán, favorece el estudio posterior, al permitir que variemos las condiciones iniciales desde el exterior del dibujo. Cuando alargamos o acortamos cualquiera de los segmentos dibujados, modificamos toda la construcción con las nuevas condiciones.



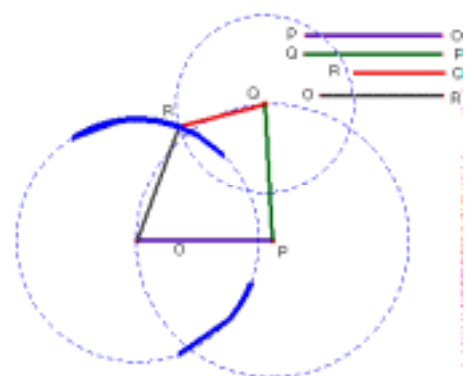
Al haber construido el cuadrilátero con varillas articuladas, pronto surgen figuras que no suelen aparecer sobre el papel, como los cuadriláteros cóncavos –a la izquierda –, y también otros cruzados –a la derecha –, que hacen surgir las dudas acerca de si serán o no polígonos. Hay un interesante artículo de D. Crawforth (1988) en el que expone el aprovechamiento didáctico de esta situación.



Además, encontramos situaciones en las que el cuadrilátero deja de existir, es decir, no se puede construir con las condiciones planteadas. El caso más evidente se produce cuando uno de los lados es mayor que la suma de los otros tres, pero hay otros.



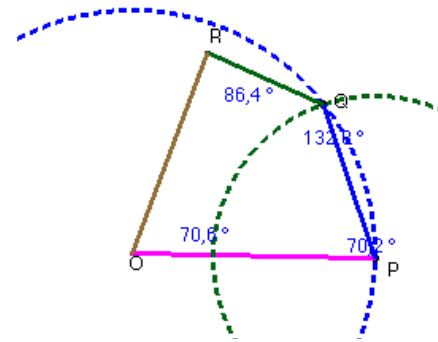
La herramienta *Lugar Geométrico* facilita el estudio para averiguar en qué condiciones podemos construir un cuadrilátero, y cuándo no será posible hacerlo. Si obtenemos las posiciones de R cuando Q toma 50 posiciones equidistantes sobre la circunferencia en la que se mueve, generalmente se dibujan uno o dos arcos (marcados con trazo grueso en azul), que indican aproximadamente las soluciones para el cuarto vértice del cuadrilátero.



810cuadr. El cuadrilátero articulado.

P puede girar alrededor de O y Q alrededor de P. En algunos casos el cuadrilátero se cruza y en otros no se puede dibujar.

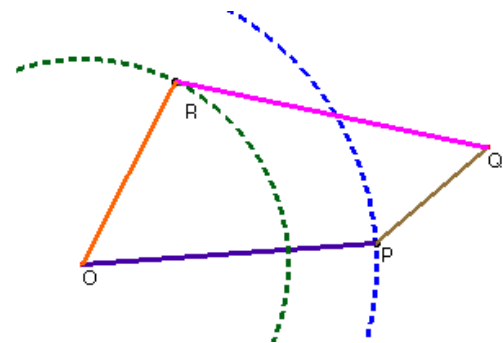
Podemos analizar las condiciones de existencia dependiendo de las longitudes de los lados.



820antpa. Montaje antiparalelo.

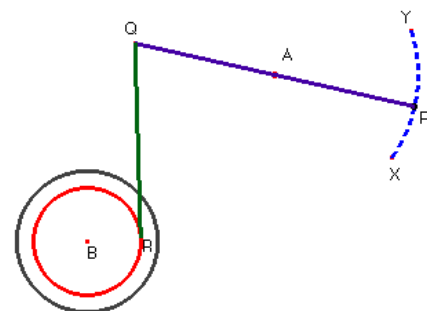
Las articulaciones se realizan ahora de forma que tanto P como Q giran alrededor de O.

Aquí podemos estudiar en qué condiciones los puntos pueden girar de forma que el cuadrilátero exista siempre.



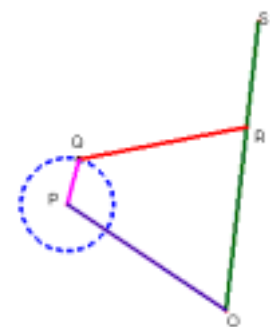
830trole. El trole ferroviario.

