INTERPRETACIÓN E IMPLEMENTACIÓN DE LOS ESTÁNDARES BÁSICOS DE MATEMÁTICAS

GOBERNACION DE ANTIOQUIA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PARA LA CULTURA
ANTIOQUIA NUEVA, un hogar para la vida

ISBN: 958-33-7795-3
Tiraje: 4.500 ejemplares.

Primera edición, 2005.

Diseño de carátula:
María Teresa Serna
Dirección de Fomento a la Educación con Calidad

Diseño y diagramación de paginas interiores:
Digital Express.

Gobernación de Antioquia.
Secretaría de Educación para la Cultura.
Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.
www.seduca.gov.co
E-mail: fiducaci@gobant.gov.co

Impreso y hecho en Medellín Colombia por Digital Express Ltda.

AGRADECIMIENTOS

La Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, agradece la labor de coordinación del proyecto: Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas a su equipo técnico, a todos los docentes que participaron en las mesas de trabajo y en particular a las siguientes personas e instituciones educativas que hicieron posible llevarlo a feliz término:

- Integrantes de la Mesa Departamental de Matemáticas.
- Universidad de Antioquia. Facultad de Educación.
- Rectores de las Instituciones Educativas donde laboran los docentes integrantes de la Mesa Departamental de Matemáticas.
- Docente Miryan Briceño Delgadillo del INEM José Felix de Restrepo por la lectura y sugerencias.
- Profesor Orlando Monsalve Posada de la Universidad de Antioquia por sus aportes.
- Profesor Gilberto Obando Zapata de la Universidad de Antioquia por su coordinación académica.

Aníbal Gaviria Correa
Gobernador de Antioquia

José Fernando Montoya Ortega
Secretario de Educación para la Cultura de Antioquia

Libardo Enrique Álvarez Castrillón
Director de Fomento a la Educación con Calidad

COORDINADORES ÁREA DE MATEMÁTICAS

María Eugenia Posada Calle
Profesional Universitaria - Secretaria de Educación para la Cultura de Antioquia

Gerardo Antonio Avalos Avalos
Supervisor de Educación - Secretaria de Educación para la Cultura de Antioquia

INTEGRANTES DE LA MESA DE MATEMÁTICAS

Gilberto Obando Zapata
Profesor Universidad de Antioquia

Martha Cecilia Quintero Marín
Institución Educativa Domingo Savio - Rionegro

Ramón Antonio Quintero Marín
Institución Educativa Antonio Donado Camacho - Rionegro

Rubiela del Socorro Rojas Alzate
Institución Educativa Domingo Savio - Rionegro

Fainory Moreno Cuesta
Institución Educativa Porcecito - Santo Domingo

Guillermo Silva Restrepo
Institución Educativa La Milagrosa - Medellín

Ana Ofelia Villegas Múnera
Institución Educativa Emiliano García - Girardota

Mercedes del T. Arrubla Carmona
Institución Educativa de Desarrollo Rural
Miguel Valencia - Jardín

John Jairo Múnera Córdoba
Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa - Caldas

Arsenio de Jesús Marín Correa
Institución Educativa Rural El Rodeo - Sopetrán

Marisol Cárdenas Valle
Institución Educativa José María Villa - Sopetrán

Beatriz Alejandra Carvajal Muñoz
Institución Educativa José María Córdoba - El Santuario

Ramón Emilio Sepúlveda Quiroz
Institución Educativa Asia Ignaciana - Medellín

Manuel Arcángel Bastidas Bedoya
Institución Educativa Escuela Normal Superior
Señor de Los Milagros - San Pedro

Carlos Humberto Ospina Noreña
Institución Educativa Inem José Félix Restrepo - Medellín

José Manuel González
Institución Educativa Lola González - Medellín

Maria Denis Vanegas Vasco
Institución Educativa La Paz - Envigado

Jesús María Gutiérrez Mesa
Institución Educativa Guadalupe - Medellín

Amzolicreyth Galarcio Arboleda
Institución Educativa
Luis Eduardo Arias Reinel - Barbosa

Carlos Octavio Gómez Tabares
Institución Educativa
Presbítero Camilo Torres Restrepo - Medellín

Gustavo Gallego Girón
Institución Educativa Inem José Félix Restrepo - Medellín

José Wilde Cisneros
Institución Educativa Andrés Bello - Bello

Liliana Catrillón Giraldo
Institución Educativa Rural El Porvenir - Yolombó

María Virgelina Yepes P.
Institución Educativa Cardenal
Aníbal Muñoz Duque – Santa Rosa de Osos

María Miriam Quintero T.
Institución Educativa José Prieto Arango - Tarso

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

La Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, con base en los objetivos del Plan de Desarrollo, Una Antioquia Nueva, un hogar para la vida, está promoviendo múltiples acciones para incidir en la transformación de las prácticas pedagógicas de los docentes, con el propósito de avanzar hacia el logro de mayores niveles de formación de los niños, niñas y jóvenes, en competencias matemáticas.

Con la permanente cooperación de la Universidad de Antioquia y la Red de Mesas de Matemáticas del Departamento, se han podido consolidar, en diferentes municipios y subregiones, grupos de estudio en torno a los documentos rectores de la educación en matemáticas en el país: Fines de la Educación, Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos.

En el desarrollo de tan significativa experiencia, se han elaborado y sistematizado propuestas de reconceptualización, interpretación e implementación del proceso de enseñanza y de aprendizaje, en el marco de la articulación integral de los planes de estudio, a partir de los estándares básicos, los lineamientos curriculares del área y las demandas de pertinencia con el contexto sociocultural.

Confiamos que este trabajo sea un aporte a todos los maestros y maestras de Antioquia, para la planeación curricular del área, la práctica académica y el desarrollo de investigaciones e innovaciones, que contribuyan en su conjunto, a la cualificación permanente de la formación en tan importante área del conocimiento.

José Fernando Montoya Ortega
Secretario de Educación para la Cultura de Antioquia.

INTRODUCCIÓN

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), actualmente afirmados con los Estándares Básicos de Matemáticas[1] (2003), el Ministerio de Educación Nacional propone unos nuevos elementos teóricos y metodológicos que pretenden actualizar la estructura curricular de la educación matemática en nuestro país, respetando la autonomía institucional consagrada en cada Proyecto Educativo Institucional. Estos elementos se pueden identificar al menos en dos aspectos básicos: La introducción de los diferentes tipos de pensamientos matemáticos (numérico, espacial, métrico, variacional y estadístico), y el llamado de atención sobre la importancia del desarrollo de unos procesos de aula que permitan el aprendizaje de las matemáticas en contextos significativos para los alumnos, tomando como eje central para dicha contextualización las situaciones problema.

Al introducir el concepto de pensamiento matemático como un eje central sobre el cual estructurar el currículo de matemáticas, se trata de mostrar la importancia del desarrollo centrado en los procesos de conceptualización de los alumnos que los lleven a la construcción de un pensamiento ágil, flexible, con sentido y significado para su vida cotidiana, integrado en unidades complejas que le brinden autonomía intelectual, y sobre todo, que se logre la formación de un ciudadano con una cultura matemática mínima que le permita mejorar su calidad de vida.

De otra parte, la contextualización de los procesos de aula a través de las situaciones problema busca la creación de ambientes de trabajo que sean inteligibles a los alumnos, y que por tanto, la conceptualización que de ellos se derive les sea significativa.

Una situación problema se puede interpretar como:

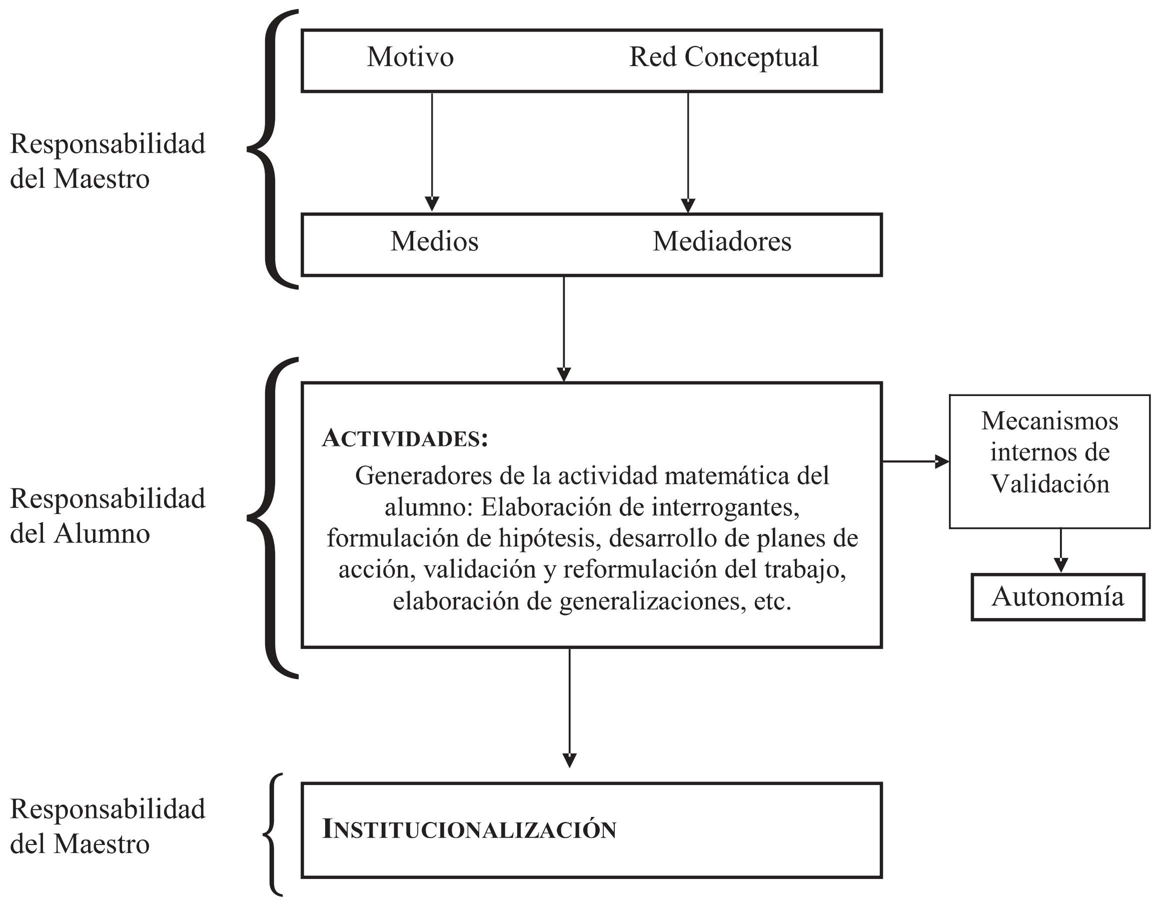
> *contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación.*
>
> *(Múnera, J;, Obando, G, 2003, Pp 183)*

Una situación problema se hace significativa para los alumnos no porque recree ficticiamente, en el aula de clase, una situación de la vida extraescolar. Lo es, si ésta permite que desplieguen su actividad matemática y a través de dicha actividad se logre el aprendizaje de los conceptos que se les querían enseñar. En este sentido, no se trata de aprender matemáticas para luego buscar la posibi-

1 Este documento se puede consultar a través de Internet en la página en el sitio WEB de; Ministerio de Educación nacional: http://www.mineducacion.gov.co/estandares/

lidad de aplicarlas a la solución de problemas aislados, sino de aprender las matemáticas a través de la actividad (matemática) del alumno en proceso de interactuar con un conjunto de situaciones problema.

El diseño de situaciones problema para una clase de matemáticas implica poner en juego una serie de elementos teóricos y metodológicos a través de los cuales se logre el desarrollo de una estructura en la que alumnos y profesores asumen responsabilidades diferentes, pero orientadas a un mismo fin: la construcción conceptual por parte de los alumnos de aquello que se les desea enseñar. Dichos elementos teóricos se pueden resumir en el siguiente esquema (Idem, p 198):



Las situaciones problema, en tanto que integran redes conceptuales, y analizan las herramientas metodológicas a través de las cuales diseñar propuestas de aula, se constituyen en una herramienta importante para la implementación de los estándares básicos de matemáticas. Esta afirmación se entiende mejor si se analizan con cuidado dos hechos fundamentales de la estructura de los estándares.

En primer lugar, porque el grupo de estándares de un determinado pensamiento matemático no puede analizarse aislado de los demás grupos de estándares del resto de pensamientos. Por tanto, una estructura curricular desarrollada sobre su base debe ser integradora de los pensamientos, y esto no puede lograrse si la planeación se realiza por temas con tiempos y espacios específicos a lo largo del año escolar.

En segundo lugar, porque una situación problema en particular, propuesta para una red conceptual determinada, necesariamente implica puntos de contactos con otras redes conceptuales. Esto es, una planeación curricular realizada a través de situaciones problemas no puede aislar una estructura conceptual de las matemáticas como si fuera independiente del resto de las matemáticas existentes.

De otra parte, los estándares básicos de matemáticas recientemente publicados por el MEN, ponen de manifiesto nuevos elementos organizadores del currículo de matemáticas. Por un lado muestran de manera explícita la organización de los pensamientos a partir de una serie de estructuras conceptuales y de procesos propios de cada pensamiento, y de otro, presentan un nuevo eje organizador curricular: el concepto de magnitud y medida se presenta como un eje básico que cruza estructuralmente todos los pensamientos, como se verá a continuación.

SEPARADOR 1

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NÚMERICOS

MARTHA CECILIA QUINTERO MARÍN
Institución Educativa Domingo Savio, Rionegro

RAMÓN ANTONIO QUINTERO MARÍN
Institución Educativa Antonio Donado Camacho, Rionegro

RUBIELA DEL SOCORRO ROJAS ALZATE
Institución Educativa Domingo Savio, Rionegro

FAINORY MORENO CUESTA
Institución Educativa Porcecito, Santo Domingo

GUILLERMO SILVA RESTREPO
Institución Educativa La Milagrosa, Medellín

ANA OFELIA VILLEGAS MÚNERA
Institución Educativa Emiliano García, Girardota

MERCEDES DEL T. ARRUBLA CARMONA
Institución Educativa de Desarrollo Rural Miguel Valencia, Jardín

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

Introducción

Tal como lo expresa el Ministerio de Educación Nacional en su documento sobre los Lineamientos Curriculares en el área de Matemáticas, el desarrollo del Pensamiento Numérico es el nuevo énfasis sobre el cual debe realizarse el estudio de los Sistemas Numéricos. Así, desde el estudio profundo de los Sistemas Numéricos, se pueden desarrollar habilidades para comprender los números, usarlos en métodos cualitativos o cuantitativos, realizar estimaciones y aproximaciones, y en general, para poder utilizarlos como herramientas de comunicación, procesamiento e interpretación de la información en contexto con el fin de fijarse posturas críticas frente a ella, y así participar activamente en la toma de decisiones relevantes para su vida personal o social.

> "…el pensamiento numérico se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones" (McIntosh, 1992, tomado de NCTM, 1989).

En los Estándares Básicos de Matemáticas, publicados por el MEN en el 2003, y en coherencia con los planteamientos de los Lineamientos Curriculares, se propone que el estudio de los números debe hacerse desde el desarrollo del pensamiento numérico. Para ello centra su atención en la comprensión, representación, el uso, el sentido y significado de los números, sus relaciones y operaciones dentro de cada sistema numérico.

En tal sentido, estos estándares, al igual que los estándares pertenecientes a los demás pensamientos están estructurados desde la perspectiva de los procesos, los conceptos y los contextos dentro de los cuales el conocimiento matemático adquiere sentido y significado.

A medida que los alumnos tienen la oportunidad de usar los números y pensar en ellos en contextos significativos, el pensamiento numérico evoluciona a través de los métodos de cálculo (escrito, mental, calculadoras y estimación), de los procesos de estimación y aproximación, y sobre todo, de la construcción conceptual de las operaciones matemáticas de orden aditivo y multiplicativo a partir de la actividad matemática ligada a la solución de problemas. Igualmente se espera que a lo largo de toda la educación básica y media, los alumnos desarrollen paulatinamente procesos descriptivos, explicativos y argumentativos, asociados con los sistemas numéricos, los de numeración y el uso y significado de ambos en contextos científicos y de la vida cotidiana individual.

Detrás de los estándares hay una estructura conceptual que permite identificar tres grandes ejes, a saber:

- Aspectos conceptuales del número.
- Estructuras aritméticas (campo aditivo y campo multiplicativo).
- Numeración y cálculo.

A lo largo de estos tres ejes se desarrolla el pensamiento numérico como un proceso que privilegia los aspectos conceptuales sobre los procedimentales (los algoritmos para efectuar cálculos), rescatando el sentido de lo numérico, la comprensión de las operaciones y relaciones que se pueden desarrollar con los números, y el desarrollo de diversas estrategias de cálculo, estimación y aproximación.

Todo esto está en perfecta consonancia con los planteamientos que sobre el pensamiento numérico se plasman en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

El Pensamiento Numérico y los Sistemas Numéricos están concebidos de tal manera que los estudiantes avancen hacia la construcción del número, su representación, las relaciones que existen entre ellos, así como las operaciones que se efectúan en cada uno de los sistemas numéricos. Permite el aprovechamiento del concepto intuitivo de los números que el niño adquiere desde antes de empezar su proceso escolar, en el momento en que empieza a contar, y a partir del conteo iniciarlo en la comprensión de las operaciones matemáticas, de la proporcionalidad y de las fracciones. Mostrar diferentes estrategias y maneras de obtener un mismo resultado. Cálculo mental. Algoritmos. Uso de los números en estimaciones y aproximaciones. (MEN. Estándares básicos de matemáticas y lenguaje, 2003).

Si tenemos en cuenta las evaluaciones externas que realizan el MEN y el ICFES a través de las Pruebas Saber y de Estado, se crea la necesidad de replantear las prácticas de enseñanza, así como la orientación del aprendizaje de los estudiantes, hacia el desarrollo de las competencias (Saber y saber hacer como individuos competentes). Específicamente, los Estándares del Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos, apuntan hacia el desarrollo de las competencias que se relacionan con la comprensión, uso y significado de los números, operaciones, relaciones, cálculo y estimación.

ESTÁNDARES DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO

En el eje temático del Concepto de Número, se agrupan los estándares que hacen referencia a:

- Los significados que toma el número en contextos tales como la medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros.
- El uso, sentido y significado de los números (sistemas numéricos) en contextos y situaciones de medición.
- La generalización y justificación de propiedades y regularidades de los números con sus operaciones y sus relaciones.
- El uso de las propiedades de las relaciones y operaciones de los números como estrategias en la formulación y resolución de problemas.

Dentro del eje temático de las Estructuras Aritméticas, se incluyen los estándares relacionados con:

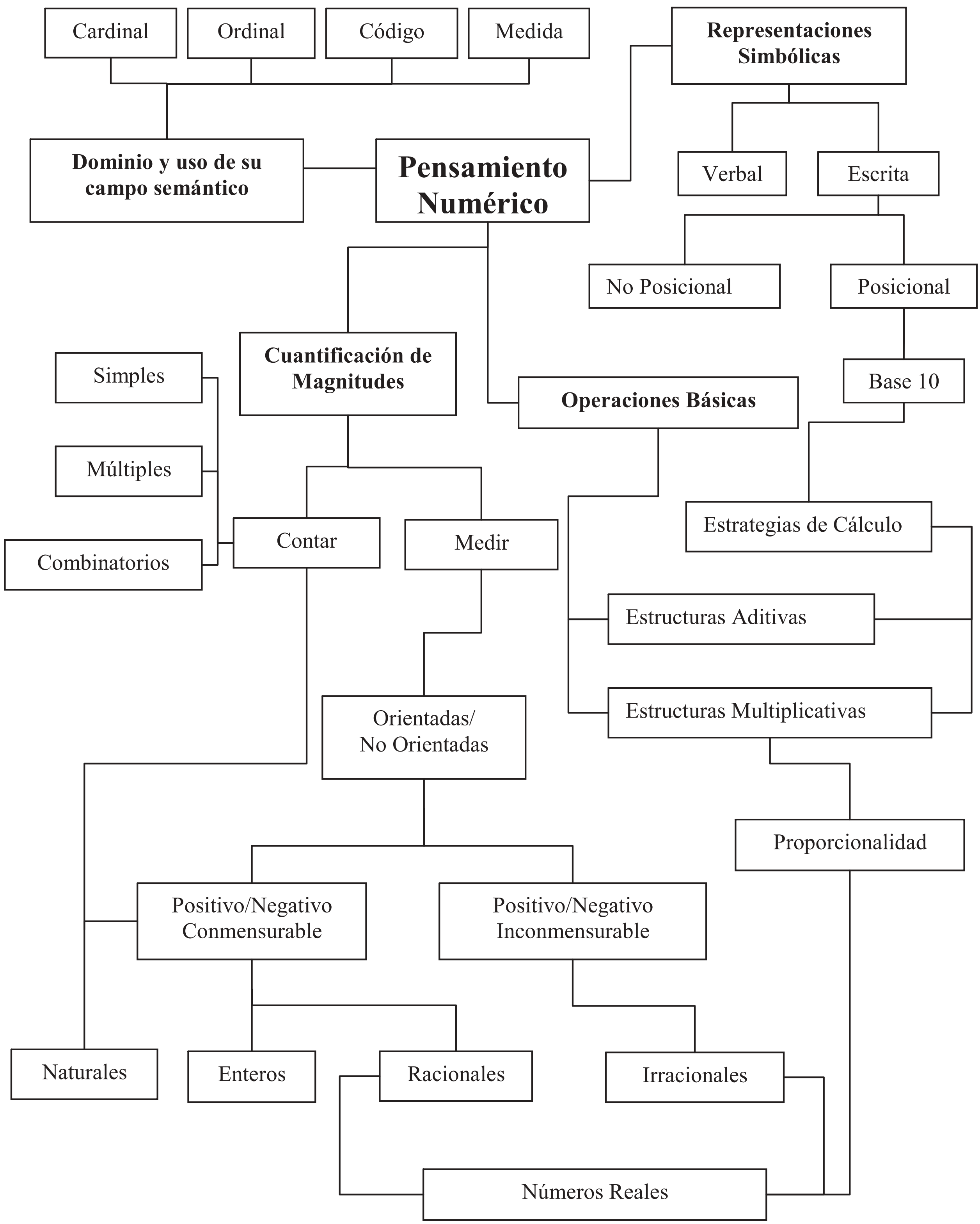
- Comprensión de los aspectos conceptuales de las operaciones con los números.
- Comprensión de las estructuras aditivas (situaciones problemas de composición, transformación, comparación e igualación).
- Comprensión de las estructuras multiplicativas (situaciones problemas de variación y cambio, fundamentalmente de proporcionalidad directa e inversa).

En el eje temático de Numeración y Cálculo, se agrupan los estándares que tienen que ver con:

- Uso, sentido y significado de las representaciones de los números en diferentes contextos y de acuerdo con el sistema numérico que se esté trabajando.
- Estrategias de cálculo (cálculo mental, algoritmos convencionales, instrumentos de cálculo) y estimación en la solución de problemas.