La barra se acciona en el punto P que hace balancín alrededor de A y mediante la biela QR se transmite el movimiento a la rueda para que gire y avance la plataforma en la que va situado.



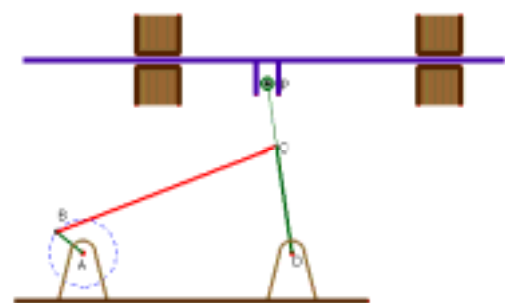
840agit. El agitador

Utiliza un mecanismo de manivela (PQ) y biela (QR) para transmitir un movimiento de rotación a otro de vaivén de la barra OS que tiene el segmento OP fijo.



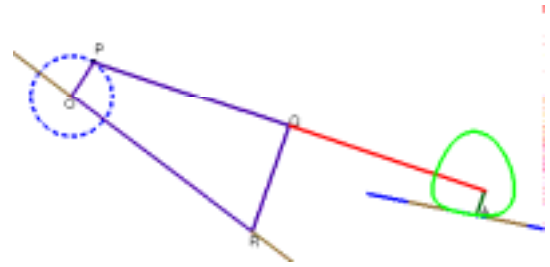
850vaiv. Movimiento de vaivén.

El cuadrilátero articulado ABCD utiliza un sistema parecido al anterior para provocar un movimiento de vaivén en P, que induce al deslizamiento de la barra dibujada en azul. La velocidad de la barra es distinta según esté en el centro o en los extremos.



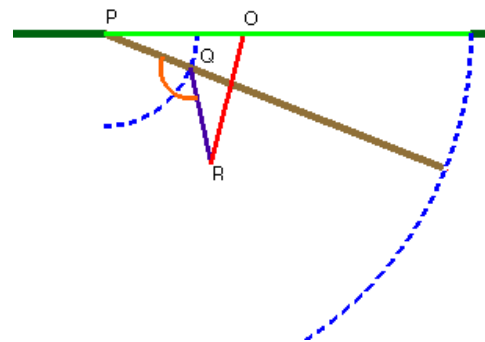
860inter. Alimentación intermitente.

Mecanismo basado en el cuadrilátero articulado que se utilizaba antiguamente para realizar el paso de la película fotograma a fotograma. El movimiento circular uniforme P alrededor de O se transforma en la curva marcada en verde para A, lo que provoca que enganche y suelte la película a intervalos constantes.



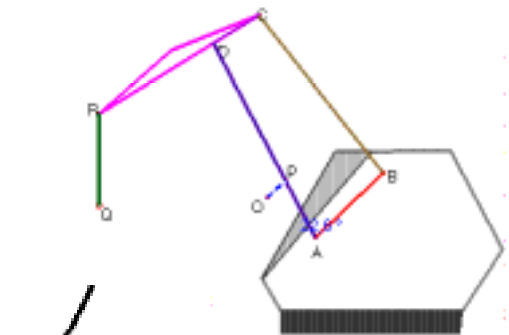
870puert. Cierre de puerta.

El cuadrilátero OPQR tiene el lado OP sobre el marco de la puerta y PQ sobre la misma puerta. Cuando Q gira alrededor de P (lo que se puede conseguir con el muelle marcado en color naranja), la puerta se cerrará.



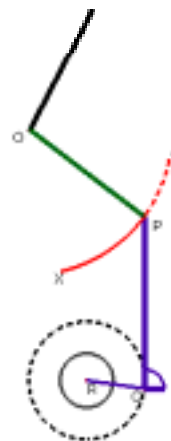
880grua. La grúa de pluma.

Para conseguir los desplazamientos horizontales de la pluma hay que inclinar el brazo. Esto se consigue al acercar o alejar P a O. Esto hará que se deforme el cuadrilátero ABCD que tiene el segmento AB fijo.