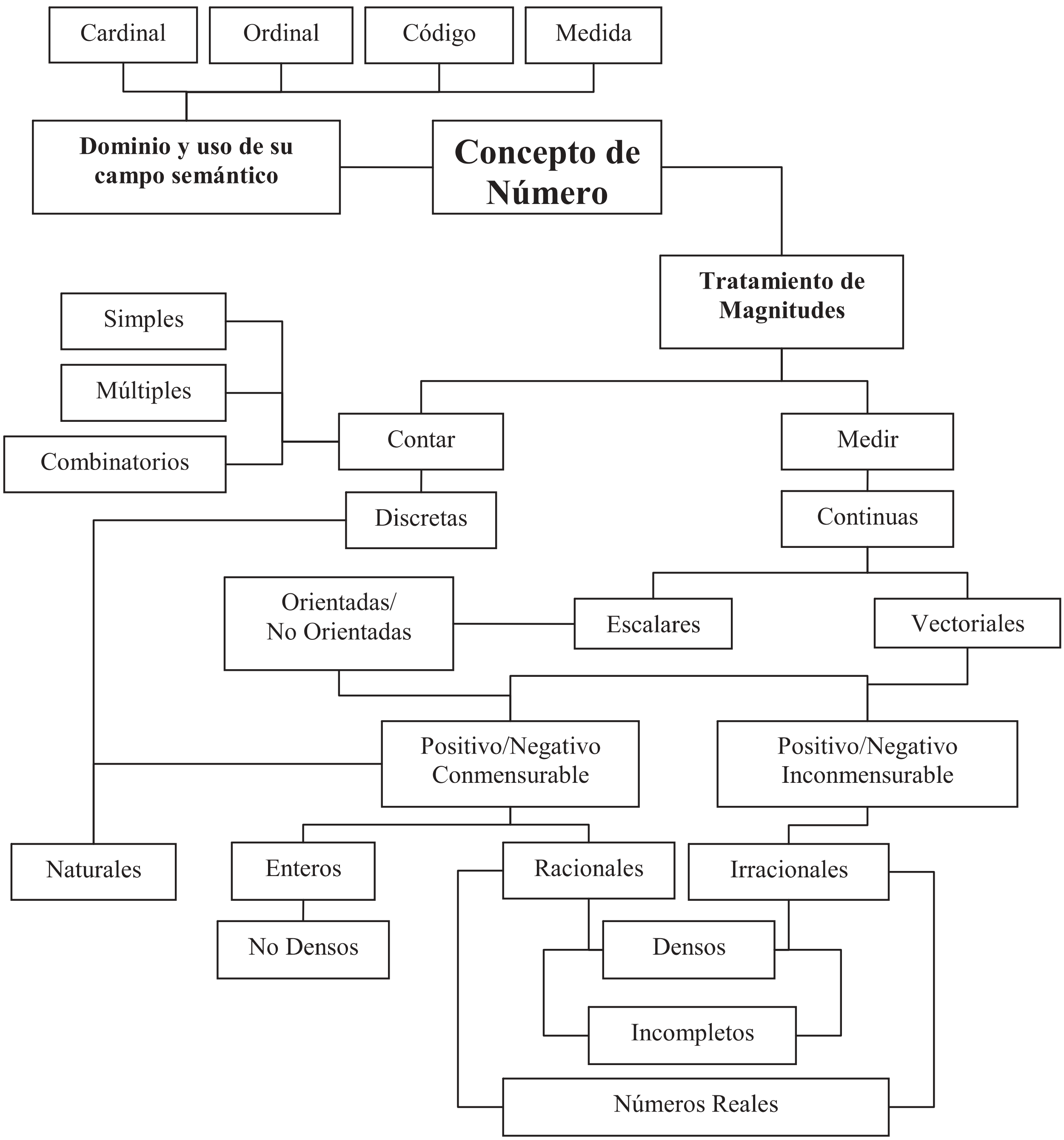
El siguiente esquema muestra de forma general las relaciones conceptuales descritas anteriormente.

En la descripción de cada eje temático, se propone un esquema que muestra en forma general las relaciones conceptuales ya descritas, las cuales serán ampliadas posteriormente.


Cardinal
Ordinal
Código
Medida
Representaciones Simbólicas
Dominio y uso de su campo semántico
Pensamiento Numérico
Verbal
Escrita
No Posicional
Posicional
Base 10
Cuantificación de Magnitudes
Operaciones Básicas
Simples
Múltiples
Combinatorios
Contar
Medir
Estrategias de Cálculo
Estructuras Aditivas
Estructuras Multiplicativas
Orientadas/
No Orientadas
Proporcionalidad
Positivo/Negativo
Conmensurable
Positivo/Negativo
Inconmensurable
Naturales
Enteros
Racionales
Irracionales
Números Reales

EJE TEMÁTICO No.1: CONCEPTO DE NÚMERO

El proceso conceptual a la construcción del concepto de número está asociado, fundamentalmente a dos temáticas: el uso, sentido y significado de los números, y la construcción de los sistemas numéricos, como se puede ver en el siguiente esquema:



La primera de estas temáticas se desarrollar a partir de situaciones cotidianas en las que el número toma diferentes significados:

- ***Cardinal:*** cuando el número describe la cantidad de elementos de una magnitud discreta (por ejemplo, la cantidad de objetos en una colección de lapiceros).

- ***Medidor:*** si el número describe la cantidad de unidades de medida que contiene una magnitud continua (por ejemplo, el volumen de agua consumido por una familia durante el mes).

- ***Ordinal:*** si describe la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y totalmente ordenado (por ejemplo, la posición del número 5, dentro de la secuencia de todos los números naturales indica que éste es mayor que el 4, pero menor que el 6)[2].

- ***Código:*** si se utiliza para distinguir clases de elementos (por ejemplo, en los números de teléfono, en los códigos de barras de los artículos, etc.).

Por su parte, la construcción de los sistemas numéricos toma como punto de partida el trabajo con las magnitudes y sus medidas: la medida de magnitudes continuas, así como el conteo en las magnitudes discretas, son la fuente fenomenológica a través de la cual el concepto de número adquiere sentido. Así pues, el énfasis en el proceso de construcción del concepto de número propuesto en estos estándares no es a partir de la noción de conjunto, sino de la de medida de magnitudes. Esto es, no se trata de aprender el número a través del trabajo con los conjuntos para luego tener la oportunidad de aplicarlos a la solución de situaciones de medición y conteo, sino por el contrario, a través de enfrentarse a las situaciones de medición y conteo se puede lograr el desarrollo de los procesos de conceptualización sobre los números.

- Cuando se debe determinar el tamaño de una magnitud, y esta no es continua, no se habla de medir sino de contar. Se cuenta el número de personas en una reunión, la cantidad de sillas en un aula de clase, el número de animales en un corral, etc. En todos estos casos, el acto de la cuantificación se expresa a través de un número natural. Igualmente, cuando se trata de juntar, extraer, repetir, repartir, comparar dos o más de estas cantidades (matemáticamente hablando, sumar, restar, multiplicar, dividir, ordenar dos o más cantidades), el contar vuelve a ser una vez más el camino para determinar el resultado final[3].

Así pues, la operación de contar es eje central en la construcción de los números naturales. O dicho de otra forma, la construcción del sistema de los números naturales (sus objetos: los números; sus relaciones: de orden y equivalencia; sus operaciones: suma y multiplicación) tiene en el conteo un punto de apoyo fundamental para el desarrollo de su proceso constructivo.

De otra parte, en el caso de medir magnitudes continuas, puede suceder que la unidad de medida utilizada esté contenida un número exacto de veces en la magnitud que se mide, y por tanto, la medida se expresa a partir de un número natural; de lo contrario, la medida debe ser expresada a partir de un número racional. Los niños desde edades muy tempranas se ven enfrentados

2 En conjuntos que no son totalmente ordenados como los racionales, se puede establecer cuando un racional es más grande que otro, pero no se puede determinar una secuencia estricta de sucesión de uno a otro, de tal forma que pueda definir, dado un número racional cual es el inmediatamente menor, o el inmediatamente mayor.

3 Los algoritmos convencionales para calcular el resultado de efectuar una cualquiera de estas operaciones esconde en sus reglas los principios básicos del conteo. Da la impresión de que lo que se hace no es contar, aunque en realidad si se cuenta, sólo que se trata de técnicas sofisticadas de conteo.

cotidianamente a este tipo de situaciones, lo cual les permite la construcción de nociones intuitivas de racionales tales como mitad, cuarta parte, entre otras.

Desde la anterior perspectiva, el número racional será comprendido como la cantidad (número) que expresa la medida de una magnitud con respecto a otra tomada como unidad. Esta medida se puede representar en notación decimal.

Esta óptica de aproximación al número racional contrasta ampliamente con la usualmente utilizada en la escuela ya que el número racional (independientemente de la notación utilizada para representarlo) es una relación cuantitativa entre dos magnitudes, y no la parte sombreada o coloreada de una unidad, ni el nombre de la parte de una unidad que se ha tomado o coloreado de dicha unidad. En la actualidad, el proceso de aprendizaje sobre los racionales inicia con el estudio de las fracciones a partir de actividades típicas centradas en el conteo: partes en que se divide la unidad sobre partes que se toman de las mismas. De esta manera la fracción no es vista como la representación de un número (un número racional), sino como dos números naturales (numerador y denominador) separados por una rayita (vínculo). Por ejemplo, ¾ es comprendida como 3 de las 4 partes en que se dividió la unidad, lo cual dista mucho de la comprensión de ¾ como un número que expresa la relación cuantitativa entre dos magnitudes (¾ sería tres veces ¼ de unidad).

No se trata, por supuesto, de negar el valor de las fracciones como punto nodal en la comprensión del número racional, sino de comprenderlas en el contexto dentro del cual tienen sentido: expresión cuantitativa de una medida, relación cuantitativa entre dos magnitudes. Un trabajo en tal sentido sobre las fracciones debe permitir al menos dos comprensiones básicas cuando se comparan dos magnitudes (conmensurables entre sí):

1. Una cantidad **A** es la n-ésima parte de otra magnitud **B**, si la magnitud **A** está contenida n veces en la magnitud **B** (la magnitud **A** está contenida un número exacto de veces en la magnitud **B**). Esto es, $A = \frac{1}{n} \cdot B$ si y sólo si . $B = n \cdot B$ De esta forma, ¼ no sería una de las cuatro partes en que se divide la unidad, sino la medida de aquella parte de la unidad que estaría contenida cuatro veces en la unidad. Esta noción suena compleja pero es una vía más natural para comprender el sentido y significado de una fracción.

2. Una magnitud **A** es $\frac{m}{n}$ veces la magnitud **B**, si la magnitud **A** es igual a *m* veces la n-ésima parte de **B.** (A= m veces $\frac{1}{n}$ · B), dicho de otra forma, la fracción $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ es, $\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m \text{ sumandos}}$ En este caso, la fracción no unitaria es definida en términos de una composición multiplicativa de fracciones unitarias. Por ejemplo, ¾ sería interpretada como 3 veces ¼ de unidad (nótese la diferencia con la interpretación usual).

Favorecer una interpretación de las fracciones desde la anterior perspectiva permite generar procesos de conceptualización a partir de la medición, y no de la partición y el conteo. Así, la fracción es efectivamente una relación cuantitativa entre dos cantidades (la parte y el todo); además, como relación que es, la fracción ya no es una propiedad o un nombre de la parte, sino que la fracción es el resultado de una comparación. Igualmente, los conceptos de relación de equivalencia, relación de orden y las operaciones básicas se pueden construir a partir de la medición[4].

4 Para una discusión más amplia al respecto ver OBANDO, Gilberto, "la enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo" Revista EMA vol. 8, nº 2, 2003,

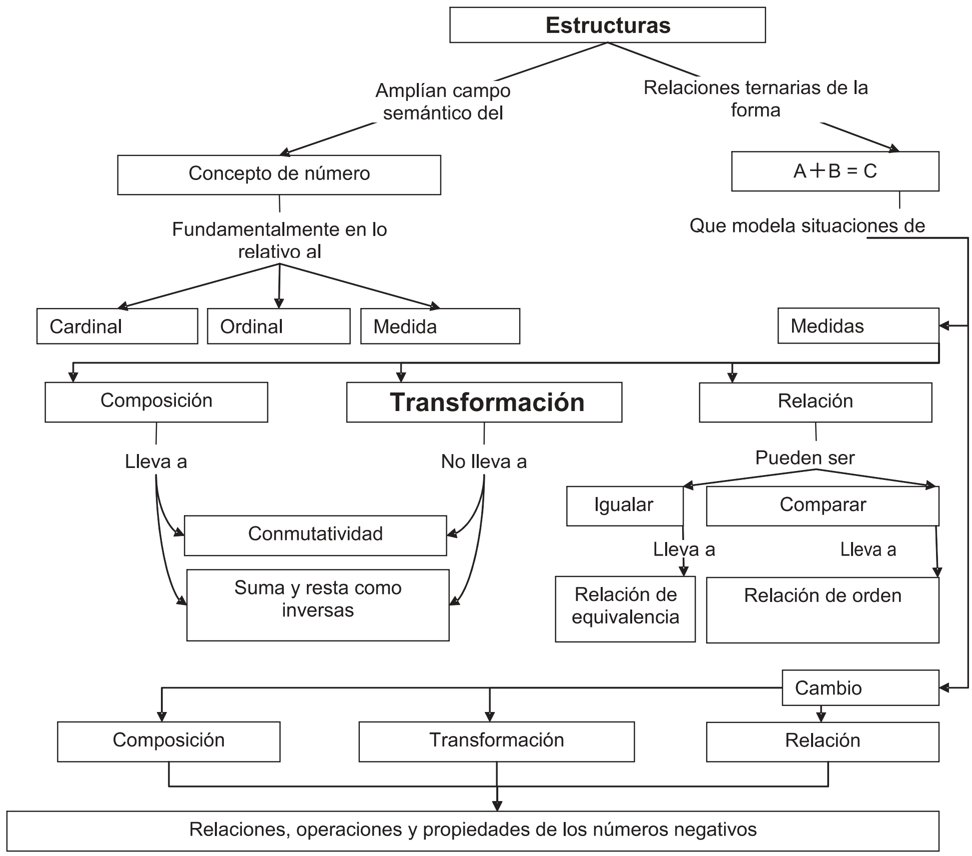
Un trabajo tal sobre los números racionales se abre entonces como una perspectiva diferente para continuar su estudio a partir de situaciones problema que involucren otros sentidos y significados de los mismos. Esto es, dar el paso a situaciones en las cuales el trabajo sobre las magnitudes permita conceptualizaciones relativas a: la proporcionalidad (razones, proporciones, ratas, intereses, etc.), la recta numérica (los racionales como puntos, los racionales como medida de segmentos), y las estructuras algebraicas (densidad e incompletitud, propiedades de campo).

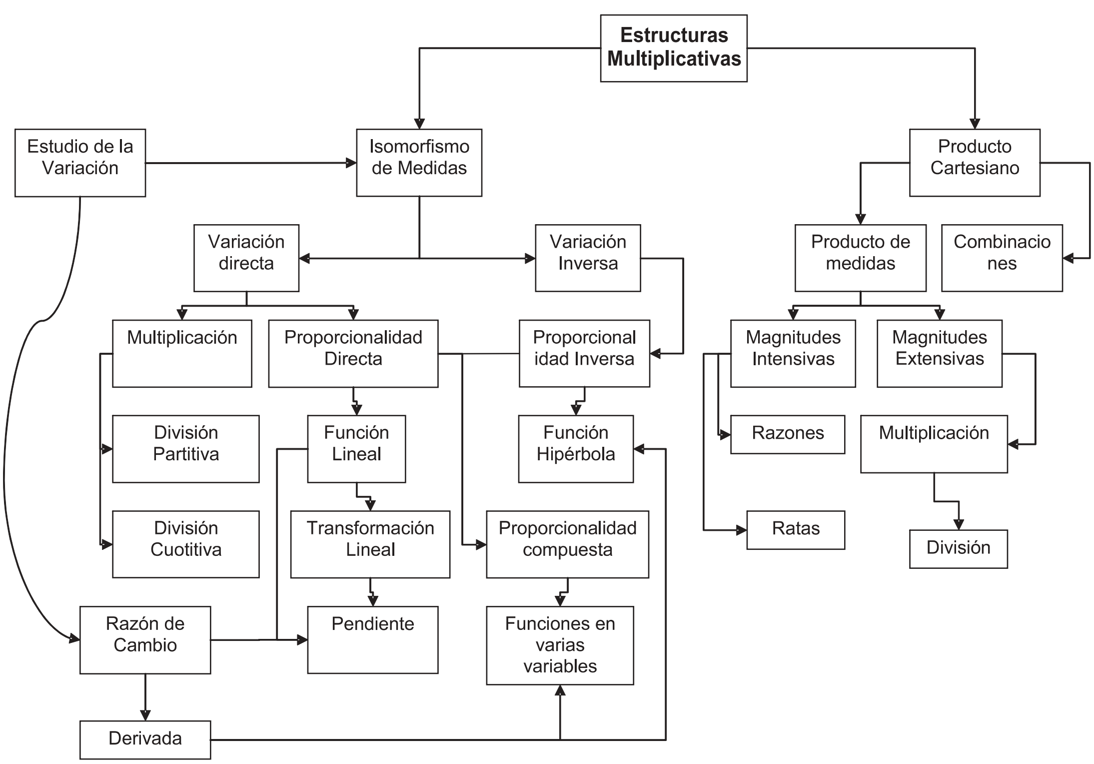
De otra parte, cuando la comparación entre magnitudes determina que una de ellas no puede ser usada como unidad de medida para medir la otra, es decir que ambas magnitudes son inconmensurables entre sí, entonces se llega a los números irracionales. Debido a que en los procesos cotidianos de la medición todas las magnitudes son conmensurables (es decir, en la vida diaria, toda medida arroja un número racional como resultado) y por tanto, la inconmensurabilidad es ante todo un concepto teórico, entonces la comprensión de los números irracionales exige niveles de abstracción relacionados con el pensamiento formal. Esto quizás sea una de las fuentes de dificultad para su aprendizaje.

Finalmente, para el caso de los números negativos, (enteros, racionales o irracionales) la situación es similar. Solo que ahora, se trata o bien de magnitudes en la cuales la medición se puede expresar con respecto a un punto de referencia (como el caso de las altitudes o profundidades con respecto al nivel del mar, la temperatura y el tiempo tomando como referencia el nacimiento de Cristo, etc.), o bien de variaciones en la medida de una magnitud (por ejemplo, aumento o disminución del peso de una persona, cambio en la temperatura de una habitación, variación del precio del dólar en mercado cambiario, etc.). Por lo tanto, lo positivo o negativo del número significa, independiente si es entero o racional, en el primer caso uno de los dos sentidos posibles con respecto al punto de referencia, y en el segundo caso el sentido de la variación (aumento o disminución) en la medida de una magnitud cualquiera.

Además, otro sentido para el caso de los números negativos es el de opuesto aditivo. Este significado, muy ligado a lo expresado en el párrafo anterior, es fundamental en el proceso de comprensión de las operaciones entre números negativos, sobre todo, para el caso de la adición.

EJE TEMÁTICO No.2: ESTRUCTURAS ARITMÉTICAS





La intención de organizar los estándares de este eje temático es potenciar significativamente el trabajo de la suma y la resta, la multiplicación y la división desde la perspectiva de las estructuras. Es decir, mostrar que estas operaciones no existen aisladas entre sí, aisladas de las propiedades matemáticas ni de las situaciones problemas que les dan sentido.

El trabajo que habitualmente la escuela ha venido desarrollando con la suma y la resta se reduce a procesos de cálculo convencionales (mecanización de algoritmos). Este tipo de trabajo no permite una conceptualización profunda del sentido y significado de las operaciones aditivas y multiplicativas. Numerosas investigaciones han mostrado que cuando la enseñanza de las operaciones se centra en el aprendizaje de los algoritmos convencionales, la capacidad de pensar los números, el sentido de lo numérico, se ve seriamente disminuido.

La suma y la resta, impulsadas desde los procesos de la medición permiten en estos estándares el desarrollo de procesos de conceptualización antes que la mecanización de técnicas de cálculo. Igual sucede con la multiplicación y la división.

Según Vergnaud, las estructuras aditivas están conformadas por:

> *el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas. Son de esta forma constitutivos de las estructuras aditivas los conceptos de cardinal y de medida, de transformación temporal por aumentos o disminución (perder o ganar dinero), de relación de comparación cuantificada (tener 3 dulces o 3 años más que), de composición binaria de medidas, (¿cuánto en total?), de composición de transformaciones y de relaciones, de operación unitaria, de inversión, de número natural y de número relativo, de abscisa, de desplazamiento orientado y cuantificado, …(Vergnaud, 1990, p 96 y 97).*

Cualquiera que sea la situación aditiva a la que uno se vea enfrentado, obedece a relaciones ternarias que pueden ser modeladas a través de uno de los seis esquemas elementales, o a una combinación de éstos (para una discusión detallada puede consultarse el texto “Las matemáticas, el niño y la realidad” de Gerard Vergnaud). Los seis esquemas elementales son:

a. Dos medidas se componen para dar lugar a una tercera.

Se trata de dos cantidades **A** y **B** que se unen para dar lugar a una tercera cantidad **C**. Si en el problema se pregunta por la cantidad **A**, la cantidad **B** o la cantidad **C**, se pueden obtener dos tipos de problemas diferentes (ya que preguntar por **A** o por **B** es equivalente), uno de los cuales se soluciona con una resta (aquel en el que se pregunta por **A** o por **B**).

En esta categoría sólo se presentan problemas de suma[5], pues las cantidades **A**, **B** y **C** siempre son positivas.

---

5 Es importante resaltar la diferencia que se establece entre la ecuación del problema, es decir la expresión matemática que representa la relación lógica entre los datos del problema, y la solución del mismo, las cuales no siempre coinciden. Por ejemplo, en el problema “Pedro tiene 5 galletas en una mano, y las junta con las que tiene en el bolsillo. Completa en total 8 galletas. ¿Cuántas galletas tenía en el bolsillo?. Nótese como la ecuación del problema, es decir la que representa su estructura es: $5 + x = 8$, aunque su solución se realice a través de la resta $x = 8 - 5$. Este es un problema de suma, pues esa es su estructura, a pesar de que soluciona con una resta. En otras palabras, un problema es de suma o de resta según su estructura, y no según la operación que lo soluciona. Esta aclaración es válida para las demás categorías.

b. Una transformación opera sobre una medida para dar lugar a otra medida.

En este caso se tiene una cantidad inicial (**A**), la cual sufre una transformación a través del tiempo debido a la acción de un operador (Cantidad **B**), para producir una cantidad final (**C**). La cantidad inicial siempre es positiva y la cantidad **C** siempre mayor o igual que cero. Pero la cantidad **B**, dependiendo del efecto que realice sobre la cantidad **A**, puede ser negativa (si la hace disminuir) o positiva (si la hace aumentar).

Dado que en la estructura del problema el papel lógico de las cantidades **A** y **B** no es idéntico, entonces, si la cantidad **B** es positiva se tienen tres tipos de problemas de suma (cuya solución no siempre es una suma, por ejemplo en el caso que se pregunte por **A**, o por **B**) según se pregunte por las cantidades **A, B**, o **C**. De igual forma se obtendrán tres tipos de problema de resta (como en el caso de la suma, cuya solución no siempre es una resta) si la cantidad **B** es negativa. Por tanto se tiene en total seis problemas.

PROBLEMAS DE TRANSFORMACIÓN

La estructura de estos problemas corresponde a enunciados que relacionan un estado inicial, una transformación y un estado final.

La transformación puede ser de aumento o de disminución.

Algunos enunciados que modelan esta estructura son:

Buscar el estado final, conociendo el estado inicial y la transformación:

Sara tiene 7 cartas, juega una partida con Julio y gana 8. ¿Cuántas cartas tiene ahora?

Buscar la transformación, el estado inicial y el estafo final:

Susana tiene 12 cartas, después de jugar una partida con Federico tiene 10 cartas ¿Ha ganado o ha perdido? ¿Cuántas cartas?

Buscar el estado inicial, conociendo la transformación y el estado final:

Sara tiene 7 cartas jugando con Julio, ahora tiene 3 ¿Cuántas cartas tenía antes de jugar?

c. Una relación une dos medidas.

Estas situaciones se presentan cuando se deben comparar dos cantidades, bien sea para establecer su diferencia (cuanto más tiene la mayor, o cuanto menos tiene la menor), o para igualarlas (agregar a la menor para igualar a la mayor, o quitar a la mayor para igualar a la menor). En la comparación para establecer diferencia se pueden presentar 3 tipos de problemas de suma (cuantos más tiene la mayor) o tres tipos de problemas de resta (cuántos menos tiene la menor). De igual forma en los problemas de igualar se pueden presentar 6 casos. Así, en esta categoría se pueden identificar 12 tipos posibles de problemas.

Manuel acaba de jugar a las canicas. Tenía 24 antes de jugar y ahora tiene 18. ¿Cuántas perdió?

El último censo de mi pueblo asegura que somos 3.546 habitantes, si ha crecido 348 en el último año, ¿Cuántos habitantes tenía hace un año?

José tiene 52 caramelos, 8 menos que María ¿Cuántos tiene María?

d. Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.

En este tipo de problemas, el enunciado no hace referencia a cantidades, sino a operadores, y se trata de la aplicación de dos operadores, de manera sucesiva, a una cantidad. Por ejemplo, el caso de un estudiante que juega dos partidas de bolas, y en la primera pierde 5, mientras que en la segunda gana 3. En total es como si hubiera perdido 2.

Este tipo de problema es equivalente a los de la primera categoría, pero a diferencia de ésta, las tres cantidades pueden ser positivas o negativas, lo cual genera un rango más amplio de posibilidades, 16 en total, dependiendo de los signos de cada una de las cantidades, y del lugar de la incógnita (es decir, de la cantidad por la cual se pregunte)

e. Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.

Al igual que el caso anterior, el enunciado no hace referencia a cantidades, sino a operadores, pero ahora se trata de un operador que se aplica sobre otro operador. Por ejemplo, Juan juega una partida de canicas y gana 5 canicas. Luego juega una segunda partida, y gana tres más de las que ganó en la primera partida. ¿Cuántas ganó en esta segunda partida?. Nótese como el operador +3 es un operador que actúa no sobre la cantidad de bolas que posee Juan, sino sobre el operador +5.

Este tipo de problemas es equivalente a los de la segunda categoría, pero a diferencia de ésta, las tres cantidades pueden ser positivas o negativas, lo cual genera un rango más amplio de posibilidades, 12 en total, dependiendo de los signos de cada una de las cantidades, y del lugar de la incógnita (es decir, de la cantidad por la cual se pregunte).

f. Dos estados relativos se combinan para dar lugar a un estado relativo

Este caso es similar al anterior, sólo que ahora, uno de los operadores no actúa sobre el otro para transformarlo, sino que ellos se combinan para producir un nuevo operador. Por ejemplo, Juan le debe $500 a Pedro, pero Pedro debe $300 a Juan, entonces Juan sólo le queda debiendo $200 a Pedro.

En un marco como el que se acaba de describir, queda claro que el dominio de las estructuras aditivas, implica, entre otros elementos, ser capaz de reconocer cualquier situación que implique sumas o restas a través de los esquemas generales que permiten su tratamiento (*ver en lo particular la expresión de lo general*); reconocer en las diferentes situaciones que impliquen sumas o restas los invariantes conceptuales que hacen que éstas se organicen en grupos o categorías perfectamente diferenciados *(ver lo general a partir de lo particular);* dominar diversas formas de representación de las situaciones problema; y por supuesto, dominar una gran variedad de procedimientos para encontrar las soluciones a las situaciones que se presenten. No sobra recalcar que estos elementos no se presentan aislados unos de otros, sino que, según el tipo de situaciones, se pueden tener diferentes formas de representación, y por ende de solución de la misma.

Pero además de estos esquemas básicos desde los cuales se puede analizar cualquier situación aditiva se deben considerar los contextos dentro de los cuales están inmersos los problemas, pues éstos afectan la representación que uno pueda darse de ellos. Así, son determinantes en el tipo de representación que un alumno construya de una situación, entre otros, los siguientes elementos: el tipo de magnitud (continua o discreta), el conjunto numérico (naturales, racionales, irracionales, etc.), el tamaño de los números (grandes o pequeños, cercanos o distantes), los referentes materiales de la situación (un juego, una actividad comunitaria, etc.), la formulación del enunciado (una sola proposición, una secuencia de proposiciones, etc.), los medios y mediadores de la situación (se utiliza material concreto, gráfico, etc.), por quién se pregunta (por alguno de los sumandos, o por el resultado).

Por ejemplo, en los siguientes tres problemas se puede evidenciar cómo al hacer variar algunos de los elementos antes mencionados, se afecta radicalmente el tipo de representación del problema:

- En una caja hay 12 bolas, de las cuales 9 son rojas y el resto azules. ¿Cuántas bolas azules hay?
- ¿Si de una varilla de hierro que mide 14.795 cm se pintan 9.327 cm de rojo, qué longitud queda por pintar de azul?
- De una varilla de hierro, 19/37 están pintados de rojo y el resto está pintado de azul. ¿Cuánto está pintado de azul?

Nótese como en cada uno de ellos la imagen mental que uno se puede formar es distinta, a pesar de que los tres problemas tienen la misma estructura. Mientras que en el primero al ver las nueve rojas ya se ven las tres azules, en los otros dos esta imagen cambia: no se sabe de inmediato, cuánto mide la parte azul. Es más, en el segundo se ve de inmediato que más de la mitad de la varilla está pintada de rojo, mientras que en el último no es tan obvio.

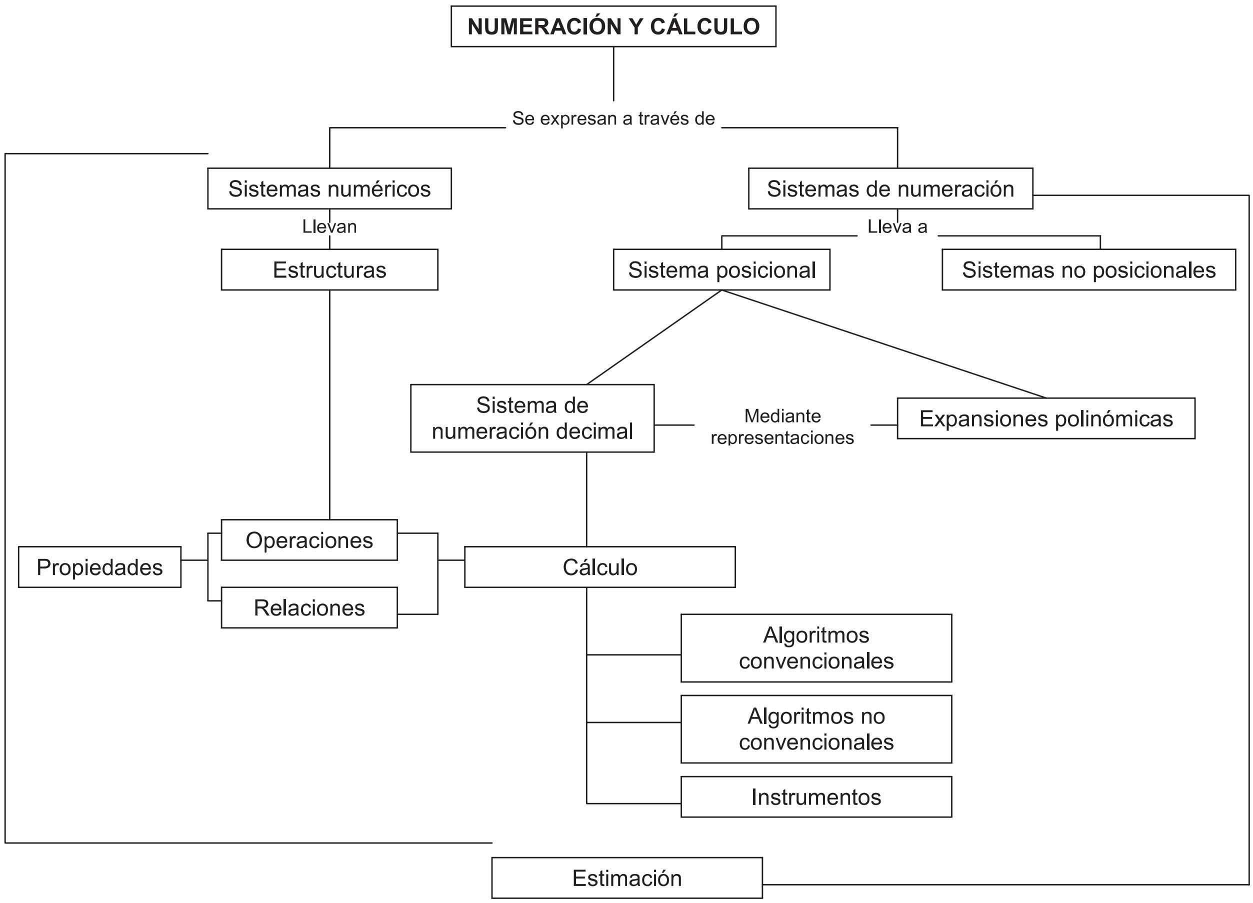
De otra parte, la expresión: “estructuras multiplicativas” hace referencia a todas aquellas situaciones en las cuales se involucren una multiplicación, o una división, o una combinación de ambas operaciones. En palabras de Vergnaud:

> *El campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones: proporción simple y proporción múltiple, función lineal y no-lineal, relación escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicaciones lineales, fracción, razón, número racional, múltiplo divisor, etc. Vergnaud, 1994*

En este sentido, el estudio de las estructuras multiplicativas en la escuela tiene como meta fundamental el desarrollo de lo que podría llamarse el pensamiento proporcional, y por tanto su estudio no puede darse por fuera de la proporcionalidad. En otras palabras el estudio de la multiplicación y la división, separadas de los conceptos básicos de proporcionalidad, no sólo desarticula una unidad conceptual, sino que no permite desarrollar en los alumnos un pensamiento matemático más avanzado.

Cualquier problema de multiplicación o de división, por elemental que éste sea, esconde en su seno una proporcionalidad, la cual en la mayoría de los casos es directa.

EJE TEMÁTICO No.3: NUMERACIÓN Y CÁLCULO



Como eje temático se desarrolla a partir de dos tipos de conceptualización una explícita y otra implícita.

Son explícitos en la formulación de los estándares: **el valor posicional, el efecto de las operaciones sobre los números, las propiedades de los números enteros, la notación decimal, las propiedades de las operaciones con números naturales, el cálculo exacto y aproximado, el uso de instrumentos modernos de cálculo, las diferencias entre racionales e irracionales y la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales.**

Para poder implementar un currículo que tenga en cuenta los anteriores conceptos se impone la necesidad de establecer una jerarquización, que como puede visualizarse en el esquema, permita reconocer los conceptos implícitos y categorizar los contenidos matemáticos facilitando el trabajo de aula o por lo menos planteando algunas sugerencias para su desarrollo.

Los conceptos implícitos son: **los sistemas numéricos y los sistemas de numeración** que requieren de una precisión conceptual, la cual se va logrando en la medida en que se hacen explícitos los contenidos específicos que los sustentan.

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

El conocimiento de los sistemas de numeración remite a un recorrido histórico de la numeración, sus características y las relaciones con la cultura; facilitan la comparación y deben permitir un nivel de apropiación para comparar sistemas diversos y reconocer la economía y "elegancia" del sistema decimal reconocido como uno de los más grandes alcances de la cultura universal en el último milenio.

Una primera clasificación de los sistemas de numeración en **posicionales y no-posicionales,** además de establecer la jerarquización necesaria en este caso, recrea procesos de abstracción y formalización básicos para la matematización y la comunicación.

La estructura sencilla de un sistema numérico se convierte en un incentivo para la creatividad porque el disfrute de los estudiantes en su invención tiene su contraparte cognitiva en una aplicación práctica del concepto de infinito.

Las agrupaciones usadas en un comienzo como estrategia de conteo se convierten en el sistema de numeración en el punto de partida para la generación de unidades que a partir de la interacción dan origen a las bases en los sistemas de numeración. Mientras que la expansión polinómica ejercita la potenciación, ayuda a precisar la diferencia entre número y numeral y generaliza la escritura algebraica tanto en los enteros como en los racionales convirtiéndose en poderosa herramienta para establecer diferencias entre estos últimos y los irracionales.

SISTEMAS NUMÉRICOS

DIVISIÓN DISTRIBUTIVA	**DIVISIÓN RAZÓN**
PARTICIÓN	**CUOTICIÓN**
Tengo 42 colombinas para repartir entre 7 personas.	Tengo 42 colombinas y quiero dar 7 por personas
¿Cuántas para cada uno? (Hart)	¿Para cuántas personas tengo?
¿Cuántos bombones recibe cada una de q personas si se distribuyen d bombones? (Freudenthal)	¿A cuántas personas se les puede dar 7 colombinas si se dispone de 42 colombinas?
Dar a q personas partes iguales de un número o magnitud.	Restar reiteradas veces q de un número o magnitud d.
¿Cuál es la q-ésima parte de d?	¿Cuántas veces cabe q en d?
Preguntar por el tamaño de cada parte.	Preguntar por el número de partes.

PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN

- Razón. (P.e.: “había 5 personas y cada una de ellas tenía 7 manzanas. ¿Cuántas manzanas tenían entre todos”).
- Factor multiplicativo: (P.e.: “Tengo 7 manzanas y tú tienes 5 veces las que yo tengo. ¿Cuántas tienes?”).

ESTIMACIÓN Y CÁLCULO

Tradicionalmente la escuela ha hecho mucho énfasis sobre las técnicas de cálculo y la aplicación de algoritmos convencionales. Desde la promulgación de los Lineamientos Curriculares este énfasis ha decrecido notoriamente y esta versión de los Estándares propone rebasarla completamente. Esto no significa el abandono de ésta práctica básica para los procesos de cuantificación, sino privilegiar el cálculo mental, la estimación y el uso de instrumentos modernos.

El cálculo mental con su poder de anticipación y manejo implícito de las propiedades de las operaciones y la estimación como manifestación del pensamiento numérico se convierten en herramientas que le permiten al sujeto determinar qué procedimiento es más útil y práctico de acuerdo con la situación.

Además son un excelente apoyo para la generación de algoritmos, no convencionales o alternativos que aproximen a los estudiantes a procesos de matematización opuestos al aprendizaje mecánico principal obstáculo para la generación de ideas nuevas.

La estimación implica un pensamiento flexible y un buen conocimiento de los números, sus operaciones, sus propiedades, y sus relaciones. Sowder, 1992, plantea que existen tres procesos claves que caracterizan los buenos estimadores:

La reformulación: es el proceso de alterar datos numéricos para producir una forma más manejable mentalmente pero dejando la estructura del problema intacta.

La traslación: se cambia la estructura matemática del problema a otra mentalmente más manejable.

La compensación: se realizan ajustes que reflejan las variaciones numéricas resultado de la reformulación o traslación realizada.

Los buenos estimadores son individuos que tienen la habilidad de usar los tres procesos, tienen un buen conocimiento de hechos básicos numéricos, del valor de posición, y de las propiedades aritméticas; son hábiles en el cálculo mental; son conscientes y tolerantes del error; y pueden usar y cambiar fácilmente de estrategias. Sowder, 1992

La estimación se constituye entonces en una herramienta de cálculo potente, sobre todo en aquellas situaciones en las que no se necesita un resultado exacto. La estimación también nos permite determinar lo razonable de un cálculo.

Sowder, 1992 afirma que el cálculo por estimación presenta los siguientes componentes.

1. Componentes conceptuales

- El papel de las aproximaciones numéricas

– Reconocer que las aproximaciones numéricas son utilizadas para calcular.
– Identificar una estimación como una aproximación.

- Múltiples procesos / Múltiples respuestas.

– Aceptar la existencia de más de un proceso para obtener una aproximación.
– Admitir más de un valor en una estimación.

- Lo más apropiado

– Reconocer que lo más apropiado de un procedimiento depende del contexto.
– La estimación depende de las decisiones que se tomen.

2. Componente de habilidades

- Procesos.

- Reformulación: cambio del número utilizado en el cálculo.

- Redondear.

- Truncar.

- Promediar.

- Cambiar la forma de los números.

- Compensación: Hacer ajustes durante o después del cálculo.

- Traslación: cambiar la estructura del problema.

- Respuestas: determinar el correcto orden de magnitud de la respuesta.

Determinar un rango aceptable para la estimación.

- Relaciones entre conceptos y habilidades.

– Habilidad para trabajar con potencias de 10.
– Conocimiento del valor de posición de los números.
– Habilidad para comparar números por su tamaño.
– Habilidad para calcular mentalmente.

- Conocimiento de hechos básicos.

– Conocimiento de las propiedades de las operaciones y uso apropiado de ellas
– Reconocer que la modificación de los números cambia la respuesta del cálculo.

3. Componente afectivo

- Confianza en su habilidad para hacer matemáticas

- Confianza en su habilidad para estimar

- Tolerancia para el error

Reconocer el poder de la estimación

Finalmente insistimos sobre la gran importancia del uso de la calculadora y otros medios tecnológicos que liberen a los niños y jóvenes de procedimientos tediosos y poco productivos.

Con un uso inteligente los medios modernos de computación se convierten en una fuente inagotable para desarrollar el pensamiento lógico matemático, descubrir importantes regularidades entre los números y facilitar un manejo lúdico de las operaciones.

ORGANIZACIÓN DE LOS ESTÁNDARES BÁSICOS DE MATEMÁTICA DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO POR EJES TEMÁTICOS Y GRUPOS DE GRADOS

Grados Ejes temáticos	1º a 3º	4º a 5º	6º a 7º	8º a 9º	10º a 11º
Concepto de número	1. Reconocer significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros). 2. Describir, comparar y cuantificar situaciones con diversas representaciones de los números, en diferentes contextos. 3. Usar los números para describir situaciones de medida con respecto a un punto de referencia (altura, profundidad con respecto al nivel del mar, pérdidas, ganancias, temperatura etc.) 4. Describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes.	1. Interpretar las fracciones en diferentes contextos:- Situaciones de medición - razones y proporciones. 2. Analizar y explicar las distintas representaciones de un mismo número (naturales, fracciones, decimales, porcentajes)	1. Utilizar números (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida	1. Utilizar números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.	5. Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. 1. Analizar representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales. 2. Reconocer la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.

Grados Ejes temáticos	1º a 3º	4º a 5º	6º a 7º	8º a 9º	10º a 11º
Estructuras aritméticas	8 Usar diferentes estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental y de estimación, para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. 9. Usar la estimación para establecer soluciones razonables acordes con los datos del problema. 11. Resolver y formular problemas aditivos de composición y transformación. 12. Resolver y formular problemas de proporcionalidad directa (mercancías y sus precios, niños y repartos igualitarios de golosinas, ampliación de una foto)	9. Usar diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas 5. Resolver y formular problemas aditivos de composición, transformación, comparación e igualación. 6. Resolver y formular problemas de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas. 8. Modelar situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa. 7. Reconocer la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.	11. Justificar la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas. 9. Justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas. 8. Justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. 7. Resolver y formular problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.	2. Simplificar cálculos usando relaciones inversas entre operaciones. 4. Identificar la potenciación y la radicación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas.	

Grados Ejes temáticos	1º a 3º	4º a 5º	6º a 7º	8º a 9º	10º a 11º
Numeración y cálculo	5. Usar representaciones –principalmente concretas y pictóricas- para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal. 7. Reconocer las relaciones y propiedades de los números (ser par, ser impar, ser múltiplo de, ser divisible por, asociativa, etc.)	3. Utilizar la notación decimal para expresar las fracciones en diferentes contextos. 11. Justificar regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones utilizando calculadoras o computadores.	2. Justificar la representación polinomial de los números racionales utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal. 3. Generalizar propiedades y relaciones de los números naturales (ser par, impar, múltiplo de, divisible por, conmutativa, etc.).	3. Utilizar la notación científica para representar cantidades y medidas.	4. Utilizar argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales 3. Comparar y contrastar las propiedades de los números (enteros, racionales, reales) sus relaciones y operaciones (sistemas numéricos).

Grados Ejes temáticos	1º a 3º	4º a 5º	6º a 7º	8º a 9º	10º a 11º
Numeración y cálculo	10. Identificar regularidades y propiedades de los números mediante diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.). 6. Reconocer el efecto que tienen las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) sobre los números.	4. Resolver y formular problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones. 10. Identificar, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.	5. Justificar operaciones aritméticas utilizando las Relaciones y propiedades de las operaciones. 10. Hacer conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores. 4. Resolver y formular problemas utilizando propiedades fundamentales de la teoría de Números.		

ILUSTRACIÓN DE UNA SITUACIÓN PROBLEMA

La presente situación problema, se pensó con el objeto de enfrentar a los estudiantes con el desarrollo de actividades prácticas que conduzcan a dinamizar la construcción de conceptos como:

- Los números con diferentes significados y en diferentes contextos.
- La estimación y el cálculo.
- Resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Elementos combinatorios, tablas, diagramas arbóreos, situaciones de conteo.
- Proporcionalidad directa.

La situación problema que hemos denominado “El Torneo”, se dividió en cinco situaciones que tienen por objeto, además de ilustrar algunos estándares de 1° a 7° grado del pensamiento numérico, muestran la estrecha relación entre este pensamiento y los otros cuatro (pensamiento métrico, espacial, aleatorio y variacional).

La propuesta que se desarrolla a continuación inicia con una guía para el maestro, que pretende sugerir pasos o actividades a seguir en su orientación e intervención con los estudiantes. Igualmente la guía para el alumno, trata de sugerir algunas actividades que estimulan el trabajo en clase.

Las actividades propuestas se pueden adaptar de acuerdo al grado y a los conocimientos que tienen o van a lograr los estudiantes.

EL TORNEO

MOMENTO UNO: Representa un campo deportivo.
MOMENTO DOS: Organiza el torneo.
MOMENTO TRES: Representa la información sobre uniformes e implementos deportivos.
MOMENTO CUATRO: Organiza el presupuesto del torneo.
MOMENTO CINCO: Elabora el informe de los resultados del torneo.

GUÍA DEL PROFESOR

La presente situación problema parte de la idea de realizar un torneo de fútbol (usted puede de acuerdo con los intereses y recursos disponibles, proponer otro deporte).

Esta situación se ha diseñado con una guía para el alumno que comprende varias etapas en las que el maestro hará su intervención pedagógica en el momento oportuno y cuando el alumno lo requiera.

EL MOMENTO UNO: Corresponde a la representación del campo deportivo.

Pretende introducir al alumno en el concepto de proporcionalidad, el cual se logra cuando realiza la representación, toma las medidas en la cancha, vuelve y representa el campo con las medidas tomadas, eligiendo una equivalencia entre las longitudes del campo real con el de la representación (por ejemplo: 1:3) 3 metros en la realidad equivalen a la longitud del lado del cuadrado de la cuadrícula del cuaderno, de esta manera compara las medidas utilizadas por él y las reales (concepto de relación y uso del número como medida).

El maestro orientará a través de preguntas como:

¿Si la medida real del largo del campo son 96 metros, cómo podríamos representar los 96 metros de largo de manera que haya una correspondencia entre la medida real del dibujo a realizar en el cuaderno?

¿Cómo elegimos una medida equivalente entre las medidas reales tomadas en la cancha y las medidas a utilizar para representar dichas longitudes en el cuaderno?

Otras actividades que se pueden sugerir en la intervención son:

- Vamos al campo deportivo, tome y registre cada una de las medidas.
- Haga una representación del campo deportivo.
- Compare su trabajo con otros compañeros.
- ¿Qué relación tienen las medidas representadas en el cuaderno con las medidas reales del campo deportivo?
- Compare las medidas de la representación con el campo deportivo (halle equivalencias). Consulte y compare con las medidas reglamentarias.

Es de anotar, que las propuestas anteriores no constituyen una guía que limiten al estudiante, sino por el contrario, le abre espacios para que sea protagonista de construcción de los conceptos.

Las actividades y resultados del alumno se constituyen en un marco de referencia para la ampliación que posteriormente el maestro realizará con el alumno.

Conforme a lo antes expuesto, la tarea del maestro no se limita a explicar y aclarar dudas, sino a motivar para que el alumno resuelva situaciones y tome las decisiones que lo lleve a la construcción de nuevos aprendizajes, lo cual valida el quehacer del docente.

El éxito de esta actividad compromete al maestro a involucrar otros saberes en el proceso, en este caso, todos los aspectos relacionados con la organización de un evento deportivo. Esto se logra consultando la bibliografía pertinente o a un docente del área de educación física.

NOTA: La situación uno se relaciona con los estándares que llevan a la construcción de conceptos como:

- El número como medida.
- Proporcionalidad.
- Escalas.
- Figuras geométricas.
- Perímetros, áreas.
- Tablas de valor posicional y conversión de unidades de longitud y área.

EL MOMENTO DOS: Relacionada con la organización del torneo, posibilita resolver problemas que tienen que ver con el conteo y los procesos combinatorios desde lo numérico.

Organizando con el número de alumnos del grupo:

- La conformación de equipos, árbitros, planilleros, entrenadores.
- Modalidad que se adoptaría (Fixture: todos contra todos. Mixta: todos contra todos y eliminación directa).
- Elaboración del reglamento específico de acuerdo con el contexto,
- Organización del calendario del torneo hasta los partidos finales.
- Elaboración del gráfico de la modalidad seleccionada.
- Tabla de resultados y posiciones según modalidad.
- Tabla de la eliminatoria según modalidad.
- Partidos que se realizarán.