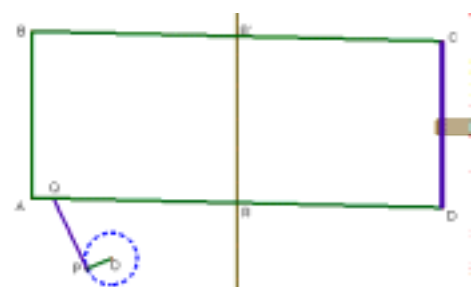
885picicl. Las piernas del ciclista.

Forman un cuadrilátero OPQR, en el que el muslo OP hace de manivela impulsora, mediante la articulación de la rodilla se transfiere a la pierna PQ que hace de biela y hace girar al pie alrededor de R. El segmento fijo es OR.



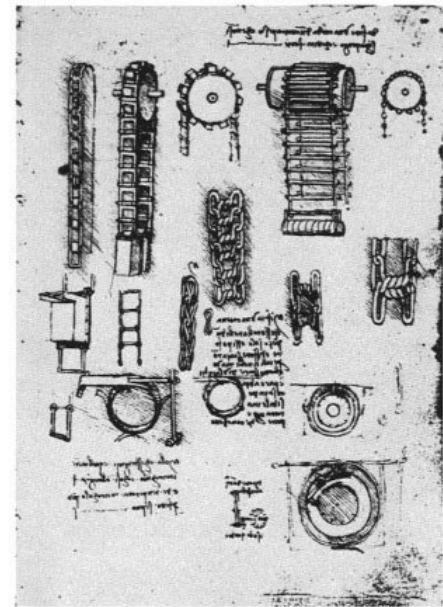
890sierra. La sierra.

Se utiliza una combinación de un cuadrilátero articulado OPQR, que hace que el paralelogramo ABCD bascule con dos lados siempre paralelos a la barra RR'. C y D describen pequeños arcos de circunferencia.

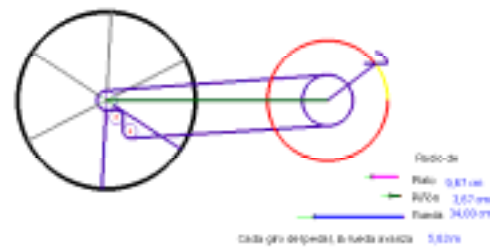


9. Engranajes y correas de transmisión.

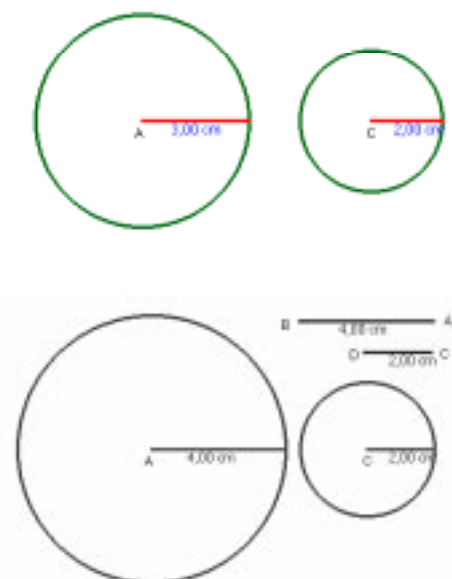
La utilización engranajes y ruedas dentadas tiene más de dos mil años. En el siglo XV Leonardo da Vinci realizó diseños de engranajes y un prototipo de bicicleta.



Actualmente engranajes y correas de transmisión están presentes en muchas actividades: poleas y polipastos para elevar cargas pesadas, y en todo tipo de sistemas para el cambio de marchas, que facilite la transmisión del movimiento.



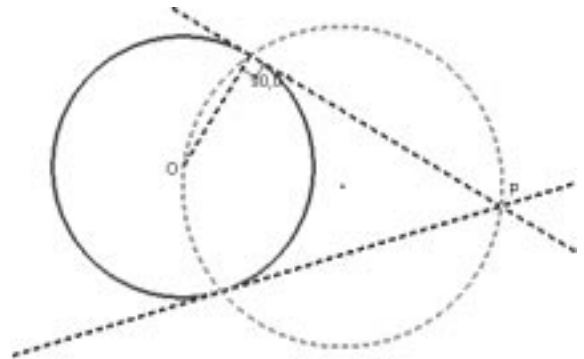
El diseño de poleas con un programa de ordenador ha de estudiar la forma de trasladar a las imágenes el problema físico-matemático del factor de transmisión. En el caso más sencillo tenemos dos ruedas conectadas por una correa. La cantidad de vueltas que da una respecto de la otra depende únicamente de las longitudes de esas circunferencias o, lo que es lo mismo, de sus radios. En la figura, cuando la rueda de la izquierda dé dos vueltas, la de la derecha habrá dado 3.