Esta situación se relaciona con los estándares y conceptos que tienen que ver con:

- El número como cardinal.
- Diagramas de árbol.
- Tablas de datos.
- Combinatoria.

EL MOMENTO TRES: Corresponde a la parte logística de la organización del torneo, la cual introduce al alumno en el desarrollo de las estructuras aditivas y multiplicativas.

Para que el alumno llegue a representar la información de uniformes e implementos deportivos, las preguntas que el maestro podría hacer son:

- ¿Qué uniformes se van a utilizar?
- Recoge información a cada integrante de equipo sobre talla de camiseta, pantaloneta, medias, tenis y edad.
- Represente en un gráfico las cantidades y costos.

Para orientar mejor hacia las estructuras aditivas y multiplicativas se pueden plantear problemas como:

- Si cada equipo cuenta con dos uniformes, ¿Cuántas camisetas, pantalonetas, medias y tenis se necesitan para el torneo?
- ¿Qué factores se tienen en cuenta para establecer las tallas?
- Si las edades de los integrantes de los equipos oscilan entre 10 y 14 años y las tallas son 6 unidades más que la edad de cada uno, ¿Qué tallas tendrán las camisetas y pantalonetas de los uniformes?
- ¿Si a cada alumno se le dan dos uniformes, cuántas camisetas y pantalonetas se compran de cada talla?
- ¿Cuál es el costo por integrante?
- ¿Cuál es el costo total?

Esta situación se relaciona con los estándares que llevan a la construcción de conceptos, así como:

- El número como etiqueta y como cardinal.
- Adición y multiplicación.
- Tabla de doble entrada.
- Recolección y organización de datos.
- Diagramas de barras.

EL MOMENTO CUATRO: Corresponde al presupuesto del torneo. Es otro ejemplo para ver mejor las aplicaciones y usos de las estructuras aditivas y multiplicativas.

El alumno, por iniciativa propia o por las orientaciones del maestro realizaría las siguientes actividades:

- ¿Cuántas boletas se van a vender?
- ¿Qué precio tiene por persona?
- ¿Cuánto dinero se recolectará?
- ¿Qué gastos se van a cubrir?
- ¿Sobra o falta dinero?
- Hacer el informe de presupuesto mostrando ingresos, gastos y saldo.
- Recortar del periódico las estadísticas deportivas de tres fechas diferentes.
- Realizar comparaciones en cuanto a rendimiento deportivo, ingreso por taquillas, número de hinchas por equipo.
- Continuidad de los jugadores y árbitros. Su rendimiento (calificaciones).

También se pueden retomar los procesos combinatorios a través de los siguientes cuestionamiento:

Con los números del 0 al 9:

- ¿Cuántos números de dos cifras se pueden obtener?
- ¿Cuántos números de tres cifras se pueden obtener?
- ¿Cuántos números pares de dos cifras se pueden obtener?
- ¿Cuántos números impares de dos cifras se pueden obtener?
- ¿Cuántos números pares de tres cifras se pueden obtener?
- ¿Cuántos números impares de tres cifras se pueden obtener?

Los estándares se relacionan con conceptos como:

- Estructuras aditivas y multiplicativas.
- Combinatoria.
- Estimación y cálculo.
- Conteo.
- Uso del número como cardinal.

EL MOMENTO CINCO: Corresponde a la presentación de los informes del resultado del torneo. Es un ejemplo para desarrollar conceptos estadísticos estrechamente relacionados con los estándares del Pensamiento Numérico.

Las actividades que se pueden realizar son:

- Elaborar un diagrama de árbol en el informe de las eliminatorias.
- Organizar en una tabla los datos relacionados con las faltas cometidas durante el torneo.

- Hacer el resumen de los partidos ganados y perdidos, puntajes y puestos de cada equipo.

Otras actividades complementarias:

- Organizar una “polla” con los partidos finales.
- ¿De cuántas maneras se podría jugar la final?
- Elaborar el informe de goles: promedio de goles por partido, marcador que más se presentó, goles a favor, goles en contra y gol diferencia. Presentar este informe en un diagrama de barras

Los estándares se relacionan con conceptos como:

- Diagramas de árbol.
- Tablas y cuadros estadísticos.
- Frecuencia.
- Media aritmética.
- Moda.
- Probabilidad.

GUÍA DEL ALUMNO

MOMENTO UNO: REPRESENTEMOS EL CAMPO DEPORTIVO

ACTIVIDADES

1. Diálogo sobre sus preferencias deportivas

   ¿Qué es el deporte y cuáles conoces?
   ¿Cuál deporte practicas?
   ¿Qué entiendes por deporte de salón y de campo?
   Generalmente en deporte se habla de torneo
   ¿Qué entiendes por torneo?

Si realizamos un torneo, ¿Cuál deporte escogerías?
¿Qué entiendes por deporte individual y de conjunto?

2. Para realizar el torneo necesitamos un campo deportivo; haz un dibujo de éste.

- Visita un campo deportivo y toma medidas de cada uno de los lados de sus zonas.

- Haz un dibujo del campo deportivo, teniendo en cuenta las medidas tomadas.

- Comparar y corregir el primer dibujo realizado, teniendo en cuenta los conceptos de escala y proporción.

3. Señala las medidas de cada una de las longitudes de las zonas del campo deportivo.

- Dibuja de nuevo el campo deportivo y pinta con colores diferentes las longitudes de los lados de cada región especificando sus medidas.

- Suma las longitudes de los lados de cada región.

- Si lo que ha hecho es hallar el perímetro de cada región y del campo deportivo ¿Qué es perímetro?

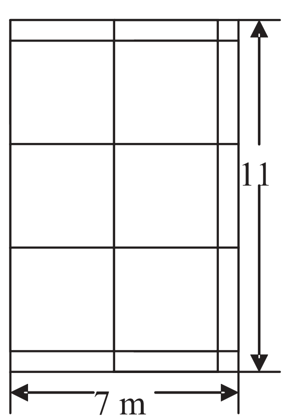
4. Cada equipo selecciona la unidad cuadrada a utilizar.

Ejemplo: Si la escala usada para la representación fue de 1:3 entonces la unidad cuadrada es un cuadrado de lado 3.

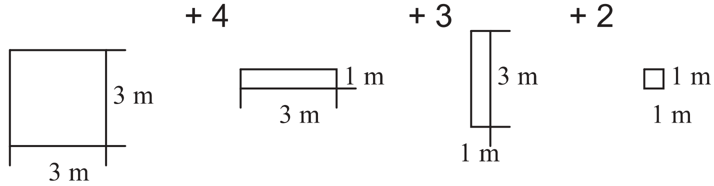
Compara la unidad seleccionada con cada región.

- ¿Cuántas veces cabe la unidad en cada una de ellas?
- ¿Cuántas unidades cuadradas hay por columna? ¿En todas las columnas?
- ¿Cuántas unidades cuadradas hay por filas? ¿En todas las filas?
- Escribe las sumas correspondientes. ¿Puedes expresar estas sumas como productos? ¿Qué concluyes?

Ejemplo: Halla el área de la zona de defensa (Azd).



1) Azd = 6 + 4 + 3 + 2



Azd = 6 (3 m x 3 m) + 4 (3 m x 1 m) + 3 (1 m x 3 m) + 2 (1 m x 1 m)
Azd = 6 (9 m^2) + 4 (3 m^2) + 3 (3 m^2) + 2 (1 m^2)
Azd = 54 m^2 + 12 m^2 + 9 m^2 + 2 m^2
Azd = 77 m^2

2) Azd = axL
Azd = 11 m x 7 m
Azd = 77 m^2

Actividades complementarias

5. Construcción de tabla posicional de las unidades de: longitud, peso, área, volumen, capacidad resaltando prefijos y equivalencias en potencias de 10.

6. Desarrollo de un taller de aplicación con los temas relacionados a través de las actividades de la situación.

¿Para qué te sirvieron los números en esta actividad?

MOMENTO DOS: VAMOS A ORGANIZAR UN TORNEO

1. Hagamos una votación secreta sobre el deporte preferido entre los integrantes del grupo.

2. Dos alumnos hacen el escrutinio escribiendo los deportes y el número de votos en el tablero.

3. Hacer en el cuaderno un diagrama de barras y una tabla de frecuencias con el resultado de la votación y responder estas preguntas:

- ¿Cuál fue el deporte con mayor número de votantes?
- ¿Cuál fue el deporte con menor número de votantes?
- ¿Cuáles deportes tuvieron igual número de votantes?
- ¿Cuál fue el total de votantes?

4. Para iniciar la organización del torneo, escoger el deporte con mayor número de votantes. Hacer 4 grupos y decidir:

- De acuerdo con el número de estudiantes en el grupo, cómo conformar equipos, árbitros, planilleros y entrenadores.
- En una plenaria del grupo, elegir la distribución más conveniente y dar nombres a los equipos.
- Para organizar la programación de los partidos hasta el final, escoger la modalidad que se adoptará y la presentarán en una gráfica.
- Mostrar en una tabla la programación de los partidos que se van a realizar incluyendo los espacios para los resultados de las eliminatorias.
- Si son cinco equipos, ¿Cuántos partidos resultarán sin que se repitan encuentros?

¿Para qué sirvieron los números en esta actividad?

MOMENTO TRES:
INFORMACIÓN SOBRE UNIFORMES E IMPLEMENTOS DEPORTIVOS

1. Cada equipo se reúne y decide qué uniforme va a utilizar en el desarrollo del torneo. También, asigna los números para marcar las camisetas. Luego pasa un informe sobre la cantidad de camisetas, pantalonetas, medias, etc. especificando tallas. Elabora una o dos tablas de entrada para mostrar estos datos.

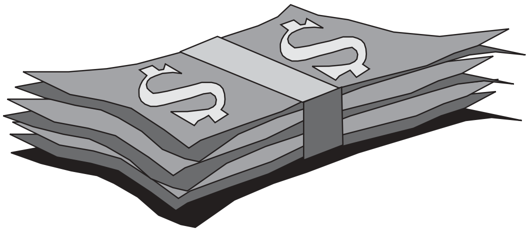
Sugerencia: Mostrar en una tabla los promedios por peso, talla y edad de los jugadores.

2. Cada equipo: averiguar o solicitar cotizaciones sobre el costo de la confección de los uniformes. Mostrar en un cuadro cantidades, costo por unidad y el valor total.
3. Realizar el cálculo del costo de uniformes por alumno y por equipo.
4. Hacer cuentas de los costos de otros implementos a utilizar en el torneo: balones, árbitros, planillas, etc.

¿Para qué sirven los números en esta actividad?

MOMENTO CUATRO: APLICACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS ARITMÉTICAS

PRESUPUESTO DEL TORNEO
Para la financiación del torneo se planea con los alumnos cobrar la entrada a los partidos a través de una venta de boletas.



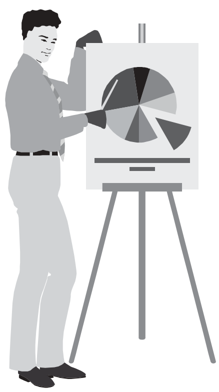
1. Si se invita a todos los estudiantes de la institución ¿Cuántas boletas se van a timbrar o vender? ¿Qué precio tendrá cada una? ¿Cuánto dinero se recolectará?

2. Hacer una lista de los gastos que se van a dar en el torneo ¿Sobrará o faltará dinero?

3. Elaborar el plan de presupuesto especificando posibles ingresos, gastos, saldo.

4. Mostrar en diagramas qué van a llevar las boletas de la entrada a los partidos.

¿Para qué te sirvieron los números en esta actividad?



MOMENTO CINCO: RESULTADOS DEL TORNEO

1. Para recoger los resultados de la eliminatoria, con base en la tabla de programación de los partidos, mostrar en un diagrama de árbol las eliminatorias del torneo hasta los partidos finales.

2. Busco en planillas la información sobre las amonestaciones en los partidos; elaborar una tabla que resuma esta información.

3. Para cada equipo, mostrar en tablas: partidos ganados, partidos perdidos, partidos empatados, goles a favor y goles en contra, puntajes y puestos.

4. De acuerdo con la información de los puntos 1, 2 y 3, responder las preguntas:

- ¿De cuántas maneras diferentes se podría jugar la final?
- ¿Cuántas posibilidades tiene un equipo de ganar un partido?
- Si se presenta un empate, ¿cómo definir?
- ¿Cuál fue la amonestación que más se cometió en el torneo?
- ¿Cuál es el promedio de amonestaciones por partido?
- Mostrar en una tabla y en un gráfico el número de tarjetas rojas, tarjetas amarillas y expulsiones por equipos.

RECOMENDACIÓN

Las actividades de la guía del alumno, pueden afianzarse con las actividades complementarias propuestas en la situación 3, 4 y 5 respectivamente.

¿Para qué sirvieron los números en esta actividad?

BIBLIOGRAFÍA

CASTRO, Encarnación y Otro. Estructuras Aritméticas Elementales y su Modelación. Grupo. 1995

CHAMORRO. María del Carmen. Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Editorial Prentice Hall. Madrid. 2003

DOCUMENTO DEL MEN. Estándares Básicos de Matemáticas y de Lenguaje. Mayo 2003.

Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Ministerio de Educación Nacional. Cooperativa Editorial Magisterio.

PUIG, Luis y Otros. Problemas Aritméticos Escolares. Síntesis S.A. 1995.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds), Acquisitions of mathematics concepts and processes. 127 – 174. London: Academy Press.

SEPARADOR 2

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

John Jairo Múnera Córdoba
I.E. Pedro Luis Alvarez Correa (Municipio de Caldas)

Arsenio De Jesús Marín Correa
I.E.R. El Rodeo (Municipio de Sopetrán)

Marisol Cárdenas Valle
I.E. José María Villa (Municipio de Sopetrán)

Beatriz Alejandra Carvajal Muñoz
I.E. José María Córdoba (Municipio de El Santuario)

Manuel Arcángel Bastidas Bedoya
I.E. Escuela Normal Superior Señor de Los Milagros (Municipio de San Pedro)

Febrero de 2005

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRÁICOS Y ANALÍTICOS

INTRODUCCIÓN

Los lineamientos curriculares (MEN, 1998) permiten interpretar una nueva manera de reorganizar todos aquellos contenidos que se han constituido en los desarrollos curriculares para el área de las matemáticas en los grados 8º y 9º, tradicionalmente, etiquetados con el nombre de álgebra. Por lo tanto es importante acercarnos a la comprensión del pensamiento variacional al interior de los sistemas algebraicos y analíticos. Sólo así podemos continuar comprendiendo el porqué de la necesidad de una propuesta curricular que mejore los desempeños de nuestros estudiantes en lo relativo al álgebra escolar.

El pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático de la variación y el cambio. En este sentido, "el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad" (Vasco, 2003). Así pues, dicha forma de comprender el pensamiento variacional, el carácter estático de la presentación de los objetos matemáticos en un curso normal de álgebra[2] se constituye en el punto de llegada de un camino iniciado con el estudio y modelación de situaciones de variación. Esto es, a partir del análisis matemático de contextos de las matemáticas, desde las ciencias, desde la vida cotidiana, etc., en los cuales se puedan modelar procesos de variación entre variables, se abre un camino fructífero para el desarrollo de los procesos de pensamiento matemático ligados al álgebra, las funciones y el cálculo.

Vincular las condiciones de contexto en donde las situaciones de cambio sean el ingrediente primordial en la actividad matemática del estudiante permite ver que el desarrollo de pensamiento algebraico deja de ser exclusivo de los grados 8º y 9º, y que por el contrario, debe movilizarse a lo largo de todo el ciclo escolar, desde el grado 1º al grado 11º, tal como se propone desde los Estándares Básicos de Matemáticas (MEN, 2003).

Pero además, el estudio del álgebra escolar al lado de los procesos de variación permite ver que este tipo de pensamiento involucra los otros tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico y estadístico. Esto, al menos por dos razones: de un lado, su estudio como parte de un proceso de búsqueda de una versión cada vez más general y abstracta del conocimiento implica el reconocimiento de estructuras invariantes en medio de la variación y cambio; y de otro lado, todos ellos

2 tales como la definición de una función, la manipulación de expresiones algebraicas, el trazado de gráficas a partir de su expresión simbólica, la manipulación de fórmulas para reemplazar valores en ellas,

ofrecen herramientas para modelar situaciones a través de las funciones como resultado de la cuantificación de la variación.

En adelante, con base en la interpretación de los estándares curriculares, se presenta una propuesta de reorganización de los mismos para el desarrollo del pensamiento variacional, en el ciclo escolar de primero a undécimo. Para ello, presentamos una estructura conceptual que sirva de orientación en el desarrollo del currículo de la educación básica y media. Ésta aparece organizada en tres ejes temáticos, en los que, creemos se recogen los diferentes estándares por grupos de grados. Estos ejes temáticos son: patrones y regularidades, procesos algebraicos y análisis de funciones.

1. PATRONES Y REGULARIDADES:

Luego de hacer una revisión de los lineamientos curriculares de 1998 y los estándares de 2003, relacionados con el pensamiento variacional, se interpreta que éste es uno de los ejes conceptuales que posibilita el desarrollo de habilidades asociadas a contextos de variación.

Un PATRÓN es una propiedad, una regularidad, una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición, composición, etc. Éstos se presentan en diferentes contextos y dominios de las matemáticas, tales como, lo numérico, lo geométrico, lo aleatorio y lo variacional. Los patrones permiten la interpretación de regularidades presentes en diversas situaciones de la vida diaria por ejemplo en la música, en el movimiento, la economía, la geografía y la variación en general. El análisis cuidadoso de patrones y regularidades permite establecer generalizaciones.

De acuerdo a John Mason, entre las habilidades que se pueden movilizar desde el estudio de patrones son: ver, decir y registrar.

> *"Ver" hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación…., y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común…. El "decir", ya sea a uno mismo o alguien en particular, es un intento de articular, en palabras, esto que se ha reconocido. "Registrar" es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos)….*
>
> *(Mason y otros, 1999. P. 17)*

Este autor también permite interpretar que el maestro o la maestra debe emplear en las etapas iniciales del aprendizaje mayor cantidad de tiempo en los procesos de *ver* y *decir* y no apresurar el *registrar* en su forma simbólica, ya que este debe ir surgiendo de manera natural.

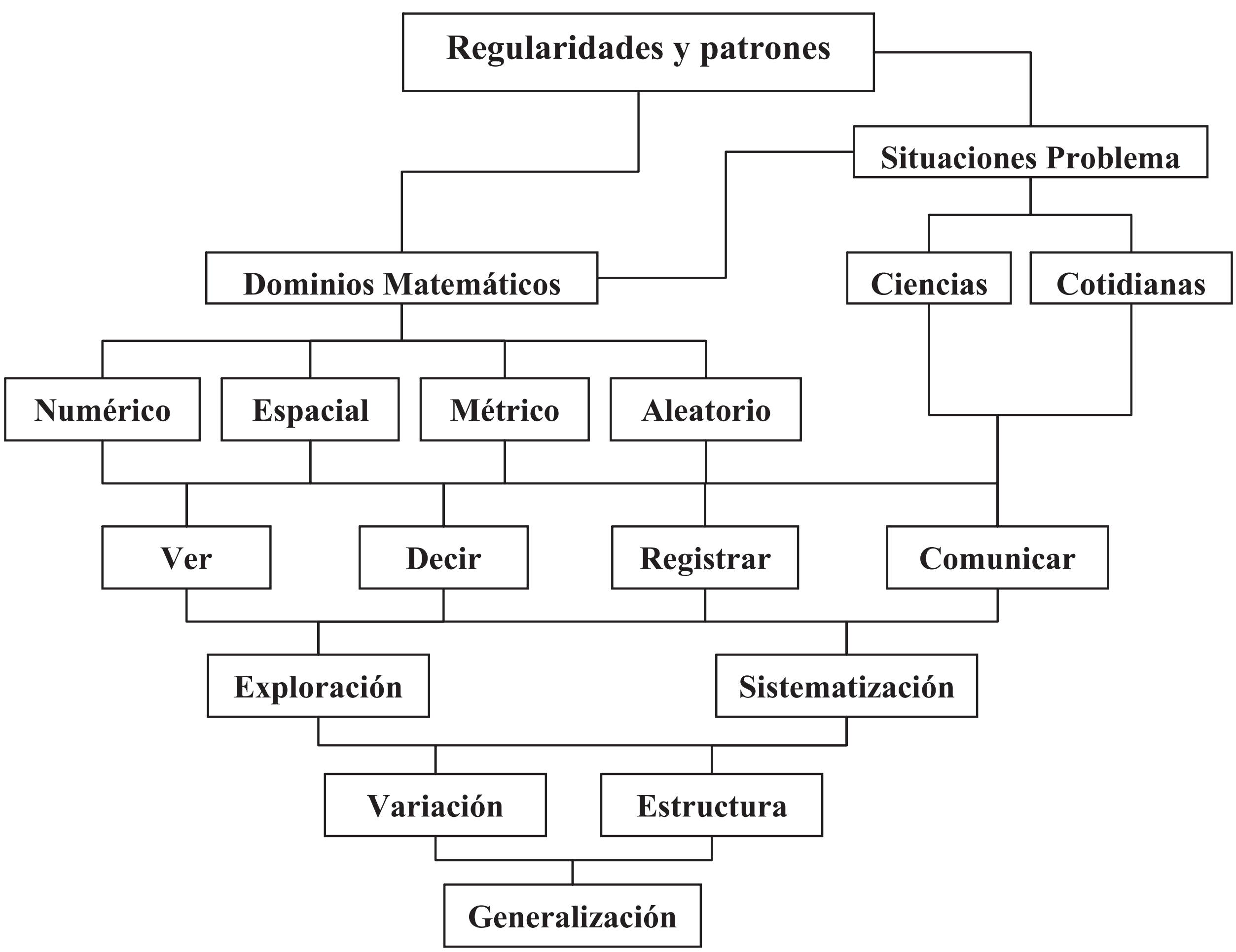
Así pues, el estudio de patrones y regularidades desde la primaria se hace indispensable para desarrollar el pensamiento variacional, y todos los maestros orientadores del área de matemáticas deben comprender que el razonamiento algebraico tiene algunas características que son sencillas de adquirir por los niños y niñas, las cuales son:

1.1. Los patrones y regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas y en otras áreas del saber. Estos pueden ser reconocidos, ampliados y generalizados mediante la construcción de situaciones que involucren procesos de variación y cambio. Es decir un mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes, tales como: situaciones físicas, geométricas, aleatorias y numéricas. Esto informa que hay una estrecha relación con cada uno de los otros pensamientos numérico, geométrico, estocástico y métrico, que, los maestros necesitan integrar para que haya un mejor aprendizaje de las matemáticas.

1.2. Se puede ser más eficaz, al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos, lo que conduce a generar procesos de generalización. Todo este trabajo permite poner de manifiesto diferentes procesos matemáticos tales como el razonamiento, la comunicación y la resolución de problemas.

1.3. El nivel de las representaciones ayuda a diferentes contextos propios de los tipos de pensamiento. Una representación gráfica, se conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría; la representación en forma de tabla, pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos; las expresiones simbólicas, se relacionan con el pensamiento variacional, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para trabajar las competencias comunicativa, interpretativa, argumentativa y propositiva.

El esquema siguiente orienta lo concerniente al eje temático desarrollado, se puede decir que sintetiza las ideas expresas en las líneas anteriores y ofrece una visión conceptual para el diseño y ejecución de situaciones que propicien pensamiento variacional desde esta perspectiva.



2. PROCESOS ALGEBRAICOS

Pensar los procesos algebraicos desde los contextos de variación y cambio hace referencia a la forma de ver las expresiones algebraicas desde las diversas situaciones que posibilitan expresar la generalización. Esto se puede lograr a través de las interrelaciones entre los lenguajes verbal, icónico, gráfico y simbólico; Por lo tanto, el punto de partida no es la sintaxis propia de las reglas del álgebra, sino que por el contrario ella es el punto de llegada. Desde un punto de vista tal, el álgebra deja de ser una fiel traducción de las reglas de la aritmética a través de letras, mejor aun, deja de ser una forma abstracta de representar la aritmética, para convertirse en una nueva forma de pensar la matemática: la expresión de la generalidad, de la generalización.

En este sentido, el pensamiento algebraico, cobra valor en los distintos grados del ciclo escolar. Por ejemplo, frente a una situación relacionada con la búsqueda de un patrón, para la educación básica primaria, lo importante no es que los estudiantes tengan que hacer sacrificios extremos para obtener una regla a través de símbolos para el elemento n-ésimo. Lo fundamental es permitir al grupo de estudiantes la reflexión frente a lo que cambia, frente a lo que se conserva, y por ende, a las relaciones invariantes estructurales, pero fundamentalmente, permitirles que comuniquen lo que observan y que expliciten dichas relaciones, que las transformen, que las expresen de diferentes formas, que hagan conjeturas y por tanto, que formulen hipótesis sobre la situación que analizan.

Con seguridad que en un proceso como el anterior, los estudiantes en sus formas de expresar lo que comprenden pueden recurrir a formas verbales (lenguaje natural), gráficas, numéricas y algebraicas. Cualquiera que sea el nivel, lleva implícito la observación, sistematización, y lo más importante, el reflejo de un trabajo, resultado de la exploración de significados. De esta manera ellos entran en un proceso de analizar, explorar, sistematizar, expresar lo que ven y, ésta es de por si, una práctica que tiene que ver con la generalidad.

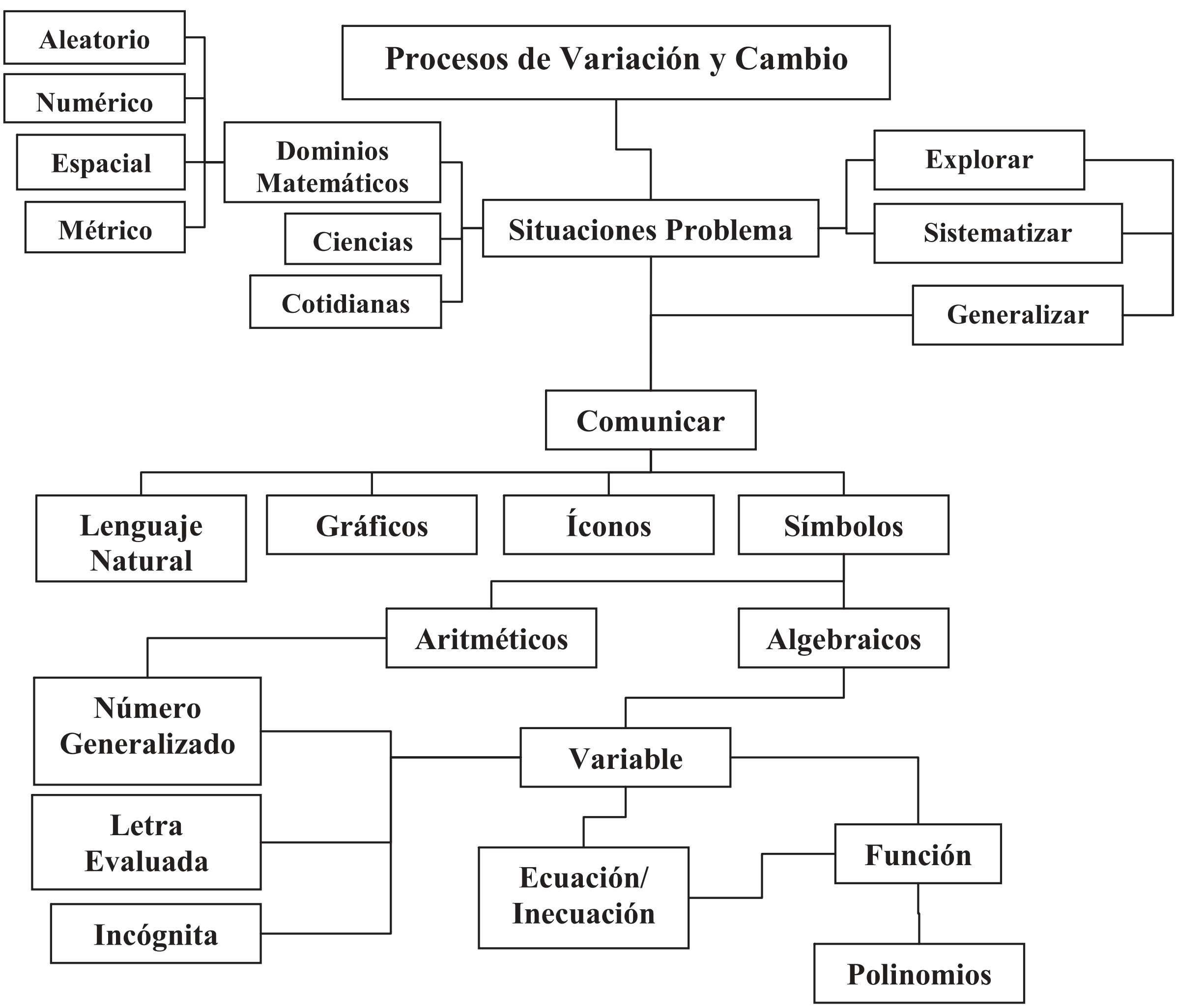
Para ampliar la interpretación de los procesos algebraicos como el resultado de formas particulares de comunicar la generalidad desde un contexto dinámico, citamos las palabras de John Mason y otros:

> *La expresión de la generalidad forma la raíz básica del álgebra porque ésta les da significado a los símbolos que después hay que manipular. Expresar la generalidad que uno percibe es tanto un placer como un esfuerzo. Prestar atención a las generalizaciones de otras personas es con frecuencia mucho menos interesante. Hacer nuestra propia álgebra es motivante porque es nuestra propia producción[….]. Hacer el álgebra de otros, es generalmente, aburrido. (1999, P. 106)*

Lo que Mason expresa hace referencia al importante papel que juega la participación de los estudiantes en los procesos de matematización que posibilitan expresar la generalidad, en la medida que pueden atribuir diferentes significados y pensar los procesos algebraicos desde los contextos de variación.

Entonces podemos interpretar los procesos algebraicos en la escuela como un espacio rico en actividad matemática que convoque a la búsqueda de significados y relaciones, a la reflexión, a la comunicación de las observaciones y a la organización de los aprendizajes; sólo así estaremos incorporando formas de generalizar, desde el aporte de la vivencia personal.

A continuación se sintetizan las ideas relacionadas con los procesos algebraicos a través de un esquema que ayuda a visualizar la orientación conceptual asumida desde este eje temático y así emprender la planeación de situaciones problemáticas para contribuir a la movilización de pensamiento variacional.



3. ANÁLISIS DE FUNCIONES

El tratamiento de las funciones, desde una perspectiva dinámica tiene que ver con los procesos de experimentación, reflexión, construcción de significados y formas de expresar la generalidad como resultado de los procesos de modelación matemática de diferentes tipos de situaciones. Por lo tanto tiene estrecha relación con los procesos algebraicos, no tanto por la prioridad de utilizar el lenguaje simbólico del álgebra, sino, por las diferentes formas de representación que ésta ofrece para estudiar las situaciones de variación y cambio y por las relaciones que podemos establecer entre éstas.

En los Lineamientos Curriculares se puede interpretar que uno de los caminos para armar de sentido este eje temático es el relacionado con la contextualización de actividades que promuevan la modelación a partir del análisis de una situación a través de diferentes sistemas de representación: tabular, gráfico, verbal y la expresión simbólica. Un análisis en tal sentido implica la coordinación e interrelación entre los diferentes sistemas de representación a fin de lograr una construcción conceptual compleja. Así pues, la expresión simbólica, ya no es el punto de partida para el estudio de las funciones, sino que ésta es, en primera instancia, una forma entre otras de expresar la ley general que relaciona las variables del fenómeno que se modela, y como tal, aporta información sobre la relación estructural entre las mismas, al igual que lo hace una tabla de valores o una gráfica cartesiana.

De otro lado, las interrelaciones entre los diferentes sistemas de representación son la base para la interpretación de otros procesos como la solución de ecuaciones e inecuaciones, por ejemplo, una vez se hayan visualizado los puntos de corte con los ejes del sistema de coordenadas que dan cuenta de la gráfica de la función, y analizado su relación con la forma simbólica de la función y la tabla de valores.

Lo importante es poder vincular todos los sistemas de representación de una función desde situaciones que permitan hacer predicciones en un fenómeno de cambio. Lo que le resta importancia, por ejemplo, al manejo mecánico de una función lineal, cuadrática, exponencial, etc.

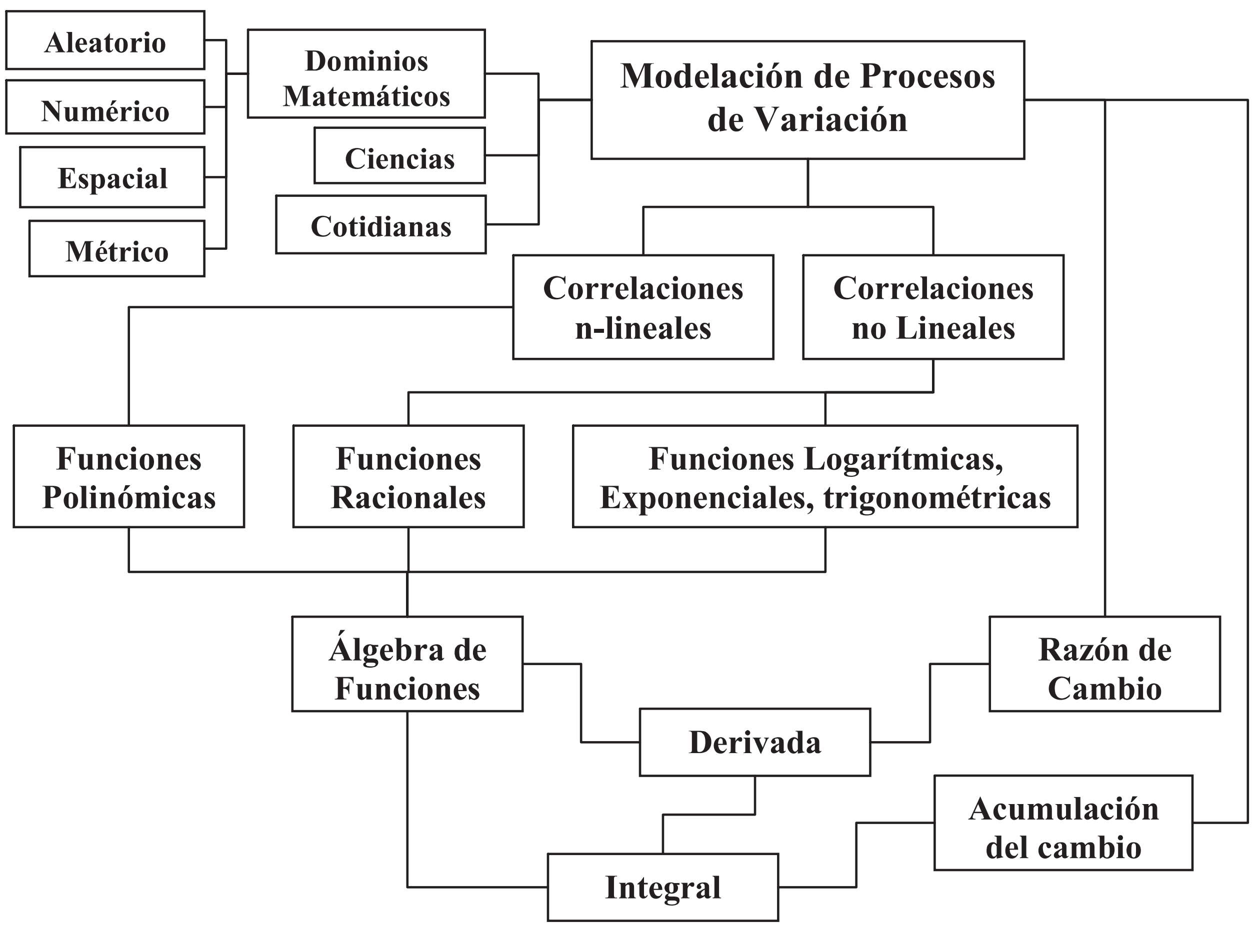
Es necesario que el estudio de las funciones desde sus diferentes representaciones y situaciones, se inicie en la educación básica primaria, lo que facilitaría abordar con mayores niveles de comprensión otras temáticas del pensamiento variacional que actualmente parecen inalcanzables por nuestros jóvenes en la educación básica secundaría, media y universitaria.

Los resultados de las pruebas SABER (2002) realizadas a los grados tercero, quinto, séptimo y noveno y los resultados de las pruebas ICFES para el grado undécimo, han marcado una gran diferencia entre lo que las instituciones enseñan y lo que las pruebas preguntan y ahora con las pruebas de ciencias naturales observamos que un 80% de las preguntas requieren del análisis y la interpretación de fenómenos de la vida real, el estudio de tablas y gráficas; es por esto, que se hace indispensable dedicar mucho mas tiempo a estas temáticas.

Las últimas investigaciones, han detectado en los estudiantes grandes dificultades en lo que es de verdad una función, muestran estas investigaciones una brecha entre las definiciones dadas por los estudiantes y profesores, y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de funciones en el entorno.

Por ejemplo, la proporcionalidad tiene implícito medidas de variación simple como la función lineal y cuadrática. Por lo tanto se puede introducir el concepto de función en los contextos del estudiante para que lo preparen para comprender la naturaleza y las relaciones que ocurren dentro de ellas. También, “es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica”. (Lineamientos curriculares, 1998, p 74).

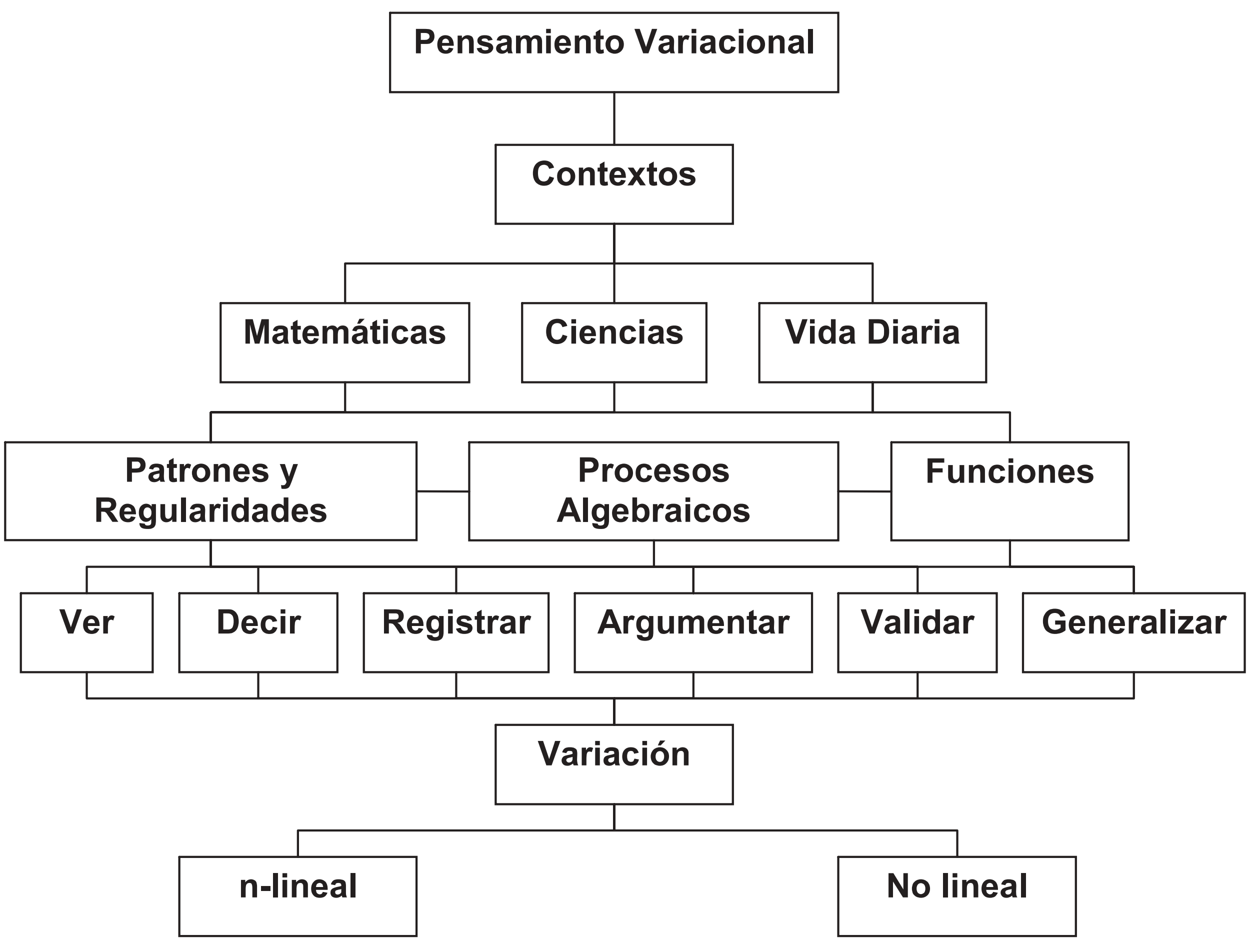
El esquema ilustra las conexiones conceptuales que se pueden dinamizar a partir de este eje temático.



4. A MANERA DE SÍNTESIS

El pensamiento variacional podemos movilizarlo desde los tres ejes conceptuales antes desarrollados, los cuales permiten variadas relaciones entre las distintas formas de promover procesos de variación. En adelante presentamos un esquema que ilustra las conexiones conceptuales que se pueden hacer entre los tres ejes temáticos explicitados.

El siguiente esquema permite ver de manera global los ejes temáticos en los que se agrupan los distintos contenidos relacionados con los procesos de variación, el cual empieza a ofrecer otra perspectiva sobre el desarrollo conceptual, relacionado con el álgebra escolar, en el sentido que posibilita ver diferentes relaciones entre ellos.



La organización conceptual anterior se reviste de sentido si se explicita qué estándares se agrupan para cada uno de los tres ejes temáticos seleccionados en cada uno de los grupos de grados. Por lo tanto, a continuación se presenta dicha organización:

GRUPOS DE GRADOS

Ejes Concep.	1º a 3º	4º a 5º	6º a 7º	8º a 9º	10º a 11º
PATRONES Y REGULARIDADES	Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros) Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráfica	Describir e interpretar variaciones representadas en gráfico Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.	Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	Analizar los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	
PROCESOS ALGEBRAICOS	Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.	Construir ecuaciones e inecuaciones aritméticas como representación de las relaciones entre datos numéricos.	Utilizar métodos informales (ensayo – error, complementación) en la solución de ecuaciones.	Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas. Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales.
FUNCIONES		Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales. Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio (variación). Analizar las propiedades de variación lineal e inversa en contextos aritméticos y geométricos. Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc) en relación con la situación que representan.	Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas. Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera. Interpretar los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.	Interpretar la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos y no matemáticos. Modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas

5. SITUACIONES PROBLEMAS

Con el propósito de ilustrar algunos aspectos relacionados con los fundamentos conceptuales, relativos con los patrones y regularidades, y la organización de estándares para este eje temático, presentamos a continuación una situación problema, la cual se puede implementar en diferentes grupos de grados. Es decir, ésta posibilita diferentes niveles de complejidad, los cuales permiten encontrar relaciones con algunos estándares del pensamiento variacional (relación vertical). También se explicitarán conexiones interesantes con otros estándares propios de otros tipos de pensamiento matemático, por ejemplo, con estándares del pensamiento numérico (relación horizontal).

Situación[3]: Problema 1

Como se mencionó antes, en la actividad se pueden proponer niveles de complejidad dependiendo del grupo de grados, por lo tanto existirán variantes en el tipo de preguntas:

En cada caso el motivo (material mediador) es el mismo, lo que varía es el tipo de preguntas, las cuales se presentan a manera de guía sobre como se puede orientar el trabajo con los alumnos.

Situación para grados de primero a tercero:

1. Observe los siguientes arreglos de cuadritos:

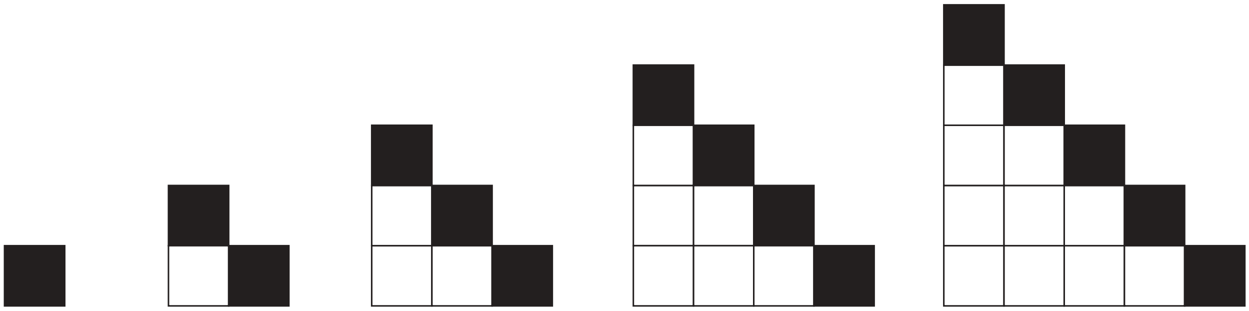


FIG. 1 FIG. 2 FIG. 3 FIG. 4 FIG. 5

¿Encuentra alguna relación, regularidad que se conserve de una figura a otra?

3 Situación problema tomada, con algunas modificaciones, de: MÚNERA C, John Jairo. Las situaciones Problema como fuente de matematización. En: Cuadernos Pedagógicos, Nº 16, 2001.

2. ¿Cuántos cuadritos debe haber en la figura de la posición 6?
3. ¿Es posible que la figura de la posición número 8 tenga sólo 8 cuadritos sombreados? Explique
4. Construya el dibujo del total de cuadritos que ocupa la figura de la posición número 7
5. ¿Cuántos cuadritos podrá tener la figura de la posición 12?

Relación de estándares desde la actividad:

Tipo de pensamiento	Estándares
Variacional	Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.
Numérico	Reconocer las relaciones y propiedades de los números (ser par, ser impar, ser múltiplo de, ser divisible por, asociativa, etc.)
Geométrico	Realizar diseños y construcciones con cuerpos y figuras geométricas

Situación para grados de cuarto a quinto:

Utilizando el mismo material anterior los estudiantes observarán los arreglos de cuadritos, luego procederán a discutir los siguientes interrogantes:

1. ¿Cuántos cuadritos debe haber en la figura de la posición 8?
2. ¿De qué otra manera podemos expresar el total de cuadritos de cada figura?
3. ¿Cuántos cuadritos debe haber en la figura de la posición 12?
4. ¿Cuántos cuadritos no sombreados tendrá la figura de la posición 15?
5. ¿Cuántos cuadritos sombreados deberá haber en la figura de la posición 100?
6. Construya el dibujo del total de cuadritos que ocupa la figura de la posición número 10.

Relación de estándares desde la actividad:

Tipo de pensamiento	Estándares
Variacional	Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
Numérico	Usar diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Situación para grados de sexto a séptimo:

Con base en los mismos arreglos de figuras anteriores, esta vez llamados arreglos de mosaicos, se proponen las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos mosaicos debe haber en la figura de la posición 10?
2. ¿De qué otra manera podemos representar cada una de las figuras de cada posición y el total de mosaicos de cada una?
3. ¿Cuántos mosaicos debe haber en la figura de la posición 20?
4. ¿Cuántos mosaicos no sombreados tendrá la figura de la posición 25?
5. Tome cada una de las figuras dadas, únala con la anterior y, dibuje la nueva secuencia de figuras resultante (todas las nuevas secuencias de figuras deben tener la misma forma).

¿Para esta nueva secuencia de figuras cuantos mosaicos tendrá la figura de la posición 7?

¿En cada una de estas nuevas figuras cuántos mosaicos sombreados hay? ¿Cuántos mosaicos habrán en la figura de la posición 10?

Relación de estándares desde la actividad:

Tipo de pensamiento	Estándares
Variacional	Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
Numérico	Justificar operaciones aritméticas utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones
Geométrico	Resolver y formular problemas usando modelos geométricos

Situación para grados de octavo a noveno:

En este nivel sería la misma actividad para el grado sexto a séptimo complementada con preguntas de mayor exigencia. ¿Así quedaría?
A partir de la observación de los arreglos de mosaicos, los estudiantes pueden explorar y discutir los siguientes interrogantes:

1. ¿Cuántos mosaicos debe haber en la figura de la posición 20?
2. ¿Cuántos mosaicos no sombreados tendrá la figura de la posición 30?
3. ¿Cuál será la ley de formación para el total de mosaicos de la figura de cualquier posición?
4. Tome cada una de las figuras dadas, únala con la anterior y dibuje la nueva secuencia de figuras resultantes (todas las nuevas secuencias de figuras deben tener la misma forma).