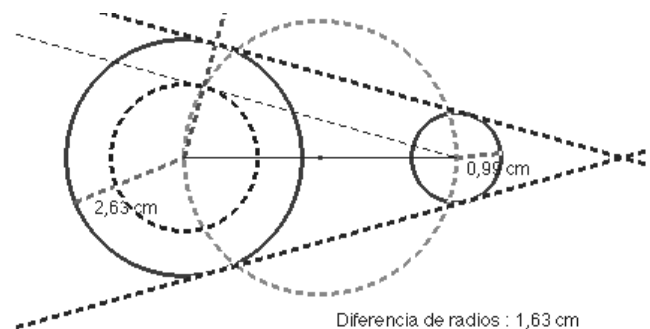
Cabri-Geomètre, como lenguaje de programación, pone a nuestro alcance una serie de herramientas, que facilitan ciertas construcciones, por ejemplo, permite introducir elementos en la construcción que hagan que

el diseño pueda ser manipulado de forma interactiva. Para conseguir que las circunferencias no sean estáticas, podemos dibujar dos segmentos a un lado que serán los que servirán como radio para la herramienta compás. Después no tendremos más que “estirar” de los extremos de los segmentos para que las circunferencias cambien de tamaño.

Construidas las ruedas, ahora tenemos que diseñar las correas que transmiten el movimiento de una a otra. Las tangentes a dos circunferencias necesitan que resolvamos el problema previo de las tangentes a una circunferencia por un punto. La solución viene al considerar la idea de arco capaz en la circunferencia, que tiene por centro el punto medio entre el centro de la circunferencia y el punto P. Si el ángulo es de 90°, la recta será perpendicular al radio de la circunferencia.



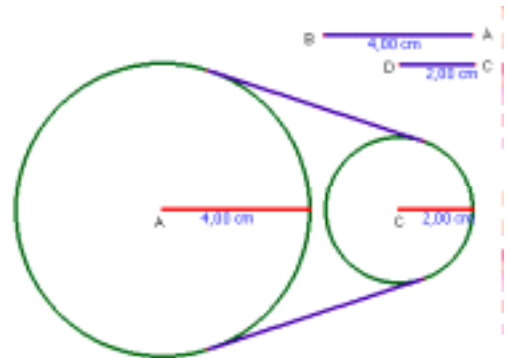
Para el caso que nos ocupa con dos circunferencias, consideramos la tangente desde el centro de la circunferencia más pequeña a la circunferencia que tiene por centro el de la grande, y por radio la diferencia de los radios. Trazamos la tangente desde el punto a la nueva circunferencia, y después dibujaremos las paralelas a estas, que sean tangentes a las dos circunferencias originales. Ahora podemos variar los radios de las circunferencias o la posición de los centros para ver lo que ocurre.



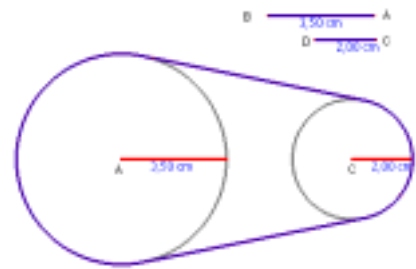
Por el procedimiento seguido para realizar la construcción, es preciso tener en cuenta que será válida siempre y cuando la circunferencia grande siga siendo mayor que la otra. Otro caso singular se da cuando una de las circunferencias está en el interior de la otra.

Una vez realizadas estas construcciones, han de ser utilizadas en los diseños para unir dos, tres o cuatro circunferencias, en lugar de repetir el procedimiento, construimos una macro que tenga:

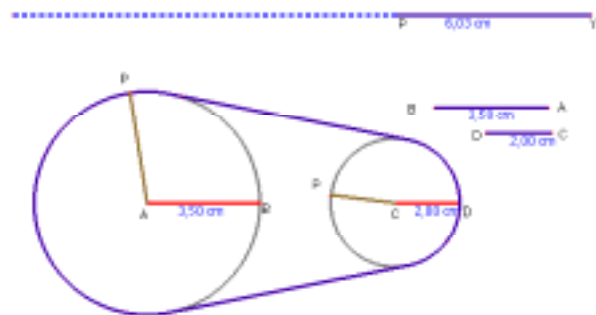
- *Objetos iniciales*: las dos circunferencias.
- *Objetos finales*: los dos segmentos situados sobre las tangentes que tienen por extremos los puntos de contacto con las circunferencias.
- *Definir macro*: escribir un nombre y guardarlo.