¿Para esta nueva secuencia de figuras cuántos mosaicos tendrá la figura de la posición 12?

¿En cada una de estas nuevas figuras cuántos mosaicos sombreados hay? ¿Cuántos mosaicos habrá en la figura de la posición 25?

¿Si una de estas nuevas figuras tiene 64 mosaicos en total, ¿Cuántas figuras tiene cada una de las figuras iniciales que la conforman?

Relación de estándares desde la actividad:

Tipo de pensamiento	Estándares
Variacional	Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas. Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

Situación Problema No. 2:

SITUACIÓN PARA GRADOS DE CUARTO A QUINTO:

Esta situación de aprendizaje requiere datos reales. Lo ideal es que el docente realice esta actividad aprovechando el contexto de los estudiantes, en donde cada uno lleva la cuenta de acueducto y alcantarillado.

Actividades:

Observe y escriba cada uno de los cobros que hay en la factura y complete la siguiente tabla:

Consumo Metros cúbicos				
Costo				

1. ¿Qué significa cargo fijo? ¿Cuál es el cargo fijo?

2. ¿De qué depende el pago por concepto de acueducto?

3. ¿Qué pasa si aumenta el número de metros cúbicos?

4. Si dentro del presupuesto familiar se dispone únicamente de 20.000 pesos para pagar el servicio, ¿cuál es el máximo en metros cúbicos que se debe consumir?

5. ¿Por qué valor llegaría la factura de acueducto suponiendo que no hubo consumo de agua?

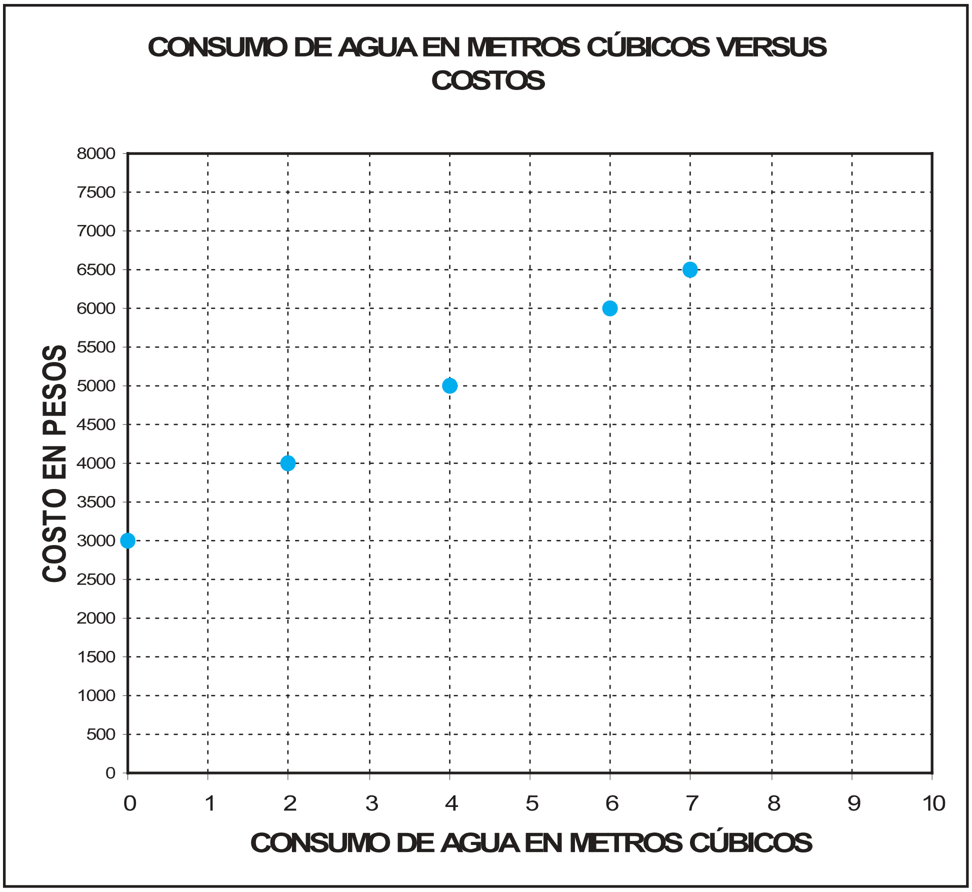
6. Si en su casa por una falla (fuga) llega un consumo de 175 metros cúbicos. ¿cuánto tendrá que pagar?

7. Utilizando el material anterior los estudiantes graficarán los datos de la tabla.

Relación de estándares desde la actividad:

Tipo de pensamiento	Estándares
Variacional	Utilizar y justificar el uso de la estimación en situaciones de la vida social, económicas y en las ciencias.
Numérico	Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias.
Geométrico	Identificar, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.

Situación para los grados octavo a noveno:



La gráfica muestra la relación entre el consumo de agua en metros cúbicos de varios hogares del municipio y el costo de dicho servicio. De acuerdo con la gráfica responda las preguntas

1. ¿Cuánto le tocó pagar al que más agua gastó?

2. Al hogar que no gastó agua ¿Cuánto le tocó pagar?

3. ¿Cuál es el consumo promedio en metros cúbicos de agua?

4. ¿Cuál es el costo promedio del consumo de agua?

De acuerdo con la gráfica completa la siguiente tabla:

Consumo Metros^3	2		6		9		15
Costo en pesos		5000		6500		5500	

3. ¿Cuál sería una forma de calcular el costo para cualquier número de metros cúbicos consumidos?

4. ¿En cuánto se incrementa el costo de la factura por cada metro cúbico adicional de consumo?

Relación de estándares desde la actividad

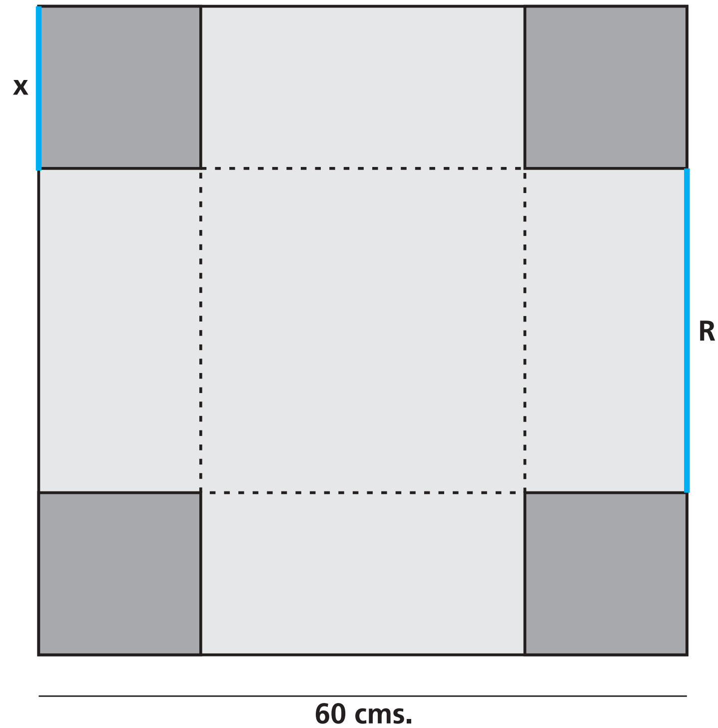
Tipo de pensamiento	Estándares
Variacional	Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas. Reconocer el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio. (variación).

Situación[4] Problema No. 3
Para Grados Octavo y Noveno

Momento 1

Se tiene un trozo de cartón de forma cuadrada y se desea construir una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño de sus esquinas y doblando luego hacia arriba las pestañas que quedan, ver figura.

4 Tomada de Plan de mejoramiento en gestión académica U de A y Edúcame: elaboraron Fabián Posada, Norma Lorena Vásquez y Gilberto Obando



- A medida que al trozo de cartón se le recorten cuadrados más grandes, ¿qué crees que pasa con el perímetro de figura resultante? , ¿Qué crees que sucede con el perímetro del cuadrado recortado al trozo de cartón?, ¿Qué crees que sucede con la longitud R de la figura? Y ¿Qué sucede con el perímetro de la pestaña?.

- Si se quiere recubrir la caja de cartón con papel, ¿crees que a medida que se recorten cuadrados mas grandes, necesitas mas papel?, ¿Habrá alguna caja para la cual necesite menos papel para recubrirla?, ¿para cuál caja necesitas exactamente una cantidad de papel igual a la mitad del trozo de cartón?.

- Para qué longitud x del cuadrado recortado el volumen de la caja es el más grande?

Momento 2:

A medida que vaya respondiendo las preguntas anteriores, complete la siguiente tabla.

Caja rectangular							
X	Perímetro de la figura resultante	Perímetro del cuadrado recortado	longitud de R	Perímetro de la pestaña recortada	Área del cuadrado cortado	Área de la figura para construir la caja	Volumen de la caja

Momento 3:

Representa en el plano cartesiano las siguientes gráficas:

- Lado del cuadrado cortado, con perímetro del cuadrado recortado.
- Lado del cuadrado cortado con perímetro de la pestaña.
- Lado del cuadrado con área de la figura para construir la caja
- Lado del cuadrado con volumen de la caja

Momento 4:

Encuentra una expresión matemática que represente las columnas de la tabla, es decir con la cual se pueda expresar cada uno de los datos, en términos del lado del cuadrado recortado (x).

Relación de estándares desde la actividad:

Tipo de pensamiento	Estándares
Variacional	Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas. Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.
Numérico	Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diferentes contextos
Espacial	Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en la matemática y en otras disciplinas.
Métrico	Generalizar procedimientos de cálculo, válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.

BIBLIOGRAFÍA

MASON, John y otros. Rutas hacia el Álgebra, raíces del Álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 1999.

MASON, John y otros. Pensar matemáticamente. Trad. MARTINEZ, Mariano. España : Labor, 1989.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Santafé de Bogotá, 1998, p 131.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Matemáticas. Santafé de Bogotá, 2003.

MÚNERA C, John Jairo. Las Situaciones Problema como Fuente de Matematización. En: Cuadernos Pedagógicos, Nº 16. Facultad de educación. Universidad de Antioquia. Medellín, agosto de 2001.

OBANDO Z, Gilberto; MÚNERA, John Jairo. Las Situaciones Problema como Estrategia para la Conceptualización Matemática. Revista Educación y Pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, no. 35, (enero- abril), 2003 pp 183-200.

VASCO, Carlos E. El pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías. Memorias del Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Santafé de Bogotá. 2002. Tomado de: http://www.mineducacion.gov.co/

SEPARADOR 3

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

Ramón Emilio Sepúlveda Quiroz
I. E. Asia Ignaciana. Medellín

Carlos Humberto Ospina Noreña
I. E. Inem José Felix de Bedout. Medellín

José Manuel González
I. E. Lola González. Medellín

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

INTRODUCCIÓN

Desde la perspectiva psicogenética, y en una síntesis muy apretada, se puede plantear, siguiendo a Piaget, que el niño en el proceso de construcción de las nociones geométricas primero procede desde el espacio que está a su alcance, esto es, el entorno inmediato que lo rodea (espacio próximo); luego puede seguir un objeto, prever su trayectoria, buscarlo cuando se pone fuera de su campo visual, etc; pero ésta construcción comporta un posicionamiento del sujeto con respecto al espacio que lo rodea, esto es, debe situarse como un objeto más dentro de su entorno. De esta manera se estructura el "espacio lejano", en el cual, el individuo debe posicionarse como integrante del mismo, pero a la vez, como interactuante con él.

> *La tesis fundamental de Piaget en" La representación del Espacio en el Niño" es que en el dominio de la geometría, el orden genético de la adquisición de las nociones espaciales es inverso al orden histórico del progreso de la ciencia. El niño considera primero las relaciones topológicas de una figura y solo posteriormente las proyectivas y euclidianas, las que son construidas casi simultáneamente. En efecto, las primeras relaciones que el niño puede reconocer y representar gráficamente son las de vecindad, separación, orden, entorno, y continuidad....*
>
> *El dominio de las relaciones proyectivas permite la construcción de una geometría del espacio exterior al sujeto, quien lo contempla desde cierta distancia. La descentración del sujeto respecto a su perspectiva actual le permite coordinar distintos puntos de vista posibles y construir una representación del espacio con el que está interactuando en la que los ejes adelante - atrás y derecha -izquierda dejan de ser absolutos.*
>
> *Galves, 1988, p. 280.*

Por su parte la construcción del espacio Euclidiano, en el que están involucrados tanto el sujeto como los objetos que se mueven, necesita de elaboraciones mentales superiores, ya que en este espacio una característica fundamental es la métrica, a través de la cual se estructura un espacio de coordenadas tridimensionales, en el cual, la construcción de una unidad de medida y de la noción de medición se constituyen en elementos fundamentales.

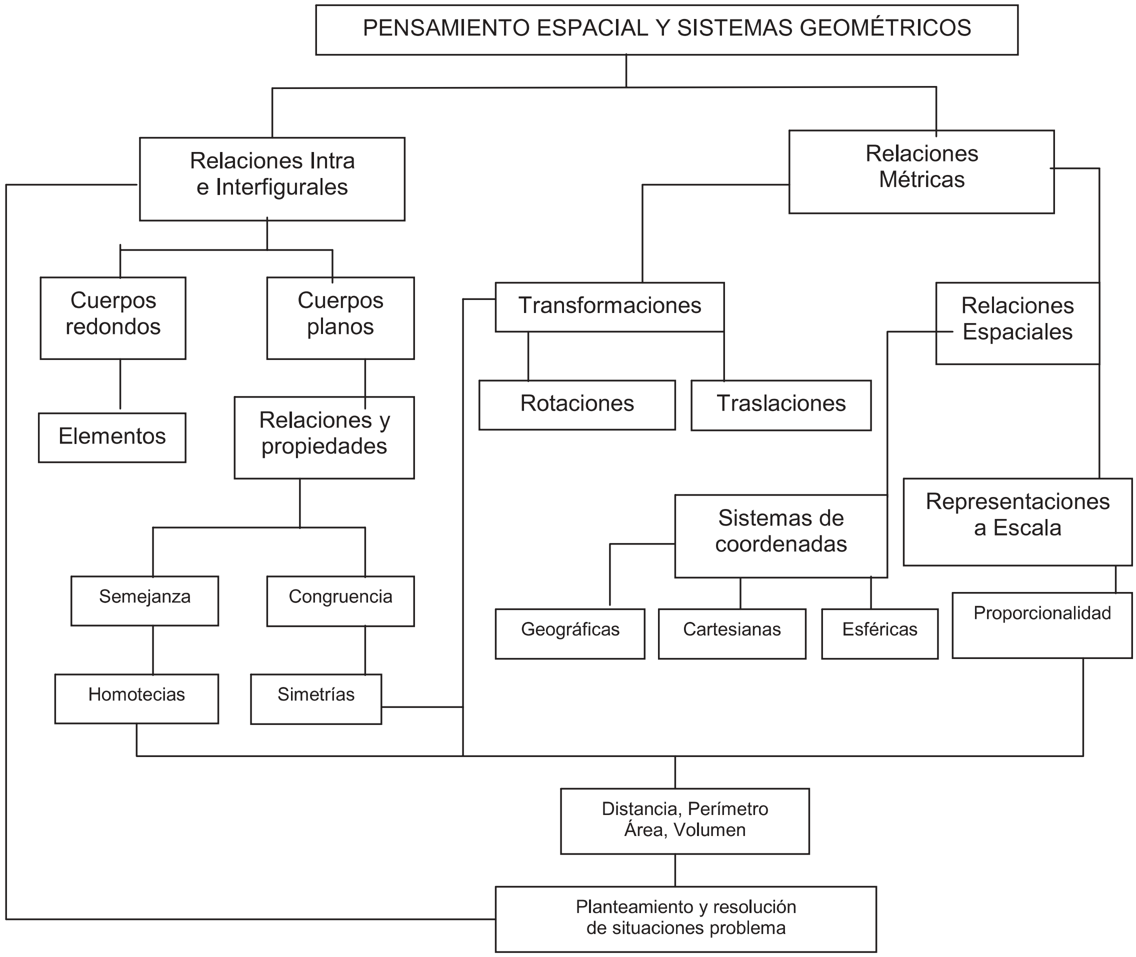
Así pues, la geometría se constituye como una disciplina resultado de la necesidad del hombre de relacionarse con el mundo que lo rodea y de metrizarlo. Desde esta perspectiva, tanto en los Lineamientos Curriculares, como en los Estándares Básicos de Matemáticas, desde los grados iniciales se rescatan, de un lado, las relaciones topológicas, en tanto reflexión sistemática de las propiedades de los cuerpos en virtud de su posición y su relación con los demás. Pero de otro, el reconocimiento y ubicación del niño en el espacio que lo rodea, en lo que Grecia Galves ha llamado el meso-espacio y el macro-espacio refiriéndose no solo al tamaño de los espacios en los que se desarrolla la vida del individuo, sino también a su relación de éste con dicho espacio. Nótese como en este punto del trabajo no es importante la métrica, es decir la medición, sino que lo que importa son las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con estos objetos y este espacio.

Posteriormente y a medida que se complejizan los sistemas de representación del espacio, se hace necesario la metrización, pues ya no es suficiente con el está cerca o lejos, sino que es necesario determinar que tan cerca o que tan lejos. Esto significa un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo cual hace aparecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos. De esta manera la percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no sólo a su relación con los demás (relaciones interfigurales), sino también entre ellos mismos (relaciones intrafigurales) y a través de sus medidas (Relaciones métricas). El estudio de estas propiedades son las que deberán, convertirse en los conocimientos formales de la geometría, esto es, los teoremas de la geometría Euclidiana.

El trabajo realizado de esta manera permite la realización de proyectos integrados con otras áreas como por ejemplo el área de sociales, o el área de ciencias. Entre otros se pueden mencionar: Elaboración de mapas y maquetas, estudio de las formas en la naturaleza, estudio de las simetrías en la naturaleza.

Se presenta a continuación una serie de planteamientos sobre los estándares básicos de matemáticas en lo relativo al pensamiento espacial y sistemas geométricos. Se trata de un esfuerzo de sistematizar una serie de ideas que muestran una alternativa de organización curricular de los mismos.

EJES TEMÁTICOS



En los Lineamientos curriculares se plantea una ***geometría activa,*** a través de la cual se evidencia la diferencia entre mostrar y hacer, observar y actuar, simbolizar y conceptualizar; por lo tanto se da prioridad al cuerpo o sólido sobre la superficie, de ésta sobre la línea y de ésta sobre el punto. Asumimos además, en el presente trabajo, la solución de problemas como un eje transversal en el desarrollo de los diferentes contenidos tal como se observa posteriormente a partir de las situaciones problemáticas.

Los estándares curriculares establecidos por el M. E. N para la enseñanza de la geometría en la Educación Básica y Media, se pueden agrupar en dos grandes ejes temáticos:

I. RELACIONES INTER E INTRA FIGURALES.

II. TRANSFORMACIONES Y RELACIONES ESPACIALES.

Estos dos ejes están en estrecha relación con lo que Piaget denominó las operaciones lógica e infralógicas. Castorina y Palau en la **“ Introducción a la lógica operatoria de piaget”,** plantean las operaciones lógicas y las operaciones infralógicas en los siguientes términos.

“Las operaciones lógicas son aquellas que se realizan sobre objetos individuales y se limita a reunirlos independientemente de sus vecindades y las distancias espacio temporales que las separan”. Las operaciones infralógicas “consisten en engendrar el objeto por medio de sus propios elementos, logrando así, no clases o relaciones independientes del espacio, sino objetos totales de distintos tipos”. En otras palabras, en una operación infralógica, se trata de componer o descomponer las partes de un objeto o de colocarlas en un orden de sucesión determinado. De otro lado, las operaciones lógicas son las que agrupan los objetos en clases según propiedades comunes invariantes, y por lo tanto se forman clases que se ordenan, se comparan, se igualan, etc.

En las operaciones lógicas *se separan o agrupan los cuerpos* por sus diferencias o semejanzas, en tanto en las operaciones infralógicas *se separan o agrupan las partes de un objeto* por la relación espacial que ocupan entre sí con respecto al todo. En síntesis, clasificar objetos por su forma y color, por ejemplo, es realizar una operación lógica, mientras que armar un rompe cabezas es realizar una operación infralógica.

En el campo de la geometría, a las operaciones lógicas se les llama operaciones interfigurales, y a las operaciones infralógicas se les llama operaciones intrafigurales.

El eje temático I comprende el estudio de las diferentes figuras y cuerpos geométricos, identificando sus elementos, propiedades y relaciones al interior de cada figura y entre diferentes figuras. Las relaciones y operaciones interfigurales nos permiten clasificar un conjunto de objetos en cuerpos redondos (sólidos tridimensionales) – que tienen por lo menos uno de sus lados no plano – y cuerpos planos -cuyos lados son caras -. En los cuerpos redondos se identificarán sus elementos, y en los cuerpos planos además de lo anterior se estudiarán sus relaciones y propiedades incluyendo el estudio de semejanzas y congruencias.

El eje temático II pretende devolver la ***dinámica*** a los sistemas geométricos a través de las ***transformaciones en el plano y las relaciones y operaciones espaciales.***

La aplicación de las transformaciones (rotaciones, traslaciones, simetrías, homotecias) por su parte, permite establecer relaciones de semejanza y congruencia entre objetos geométricos. La semejanza por su lado, apoyada en el concepto de proporcionalidad permite efectuar cálculos de: perímetros, áreas y volúmenes.

Esta visión exige que se creen situaciones problemáticas en las que los estudiantes puedan explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos, haciendo énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y retomando los contenidos geométricos. Considerando fundamentalmente:

- Que el estudiante manipule los cuerpos geométricos
- Que active su capacidad mental
- Que en la construcción establezca relaciones
- Que adquiera confianza en si mismo
- Que se prepare para los nuevos retos de la ciencia y la tecnología

Ambos tópicos, las transformaciones y semejanzas de la geometría resultan de internalizar en forma de esquemas activos en la imaginación, las acciones y transformaciones que se efectúan físicamente. (Lineamientos curriculares Pág 61).

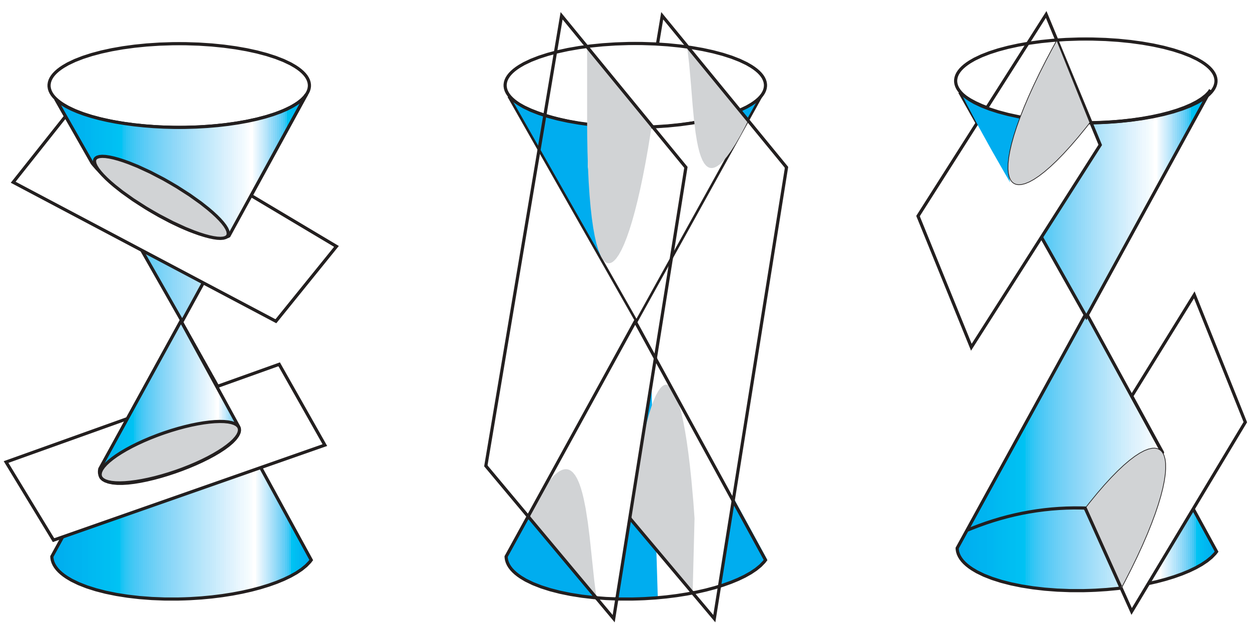
Para la enseñanza aprendizaje de este eje temático, las nuevas tecnologías, en particular el ***software Cabri***, **el Poly, Regla y Compás,** entre otras, se constituyen en mediadores interesantes tanto para el maestro como para el estudiante.