Aunque sólo sea una cuestión de presentación para facilitar el análisis posterior de los estudiantes, ahora podemos dibujar los arcos tomando los puntos de tangencia, para que los lugares por donde pasa la correa se vean del mismo color y lograr así un efecto más realista.

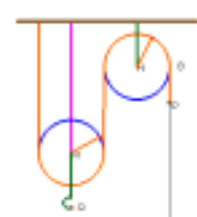


Ahora sólo nos queda realizar la simulación del movimiento de las ruedas con dos radios móviles que realicen el movimiento de rotación. Para que el movimiento aparente de una respecto de la otra se parezca a la realidad, podemos tomar un punto que gire en una de las circunferencias, y transferir ese movimiento a la otra, pero esto acarrea gran cantidad de problemas. Una solución mejor consiste en tomar un punto que se pueda mover sobre un segmento, y transferir la distancia entre ese punto y uno de los extremos a las dos circunferencias a partir de los puntos C y D.



Dos dificultades adicionales que han surgido en los diseños de este capítulo son:

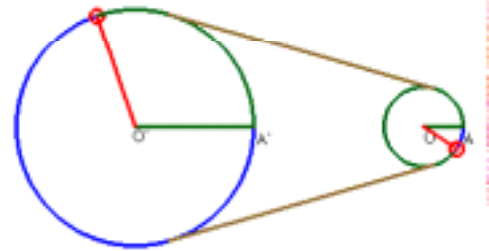
- El caso de las circunferencias concéntricas de diferentes radios, que se mueven solidariamente y cada una de ellas está unida a otras.
- El desplazamiento de las poleas móviles en los polipastos hace que la misma circunferencia se desplace hacia arriba o abajo a la vez que gira.



Se han realizado cuatro diseños de transmisión con correas de complejidad creciente, la reconstrucción de una máquina de hilar para ver la utilidad de la transmisión inversa y la aplicación de las ruedas a un coche de juguete. Más adelante se introduce el problema de la elevación de pesos mediante poleas y polipastos que facilitan el traslado de cargas pesadas y, por último, se muestran dos diseños de la transmisión en la bicicleta en las que el cambio de marchas se hace de forma continua: mediante el alargamiento de los radios del plato y del piñón.

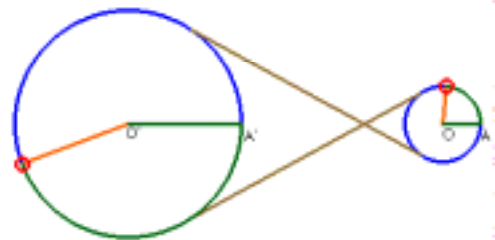
910trandi. Transmisión directa.

Dos ruedas están conectadas por una correa. El factor de transmisión se obtiene como el cociente entre los radios. Cada vez que la rueda grande dé una vuelta completa, la pequeña dará OA'/OA vueltas.



920trani. Inversión del movimiento.

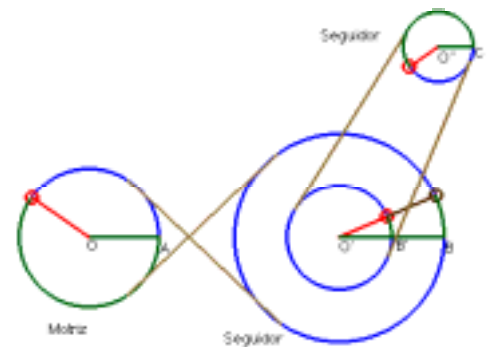
Como el anterior, pero la posición de las correas invierte el sentido de giro.



930tran3. Composición 1

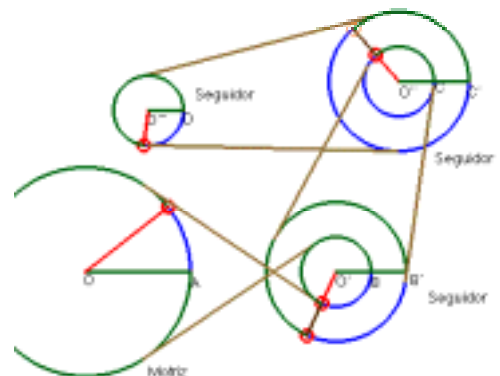
En este sistema hay dos ruedas que se mueven de forma solidaria.

En el diseño podemos variar los radios de todas las circunferencias y estudiar los factores de transmisión.



940tran4. Composición 2.

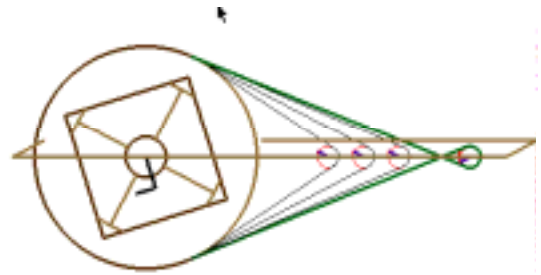
En este sistema podemos analizar el sentido de giro de cada rueda y, como en los anteriores, modificar los radios para estudiar los factores de transmisión.



945hilar. Máquina de hilar.

Reproducción esquemática de una máquina de hilar del museo del cáñamo de Callosa de Segura. Alicante.

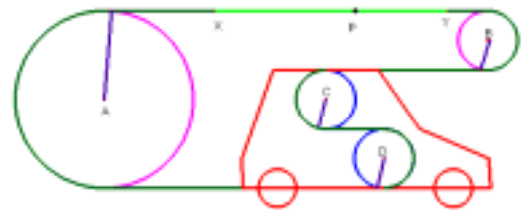
Las tres ruedas de la izquierda van enrollando hilos de cáñamo. Después estas tres cuerdas se introducen en la de la derecha para que los enrolle en sentido contrario.



950jugue. Juguete móvil.

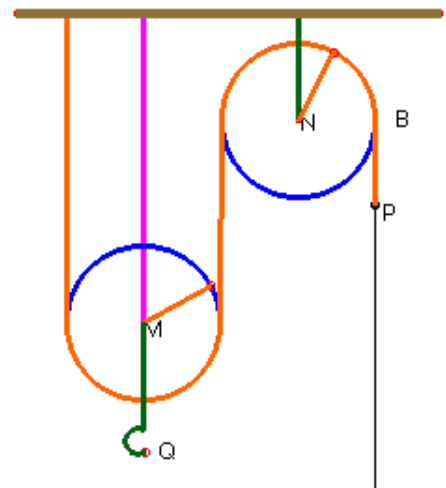
Compuesto por dos poleas fijas (con centro en A y B) y dos que se mueven con el cochecito.

El sistema se acciona al mover el punto P a izquierda y derecha.



960poli2. Polipasto 2 poleas.

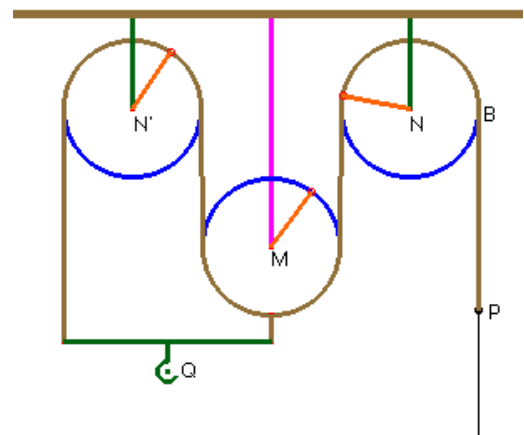
Cuando bajamos el punto P dos metros, el peso que colgamos en el gancho Q sólo subirá un metro (se recogerá un metro de cuerda por cada lado). Esto nos permitirá subir el doble de peso.



970poli3. Polipasto 3 poleas.

Está formado por dos poleas fijas (N y N') y una móvil (M).

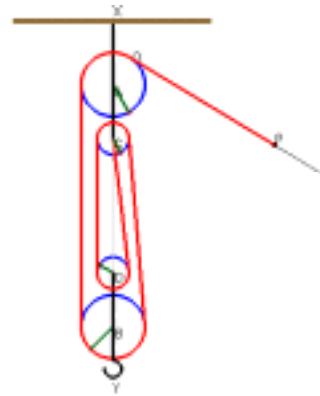
Ahora hace falta estirar tres metros de cuerda en P para que el peso situado en Q suba uno.