El desarrollo de cada uno de los ejes temáticos debe obedecer a una ***geometría activa;*** tal como se propone en los Lineamientos Curriculares de matemáticas. Pág 57 **"**se trata pues de "hacer cosas", de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna.

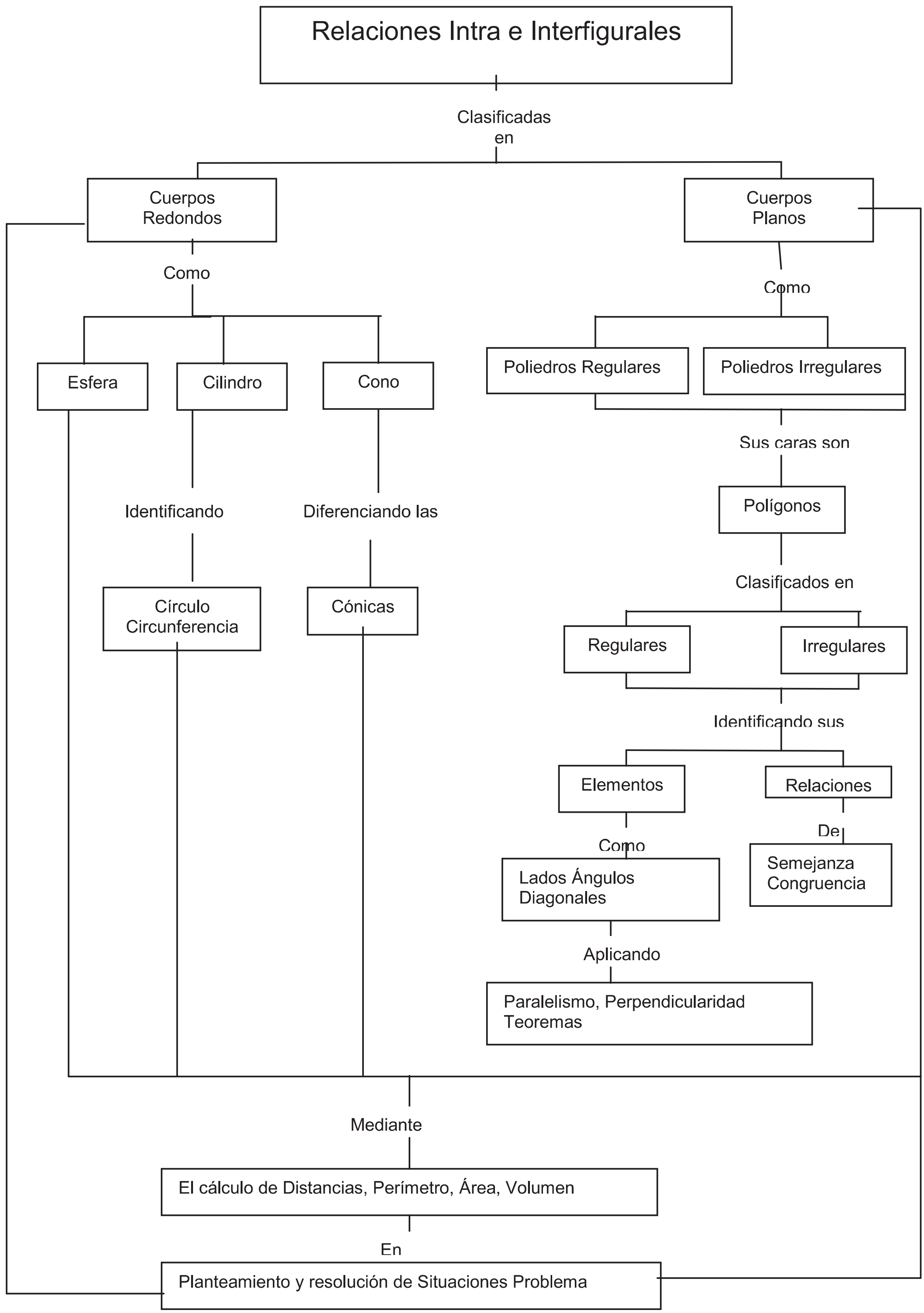
EJE 1: RELACIONES INTRA E INTER FIGURALES

Por la configuración de los objetos geométricos existentes en el medio, es preciso clasificarlos en dos grandes grupos. Cuerpos redondos y cuerpos planos.

Los redondos: La esfera, el cilindro y el cono, servirán de base para el estudio del círculo, la circunferencia y las cónicas, identificando en ellos sus elementos y sus interrelaciones.



Para su estudio se parte del objeto concreto, en el caso particular del cilindro, partiendo de un tarro, se procede a hacer cortes, inicialmente se retiran las bases y luego se realiza un corte lateral, identificando claramente sus componentes bidimensionales. Para el caso de las figuras cónicas, se sugiere realizar en sólidos, los cortes que muestran las anteriores figuras.


Relaciones Intra e Interfigurales
Clasificadas en
Cuerpos Redondos
Cuerpos Planos
Como
Como
Esfera
Cilindro
Cono
Poliedros Regulares
Poliedros Irregulares
Sus caras son
Identificando
Diferenciando las
Polígonos
Clasificados en
Círculo Circunferencia
Cónicas
Regulares
Irregulares
Identificando sus
Elementos
Relaciones
Como
De
Lados Ángulos Diagonales
Semejanza Congruencia
Aplicando
Paralelismo, Perpendicularidad Teoremas
Mediante
El cálculo de Distancias, Perímetro, Área, Volumen
En
Planteamiento y resolución de Situaciones Problema

Para el estudio de los cuerpos planos se partirá de la manipulación de objetos tridimensionales como cajas con caras de diferente forma y tamaño, donde se identificaran algunos elementos como: formas de las caras (cuadradas, rectangulares, triangulares y otras formas geométricas), vértices, aristas y ángulos.

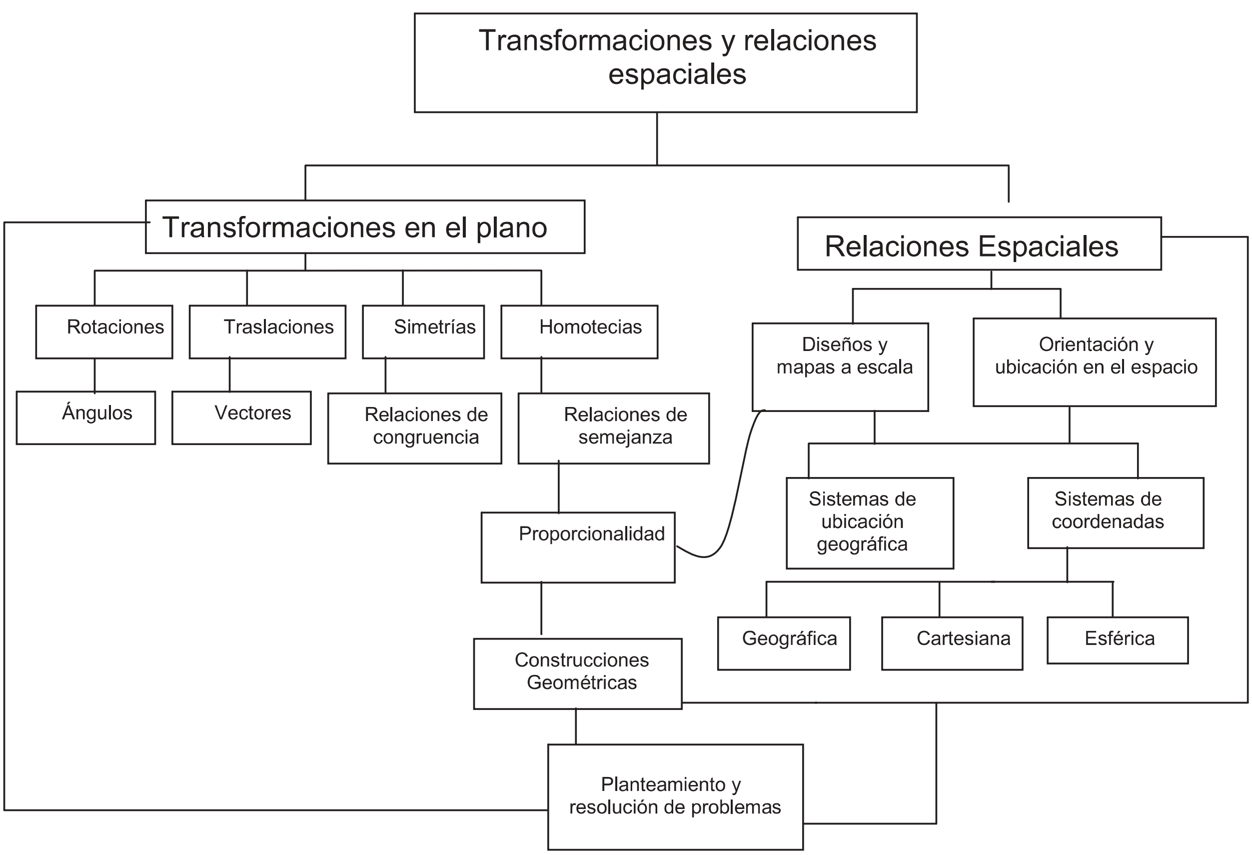
Las caras de los poliedros son polígonos, que se pueden clasificar según el número de lados y a su vez en regulares e irregulares. Estos polígonos nos permiten determinar los elementos que los componen: lados, ángulos, diagonales, y las relaciones existentes entre ellos.

En el estudio, tanto de los cuerpos planos como los redondos, se hace indispensable la formulación de situaciones problema - entendidas como espacios donde se formulan interrogantes algunos de los cuales no son de respuesta inmediata, y que tienen que ver con:

una red de conceptos planeados por el docente -. En este caso se evidencia la aplicación de conceptos como: perímetro, área, distancia entre puntos, volumen, paralelismo, congruencia, semejanza, perpendicularidad, transformaciones en el plano entre otros conceptos.

Posterior a la presentación de este plan se pone en consideración de docentes y alumnos algunas situaciones problemáticas que se espera han de ser suficientemente exploradas y enriquecidas con otros interrogantes.

EJE 2:TRANSFORMACIONES Y RELACIONES ESPACIALES



Las transformaciones en el plano a considerar son:

- La rotación – entendida como el giro de un objeto geométrico sobre un mismo plano con respecto a un centro de giro, un ángulo **x** determinado**-.**

- La traslación – deslizamiento de un objeto geométrico en el mismo plano, mediante un vector **p** determinado.

- La simetría que se puede considerar con respecto a un punto del objeto o fuera de él (Simetría Central) y la que se puede plantear con respecto a un eje de simetría (Simetría axial), estableciendo relaciones de congruencia.

- Homotecias (simetría activa) considerada como una transformación que conserva la forma, ampliando o reduciendo el tamaño del cuerpo, estableciendo relaciones de semejanza.

Al establecer relaciones de semejanza entre objetos geométricos, aplicamos propiedades de la proporcionalidad, la cual nos permite realizar construcciones geométricas, diseños artísticos, mapas, maquetas, etc., los cuales nos permiten orientarnos y ubicarnos en el espacio.

ESTÁNDARES SEGÚN LOS EJES TEMÁTICOS

En el esquema que presentamos a continuación, ubicamos cada uno de los estándares curriculares en diferentes ejes temáticos; considerando el eje temático II en dos bloques por separado: ***transformaciones en el plano y las relaciones espaciales*** con el fin de facilitar su comprensión.

Ejes	1º a 3º	4º a 5º	6º a 7º	8º a 9º	10º a 11º
Relaciones intra e inter figurales	**1.** Diferenciar atributos y propiedades de objetos Tridimensionales.	**1** Comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.	**1.**Representar objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.	**1.** Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de Problemas.	
	2. Dibujar y describir figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños.	**2.**Comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.	**2.** Identificar y describir figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales	**2.** Reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).	
	3. Re conocer nociones de horizontalidad, v verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.		**3.** Clasificar polígonos en relación con sus Propiedades.	**3.** Aplicar y justificar criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.	

Ejes	1º a 3º	4º a 5º	6º a 7º	8º a 9º	10º a 11º
Relaciones intra e inter figurales	**7.** Reconocer Congruencia y semejanza entre figuras (Ampliar, reducir	**5**. Identificar y justificar relaciones de Congruencia y semejanza entre figuras **6**. Construir Descomponer figuras y sólidos a partir de Condiciones dadas. **8**. Construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura	**5**. Resolver y formular problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia representaciones visuales.		
Tranformaciones	**5.** reconocer y aplicar traslaciones y giros de una Figura en el plano. **6.** reconocer y valorar simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño	**3.** Identificar el ángulo como giros , aberturas, inclinaciones en situaciones Estáticas y dinámicas **7.**Hacer conjeturas y Verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para Construir diseños.	**4.** Predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones (traslaciones, rotaciones, reflexiones y homotecias sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.		

Ejes	1º a 3º	4º a 5º	6º a 7º	8º a 9º	10º a 11º
Relaciones Métricas	**4.** Representar en el espacio circundante para establecer relaciones espaciales (distancia, dirección, orientación etc. **8**.realizar diseños y construcciones cuerpos y figuras geométricas	**4** Utilizar sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales	**6**. Resolver y formular problemas usando modelos geométricos. **7**. Identificar características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.	**4** Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en la matemática y en otras disciplinas.	**2**. Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, Esféricos,...). **3**. Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas de manera algebraica. **4**. Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. **5**. describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.

SITUACIONES PROBLEMA

3.1. SITUACIÓN PROBLEMA N° 1

Se propone que la siguiente actividad sea desarrollada para los grados 1° a 5°.

Dados varios cuerpos sólidos de diferente tamaño y ubicados en diferentes posiciones, se pide al estudiante que construya objetos similares, de igual y de distinto tamaño con el objeto de decorar su aula de clase.

Grados de 1º a 3º.

Estándar 1: Diferenciar atributos y propiedades de objetos tridimensionales.

Estándar 2: Dibujar y describir figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños.

Saberes previos:
Concepto de polígono y sus elementos.

Actividades:

1.1 ¿Qué tipo de cuerpos son?
1.2 ¿Cuántas caras tiene cada cuerpo?
1.3 ¿Qué forma tiene cada cara del cuerpo?
1.4 ¿Qué semejanza encuentras entre las caras de los diferentes cuerpos?
1.5 ¿Qué diferencias encuentras entre los cuerpos?
1.6 ¿A qué conclusión llegas?

En este nivel los estudiantes deben percibir las formas de los cuerpos geométricos, describiendo su aspecto físico donde reconocen y diferencian elementos referentes a las semejanzas o diferencias físicas globales; constituyéndose así el primer nivel de razonamiento del modelo planteado por Van Hiele, de reconocimiento.

Grados 4º y 5º.

Estándar 1: Comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.

Estándar 2: Comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.

Actividades:

1.1 ¿Qué características tienen las caras de cada cuerpo?
1.2 ¿Qué nombre reciben las intersecciones de dos caras, de tres o más caras...?
1.3 ¿Cuántos lados tiene cada cara? ¿Cuántos vértices? ¿Cuántos ángulos?
1.4 ¿Qué clase de ángulos son? Según cual criterio de clasificación?
1.5 Determine qué lados son paralelos y cuáles son perpendiculares en cada cara?

Estándar 8: Construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.

Actividades: El educador le brinda al estudiante el modelo bidimensional, para que él construya el sólido donde identifique las figuras planas que lo conforman, sus ángulos, vértices, caras, etc.

El estudiante debe elaborar un modelo para construir otro sólido de menor o mayor tamaño, en el cual:

1. Clasifique y nombre las figuras que conforman el sólido construido.

2. Determine las semejanzas y diferencias entre las figuras que forman la cara.
3. Identifique el número de caras, vértices y ángulos.
4. Generalice y concluya de acuerdo a la experiencia.

- En este nivel los estudiantes están en condiciones de describir las partes que integran una figura y enunciar sus propiedades; pueden realizar deducciones y generalizaciones; constituyéndose así en el II nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele.

SITUACIÓN PROBLEMA N 2

Grados 6º y 7º.

Estándar 3: Clasificar polígonos en relación con sus propiedades.

Estándar 6: Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.

Consideremos el cuadrado ACEG, que tiene de lado **x+y**, tal que **x > y**, como lo muestra la figura1

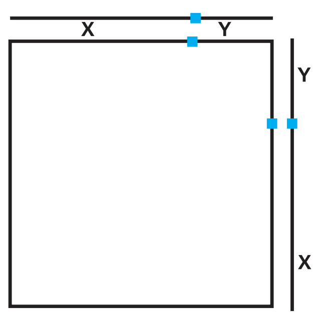


Fig. 1

Docente y estudiante pueden determinar los valores reales de **x** y de **y.**

Si dividimos el cuadrado ACEG, por un extremo de **x** y de **y** como muestra la figura2, se tiene que AB = **x**; BC = **y**, de igual manera, GF = **x**; y FE = **y .**

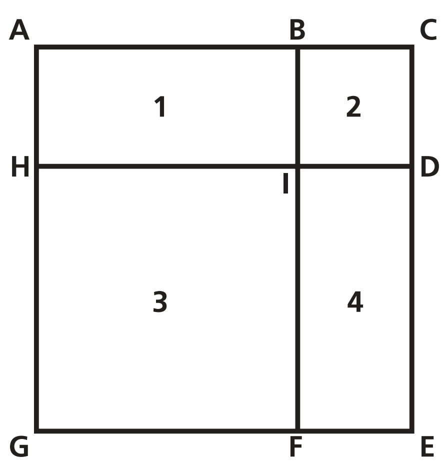


Fig. 2

1. Especifique qué tipo de figuras son las partes 1, 2, 3, 4. de la figura2
2. Compare cada una de las partes con las demás, establezca semejanzas, diferencias (entre lados, ángulos), identifique los segmentos paralelos, perpendiculares entre sí.
3. Determine el perímetro de las partes 1, 2, 3, 4, de la figura 2, con los valores reales antes asignados.
4. ¿Qué otras figuras se pueden generar? Determine el perímetro de cada una de ellas.
5. Determine el área de cada una de las figuras identificadas en el punto anterior y establezca relaciones entre ellas.

3.3. Actividad: Con pitillos plásticos y alfileres se le pide al estudiante que construya la figura 2.

Al cuadrado ACEG le aplicamos una deformación, a través de un estiramiento de dos vértices que pueden ser los vértices A,E obteniendo como consecuencia un cambio en la longitud de sus diagonales, como muestra la figura 3.

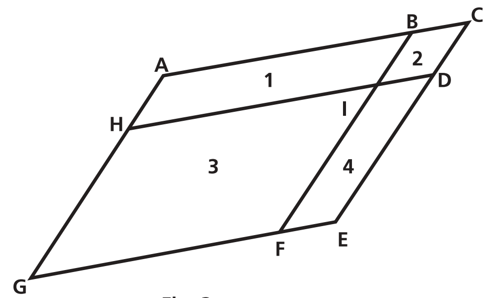
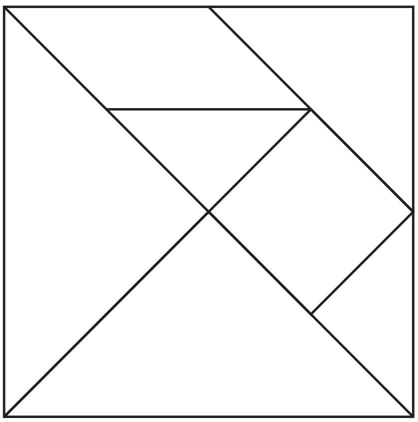


Fig. 3

1. ¿Qué transformaciones observas en las cuatro figuras componentes de la construcción con pitillos al deformarse como la figura 3, respecto a la misma construcción cuando no se ha deformado y se parece a la figura 2? (En cuanto a forma, ángulos, lados y diagonales).
2. Calcular el perímetro de los cuadriláteros de la construcción con pitillos cuando tiene la forma de la figura 2 y 3; Comparar los que sean correspondientes. ¿Qué se concluye?
3. Calcular el área de los cuadriláteros de la construcción con pitillos cuando tiene la forma de la figura 2 y 3; Comparar los que sean correspondientes. ¿Qué se concluye?
4. ¿Qué relación y diferencia existe entre las partes de la construcción con pitillos? Concluya y generalice.

3.4. SITUACIÓN N° 3: trabajo con el tangram



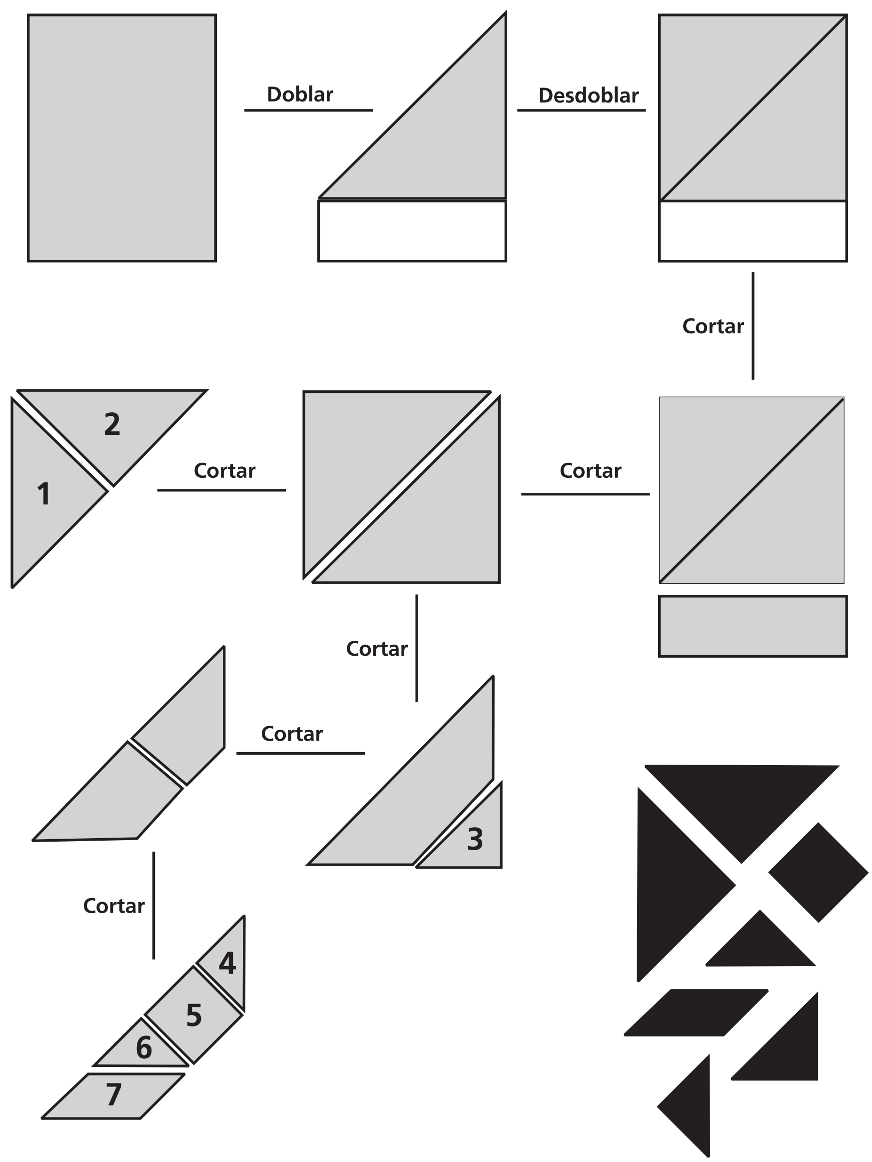
Grados 6º a 7º

Estándares:

Estándar 5º Resolver y formular problemas que involucran relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

Estándar 6º Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.