980poli4. Polipasto 4 poleas.

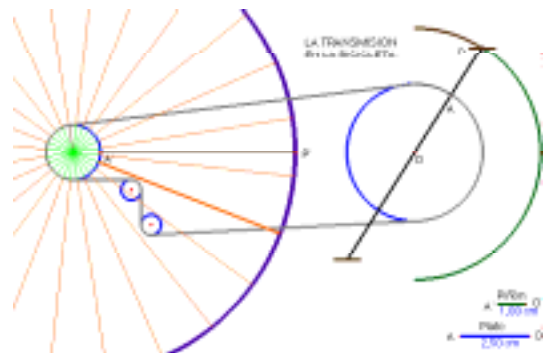
Está formado por cuatro poleas, dos fijas (A y C) y dos móviles (B y D).

Tendremos que estirar cuatro metros para subir uno, ya que se recogerá un metro por cada una de las cuerdas que bajan.



990bicic. La transmisión en la bicicleta

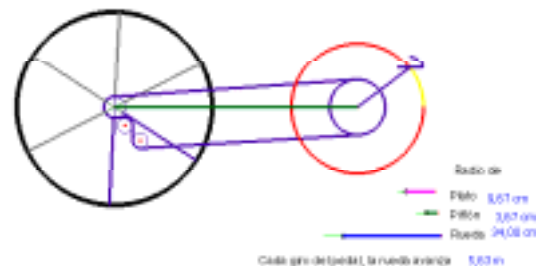
Para estudiar la transmisión podemos modificar el radio del plato y el del piñón y ver la relación entre el movimiento del pedal y el de la rueda.



995.bici2. Bicicleta 2.

Este sistema ya admite giros completos del pedal.

Además de los radios del plato y el piñón, también se permite modificar el radio de la rueda. Para unos valores determinados, se realiza el cálculo de la longitud que avanzamos al dar una pedalada completa.



Bibliografía.

- ARTOBOLOEVSKY, I.I. (1979). Mecanismos en la técnica moderna. (6 vol.). Mir: Moscú
- BOLT, A. B. y HISCOCKS (1970). Machines, mechanisms and mathematics. Mathematics for the Majority Project. Chatto & Windus. The School Council. London.
- BOLT, B. (1992). Matemáquinas. La matemática que hay en la tecnología. Labor: Barcelona.
- CRAWFORTH, D. (1988). ¿Qué es un cuadrilátero?. (En Walter M. ed. Geometry. M.E.C.: Madrid).
- CUNDY, H. M. et ROLLET, A. P. (1978). Modèles mathématiques. CEDIC:Paris
- KOZHEVNIKOV, S.N. Mecanismos. Gustavo Gili. Barcelona.
- MORA, J.A. (1996). Máquinas y matemáticas. Actas del 8º I.C.M.E. Sevilla
- MORA, J.A. (1997). De la calle al ordenador. Revista Aula de Innovación Educativa, núm. 58. Enero de 1997 pp. 20-21.
- MORA, J.A. (1997). Las matemáticas en los mecanismos. Actas de las III Jornadas de la SEMCV. Al Khwarizmi celebradas en Burjassot. 1997.
- MORA, J.A. (1997). La geometría de los mecanismos. Actas de las VII J.A.E.M. celebradas en Salamanca.
- MORA, J.A. (1998). Matemáticas con Cabri-Geomètre II. Proyecto Sur. Granada.
- O'DAFFER P. Y CLEMENS S. (1977). Geometry: an investigative approach. Addyson-Wesley: California.

Otros materiales utilizados:

- J.C.B. Maquinaria. Folletos de propaganda. Valencia
- JOAL COMPACT. Juguetes y Herrajes. Folletos propaganda. Ibi. Alicante
- Albert Lucas, R. Museo del Cáñamo de Callosa de Segura. Alicante.

Direcciones de internet consultadas:

- Leonardo da Vinci. La bicicleta e l'automobile. Studio del Professore Augusto Marinoni. <http://rcl.nemo.it/retectiv/cultura/arte/leon/indice.htm>
- Museo Leonardiano di Vinci. <http://www.leonet.it/comuni/vincimus/invimus.html>