A través de esta situación problema se enriquece la caracterización y clasificación de figuras planas, el perímetro, el área y las relaciones entre estas.



Se pueden plantear interrogantes como las siguientes:

1- Utilizando todas las fichas arma un paralelogramo, un cuadrado, un trapecio, un rectángulo, y un triángulo rectángulo.

2- ¿Cuál es la relación entre el área del cuadrado original y el área de cada una de las figuras que se formaron?

3- ¿Cuál es la relación del perímetro del cuadrado inicial con el perímetro de cada una de las figuras que se formaron?

4- ¿Es posible que haya figuras con igual área y diferente perímetro?. ¿Se podrán encontrar figuras con igual área e igual perímetro que tengan forma diferente?

5- Construir todos los paralelogramos, cuadrados, trapecios y triángulos que tengan como área la mitad del área del cuadrado original. Hacer una tabla donde registre el área y el perímetro de cada una de las figuras construidas.

6- Que figuras se pueden construir con los ¾ del área del cuadrado original.

7- Es posible construir un triangulo rectángulo que tenga como área 9/16 del área del tangram original?

8- Utilizando sólo las 5 piezas más pequeñas (separando los triángulos más grandes) construya un cuadrado, un triángulo, un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio, un hexágono. ¿Cuál es la relación entre el área del triángulo más pequeño del tangram y el área de cada una de las figuras que acaba de construir?

9. Con el transportador mida cada uno de los ángulos interiores de cada una de las partes que conforman el Tangram, enumerándolos previamente para evitar confusiones y poder clasificarlos según su medida. Complete la tabla siguiente.

Angulo (medida)	**Agudo**	**Recto**	**Obtuso**

10 Utilizando todas las piezas arme un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio, un triángulo rectángulo. En cada una de las figuras determine el área, el perímetro y mida todos los ángulos.

11 Compare las áreas de cada uno de los polígonos que hacen parte del Tangram.

12 Con los resultados obtenidos en los numerales 3.3 y 3.6 complete la siguiente tabla y escriba sus observaciones.

Figura	Perímetro	Área

13 Exprese el área de cada una de las siete piezas que forman el TANGRAM con respecto al área del cuadrado inicial. Expresada en porcentaje, fracción y decimal.

14 Determine la suma de los ángulos interiores de cada polígono y trate de hallar una generalización para polígonos de n lados.

15 Armar otras figuras con todas las piezas, y calcular áreas y perímetros de las nuevas construcciones.

3.5. SITUACIÓN PROBLEMA Nº 04

Grado 6º y 7º

Estándar: resolver y formular problemas que involucran relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.

Se construye un rectángulo ABCD de base **x** y altura **y**, con pitillos. Se da libertad al estudiante que determine la medida de la base y la altura. Se pide a éste que calcule el perímetro y el área de dicho rectángulo.

Al estirar el rectángulo por dos vértices opuestos AC o BD este se deforma:

- ¿Como se llama la nueva figura?
- Calcular el perímetro y compararlo con el del ejercicio 1.
- Calcular el área, y compararla también con la del ejercicio 1.
- Comparar los lados y los ángulos de la figura inicial con los lados y los ángulos de la figura deformada.
- Completar la siguiente tabla cada vez que se deforma la figura inicial.

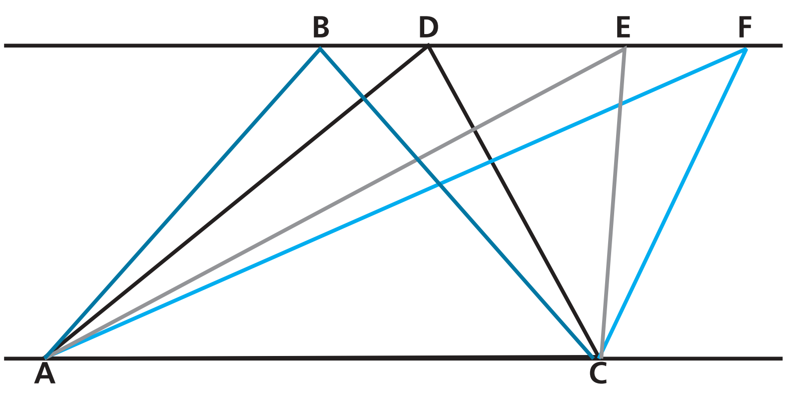
Angulos A, C	Área	Perímetro	Suma áng interiores
90º			
80º			
70º			
45º			
20º			

¿Qué se concluye del perímetro y del área del rectángulo y del paralelogramo?

Observaciones.

- Realizar el mismo proceso con un cuadrado de lado **x.**
- Estos ejercicios pueden hacerse en el computador con la ayuda del software CABRI y también con RYC.

Se propone que el estudiante repita el ejercicio anterior con triángulos que tengan igual base e igual altura como muestra la figura. Conocido el valor del ángulo A el estudiante debe medir con el transportador el valor de los dos ángulos restantes, efectuar la suma y completar la tabla.



Ángulos A, C	Área	Perímetro	Suma áng interiores
90º			
80º			
70º			
45º			
20º			

¿Qué puede decirse del área y el perímetro del triángulo?

¿Qué se concluye al comparar las dos tablas anteriores?

TALLER BÁSICO DE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

Con este taller se pretende aplicar y afianzar conceptos básicos de la geometría. Además de utilizar la regla y el compás tradicionales, en la construcción de objetos geométricos, se pueden utilizar softwares, tales como CABRI y REGLA Y COMPÁS (R y C), combinando en esta forma lo tradicional con los medios electrónicos actuales.

1. Construir un segmento de recta igual a uno dado.
2. Bisecar un segmento dado.
3. Construir la perpendicular a una recta dada, en un punto dado de ésta.
4. Trazar la perpendicular a una recta dada, por un punto dado exterior a ella.
5. Trazar una perpendicular a un segmento dado, en un punto medio. (Mediatriz).
6. Construir la paralela a una recta dada que pase por un punto exterior a ella.
7. Construir un ángulo igual a un ángulo dado.
8. Bisecar un ángulo. (Bisectriz).
9. Construir un ángulo doble y uno triple a otro dado.
10. Construir un triángulo equilátero conociendo el lado.
11. Construir un ángulo de 60º.
12. Construir un triángulo dados sus tres lados.
13. Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo que forman.
14. Construir un triángulo dados un lado y los dos ángulos contiguos a él.
15. Construir un triángulo dados dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.
16. Construir un triángulo rectángulo dados su hipotenusa y un cateto.
17. Construir un triángulo rectángulo conociendo sus catetos.

Proporcionalidad:

18. Dividir un segmento en un número cualquiera de partes iguales.
19. Dividir un segmento dado en partes que estén en una razón dada.
20. Construir el cuarto segmento proporcional de 3 segmentos dados.
21. Construir la media proporcional a 2 segmentos dados.
22. Construir un triángulo semejante a uno dado a partir de un segmento planteado como base.

Con circunferencias:

23. Construir la tangente a una circunferencia dada desde un punto de ella.
24. Construir una tangente a una circunferencia dada desde un punto exterior a ella.
25. Circunscribir una circunferencia a un triángulo.
26. Determine el centro de una circunferencia dada. No conocemos su radio, ni su diámetro.
27. Construir un octágono regular inscrito en una circunferencia dada.
28. Construir un hexágono regular inscrito en una circunferencia dada.
29. Construir un triángulo equilátero regular inscrito en una circunferencia dada.

OTROS PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1. Marquemos un punto A (sobre una esquina de la cuadrícula), ubiquemos un punto B situado 7 unidades a la derecha de A, luego ubiquemos un punto C situado a 7 unidades a la derecha y 5 hacia arriba de A, por último ubiquemos un punto D, 5 unidades arriba de A. Una los puntos ABCD, aproximemos el área y el perímetro del polígono formado. (Utilizar hoja cuadriculada).

2. Construyamos todos los rectángulos posibles de perímetro 20 unidades de longitud. Elijamos el que encierre mayor área. Sistematicemos la información y concluyamos. (Utilizar hoja cuadriculada).

3. Dados rectángulos de perímetro 28 y 32. Hallemos todos los rectángulos posibles para cada caso, con áreas diferentes.

4. Dado un rectángulo de área 24 unidades cuadradas, encontremos todos los rectángulos con perímetro diferente que tengan esta misma área. Pensemos lo mismo para rectángulos de áreas 12 y 36 unidades de área. (Sugerencia: tomemos lados de valores enteros para trabajar sobre la cuadrícula).

5. Marquemos un punto A (sobre la cuadrícula); desde A ubiquemos un punto B situado a 5 unidades a la derecha; desde B ubiquemos un punto C a 2 unidades a la izquierda y 4 unidades hacia arriba. Una los tres puntos, identifique la figura formada y calcule su área y su perímetro.

6. Construyamos y triángulos rectángulos diferentes. Calculemos el área y el perímetro de cada uno.

7. Construyamos 5 triángulos diferentes, que tengan la misma área.

8. Construyamos un triángulo que tenga la misma área que un cuadrado dado. Establescamos algún criterio general para encontrar la solución a este problema.

9. Construyamos un cuadrado que tenga la misma área que un triángulo dado. Establescamos algún criterio general para encontrar soluciones a este problema.

ANEXO

Modelo de Van Hiele

Es nuestro propósito presentar a consideración de los educadores una propuesta en relación con la operacionalización de los estándares propuestos por el MEN en relación con la enseñanza de la geometría en la educación básica y media. Para ello retomamos la experiencia recogida, analizada y teorizada por los Holandeses DINA VAN HIELE Y PIERRE VAN HIELE, conocida en nuestro medio como el modelo de VAN HIELE.

Este modelo surgió a raíz de los problemas cotidianos que se presentan en el aula de clase en actividades propias del aprendizaje de la geometría en particular.

Un modelo es una representación de un fenómeno real. Si el modelo es matemático, describe matemáticamente una situación concreta por ejemplo: el modelo de la proporcionalidad, "**a** es a **b** como **c** es a **d**", describe la variación entre magnitudes. Un modelo educativo como el de los esposos VAN HIELE tiene que ver con el desarrollo intelectual, y particularmente con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Dicho modelo pretende establecer una relación adecuada entre profesores y alumnos para lograr con más facilidad el acceso a niveles superiores de razonamiento, para lo cual se divide en dos aspectos: describe y da directrices de razonamiento.

1.1.1 ASPECTO DESCRIPTIVO.

El aspecto descriptivo intenta explicar como razonan los estudiantes, para lo cual, identifica cinco niveles de razonamiento que suceden siempre que el estudiante aborda un nuevo conocimiento. La superación de cada nivel no está sujeta a una edad en particular, algunos estudiantes no superan nunca el segundo nivel, otros alcanzan el cuarto nivel a los 14 ó 15 años y el quinto nivel en algunos casos es alcanzado a través los estudios superiores. La superación de dichos niveles tampoco se da, necesariamente, en forma continua y está estrechamente ligada al contexto de actuación de las personas. Van Hiele (1986) acepta avances bruscos cuando afirma "…Había partes de las matemáticas que yo podía explicar y explicar y aún así los alumnos no entendían…De pronto parecía que entendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido".

1.1.2 NIVEL 1: RECONOCIMIENTO.

Se caracteriza porque los estudiantes:

- Perciben las figuras geométricas en su totalidad, esto es, no se diferencian elementos y propiedades relievantes, las diferencias que se establecen son de carácter físico y global, (por ejemplo el número de puntas que tiene el objeto, o si no tiene puntas) el niño dice: tiene forma de…

Puede afirmarse que en éste nivel se hace una clasificación interfigural, ya que no se reconocen las propiedades matemáticas de los objetos geométricos.

- Se diferencia el aspecto físico de los objetos sólo en presencia de ellos, es decir, la semejanza se expresa como: se parece a.
- Como consecuencia de lo anterior el estudiante clasifica los objetos geométricos sólo en su relación nombre figura, por tal razón para él un cuadrado no es un rectángulo.
- Este nivel en el que ubicamos a los niños de preescolar y primeros años de primaria, no es exclusivo de ellos, está presente siempre que un nuevo concepto le llega al estudiante. Puede ocurrir que en un nivel de escolaridad superior, ante una nueva situación de aprendizaje, el paso por el nivel de reconocimiento sea más rápido.

1.1.3. NIVEL 2: DE ANÁLISIS.

Se caracteriza por los siguientes aspectos:

- Reconoce las partes del objeto geométrico en estudio y algunas de sus propiedades matemáticas aunque de manera informal.
- No relaciona propiedades entre sí, por lo tanto no puede hacer clasificaciones lógicas, es decir, clasificaciones lógico deductivas, en las que se concatenen: definiciones, axiomas y propiedades de los objetos geométricos.
- Realiza generalizaciones por experimentación, en consecuencia se requiere la presencia del objeto. En el caso del cuadrado por ejemplo es posible que identifique características como: tener lados iguales, ángulos rectos, lados paralelos y diagonales, sin embargo no alcanza a apreciar que la igualdad de las diagonales es consecuencia de la igualdad de ángulos.

1.1.4. NIVEL 3: DE CLASIFICACIÓN.

- Se inicia el razonamiento formal, en la medida, en que descubre que unas leyes se deducen de otras, sin embargo estas implicaciones, aunque permiten hacer clasificaciones, todavía requieren la presencia de los objetos.
- Se comprenden los pasos sucesivos de un razonamiento formal, pero en forma aislada, ya que no se ve la necesidad de encadenarlos.
- No comprende la estructura axiomática de la geometría, en consecuencia no ve la necesidad de la demostración por razonamiento deductivo. Para él es suficiente hacer verificaciones de casos particulares.

1.1.5. NIVEL 4: DEDUCCIÓN FORMAL.

En éste nivel:

- Puede realizar razonamiento lógico formal (demostraciones de varios pasos con sentido y por necesidad como medio de verificar la verdad de una afirmación.)

- Se está en capacidad de comprender la estructura axiomática de las matemáticas y en particular de la geometría.

- Acepta la existencia de equivalencias y de demostraciones alternativas que permiten llegar a los mismos resultados.

1.1.6. NIVEL 5: RIGOR MATEMÁTICO.

En este nivel es posible manejar diversas geometrías procedentes de diferentes sistemas axiomáticos. Se dice que algunos estudiantes logran este nivel sólo a medida que avanzan en sus estudios superiores.

1.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS NIVELES.

- Cada nivel de razonamiento se caracteriza por tener un lenguaje propio, es decir, los estudiantes que pasan de un nivel a otro se cualifican en su lenguaje. Un mismo término adquiere connotaciones diferentes de un nivel a otro. Por ejemplo el término **demostrar,** en el primer nivel carece de sentido, es razonar en forma dispar, en el nivel 2 demostrar es dar ejemplos de casos particulares, en muchos casos es verificar por medio de mediciones; en el nivel 3 el concepto se aproxima al razonamiento logico-deductivo de los matemáticos, aunque de manera informal, sin rigor; en el nivel 4 la demostración adquiere el sentido axiomático propio de los matemáticos.

- Otra característica es la jerarquización, entendida, como el proceso que permite pasar de un nivel inferior a otro superior y no viceversa. Si un estudiante haciendo uso de la memorización aparenta estar en un nivel de deducción formal, al planteársele un problema diferente al memorizado, intentan resolverlo usando al pie de la letra los métodos que conocen, por lo tanto el fracaso es inminente ante procedimientos inapropiados.

- El paso de un nivel a otro, como se dijo en el aspecto descriptivo, se produce no necesariamente en forma continua- no confundir el comprender un problema completo, con la adquisición de la destreza en el manejo del nuevo tipo de razonamiento- cada nivel se caracteriza por la adquisición de varias habilidades de razonamiento, por lo tanto, se supera un nivel cuando se tiene dominio de las respectivas destrezas.

1.3. LAS FASES DEL MODELO DE VAN HIELE

Son unas etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven a un nivel superior de razonamiento.

1.3.1. FASE 1: INFORMACIÓN.

- Su finalidad es la de obtener información recíproca profesor-alumno. Por su parte, el profesor averigua qué saben los alumnos sobre el tema que se va abordar (saberes previos) y la forma de razonar que tienen. Por otra parte, los alumnos entran en contacto con el objeto y hacen el reconocimiento respectivo.

1.3.2.FASE 2: ORIENTACIÓN DIRIGIDA

- El estudiante debe consultar sobre los elementos básicos: que descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras etc. así empieza a tener la red del nuevo nivel. Las actividades deben ser cuidadosamente seleccionadas para que le sirvan de base al nivel superior.

1.3.3. FASE 3: EXPLICITACIÓN.

- Se pretende en esta fase que los estudiantes intercambien sus experiencias y aprendan el nuevo vocabulario. No se recomienda introducir, conceptos nuevos si no afianzar el trabajo anterior.

1.3.4. FASE 4: ORIENTACIÓN LIBRE.

- Se pretende que el estudiante aplique los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. Los problemas deben presentar situaciones nuevas, ser problemas abiertos que ayuden a completar la red.

1.3.5. FASE 5: INTEGRACIÓN.

- Se busca condensar en un todo el dominio que ha explorado el pensamiento (lo nuevo y lo que se tenia) las actividades deben estar orientadas a acumular, comparar y combinar lo que ya se conoce (no conceptos nuevos).

- Completada esta fase los alumnos tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que la sustituye, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

BIBLIOGRAFÍA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Santafé de Bogotá, 1998, p 131.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Matemáticas. Santafé de Bogotá, 2003.

GALVEZ, Grecia. La geometría, la Psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela primaria. En Didáctica de la matemáticas. Aportes y Reflexiones. Cecilia Parra e Irma Saiz (Comp.). Paidos Educador. Argentina. 1998.

OBANDO Z, Gilberto; MUNERA, John Jairo. Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. Educación y pedagogía. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, no. 35, (enero- abril), 2003 pp 183-200.

SEPARADOR 4

LOS ESTÁNDARES CURRICULARES DEL PENSAMIENTO MÉTRICO PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

(Una propuesta de trabajo en el aula)

Maria Denis Vanegas Vasco
I.E. La Paz. Municipio de Envigado

Jesús María Gutiérrez Mesa
I.E. Guadalupe ,Municipio de Medellín

Amzolicreyth Galarcio Arboleda
I.E. Luis Eduardo Arias Reinel, Municipio de Barbosa

febrero de 2005

PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

INTRODUCCIÓN

El pensamiento métrico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes, su cuantificación y su uso con sentido y significado para la comprensión de situaciones en contextos. Éste también está relacionado con la medida de las cantidades de magnitud, su estimación y aproximación, al igual que con la capacidad de usar instrumentos de medida.

En Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y en Los Estándares Básicos de Matemáticas, el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, se refieren a la construcción de los conceptos y procesos de conservación de las magnitudes; la selección de unidades de medida, patrones e instrumentos; la asignación numérica; la estimación y el papel del trasfondo social de la medición. Todo lo anterior hace que el concepto potente para el desarrollo del pensamiento métrico sea el de Magnitud.

Habitualmente se suele reservar el nombre de magnitud a los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad,..) o también de manera discreta (número de personas,...) las cantidades son los valores de dichas variables (Godino y Batanero, 2002, p 10).

Este énfasis en el concepto de magnitud, implica una reconceptualización profunda de la manera como es tratado este tipo de pensamiento en el currículo actual de matemáticas. En vez de reducir el pensamiento métrico al estudio teórico de los sistemas de unidades y los algoritmos para realizar las transformaciones de unidades de una medida determinada, éste debe ser centrado en el estudio del concepto de magnitud, de los procesos de medición, de la construcción de los conceptos de unidades de medida, y por tanto, de sistemas de unidades de medida, así como de su uso, sentido y significado en el tratamiento de las situaciones en las cuales tienen su origen.

Al poner el énfasis en los procesos de medición se pueden establecer puentes muy importantes desde este pensamiento hacia los demás pensamientos, como por ejemplo, con respecto al pensamiento numérico, en el cual el concepto de magnitud y sus procesos de medición son claves para el desarrollo de los conceptos relativos a los sistemas numéricos, especialmente, los naturales, racionales y enteros.

¿POR QUÉ PENSAMIENTO MÉTRICO?

La medida de las magnitudes en el contexto escolar, requiere de una reflexión sobre las relaciones entre las matemáticas y la realidad la cual no parece tenerse en cuenta por muchos docentes de matemáticas, pues generalmente los estudiantes se ven sometidos a procesos de medición con instrumentos refinados y complejos, más aún se ven en tareas de conversión de unidades, sin haberse acercado conceptualmente a las magnitudes y sus medidas y sin darse cuenta de la necesidad misma de medir.

DESDE LOS LINEAMIENTOS CURRICULARES.

El texto de Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), del área de Matemáticas, es una propuesta del Ministerio de Educación Nacional y un grupo de docentes del área que proponen algunos criterios para orientar el currículo y los enfoques que debería tener la enseñanza de las matemáticas en el país, con el fin de que se estudie la fundamentación pedagógica de dicha área y se intercambien experiencias en el contexto de los Proyectos Educativos Institucionales.

Los Lineamientos organizan el currículo matemático en tres grandes aspectos: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto. Los procesos generales tienen que ver con el aprendizaje, es decir, el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, comparación y ejercitación de procedimientos. Los conocimientos básicos se relacionan con los conceptos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con los sistemas propios de las matemáticas: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. El contexto hace alusión a los ambientes que rodean al estudiante y que contribuyen al sentido de las matemáticas que aprende, acá cobra especial importancia las situaciones problemáticas que surgen de las mismas matemáticas, de la vida diaria y de las otras ciencias.

Según las consideraciones planteadas por el Ministerio de Educación Nacional en los Estándares y en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, el pensamiento métrico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes, su capacidad para abstraerlas de los fenómenos, para medirlas, para compararlas entre sí, operar con sus medidas y aplicarlas en diferentes contextos; utilizando como herramienta básica los sistemas de medidas y haciendo énfasis en los siguientes aspectos:

- La construcción de los conceptos de cada magnitud.
- La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.
- La estimación de magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”.
- La apreciación del rango de las magnitudes.
- La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos.
- La diferencia entre la unidad y el patrón de medida.
- La asignación numérica.
- El papel del trasfondo social de la medición.

DESDE LOS ESTÁNDARES BÁSICOS DE MATEMÁTICAS

En los dos últimos años en el país se ha venido discutiendo los “estándares básicos de matemáticas”, pretendiendo con ellos unificar criterios en torno a los conceptos, procesos y contextos que deben orientar cada uno de los ejes temáticos que conforman el currículo del área de matemáticas.

Los estándares son criterios que permiten organizar el currículo de matemáticas. Son un punto de referencia de lo que un estudiante puede estar en capacidad de saber y saber hacer, en una determinada área o en determinado nivel.

Los estándares están definidos sobre la base de tres ejes, el conceptual, el procedimental y el contextual. El eje conceptual de los estándares está constituido por lo que los Lineamientos Curriculares denominan "los conocimientos básicos"(mencionados anteriormente); El eje procedimental lo constituyen los procesos básicos de la matemática escolar. En cuanto a lo contextual se parte de los contextos individuales de quien aprende los conceptos y del contexto propio del saber específico al cual pertenecen.

Para el pensamiento métrico estos ejes se caracterizan de la siguiente manera:

Dos ejes conceptuales articulan toda la propuesta para el desarrollo del pensamiento métrico: Las magnitudes y los sistemas de medición.

Con respecto a las magnitudes se propone para los primeros grados de la educación básica estándares como:

- Reconocer y diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos... comparar y ordenar objetos... reconocer el uso de las magnitudes y de las dimensiones de las unidades.

Para los procesos de medición se plantean estándares como:

- Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados... seleccionar unidades para la medición... utilizar técnicas y herramientas para la medición... relacionar unidades para la medición de diferentes magnitudes.

De otro lado identifica unos procesos asociados al cálculo con unidades de medida, la estimación de medidas y la resolución de problemas asociados a la medición de áreas, perímetros y volúmenes entre otros, usando unidades convencionales o estandarizadas; además de la selección de unidades apropiadas y la utilización de instrumentos de medida en situaciones problemáticas.

Al plantear otros ejes temáticos aparecen estándares asociados a situaciones de medición o al uso de magnitudes, como:

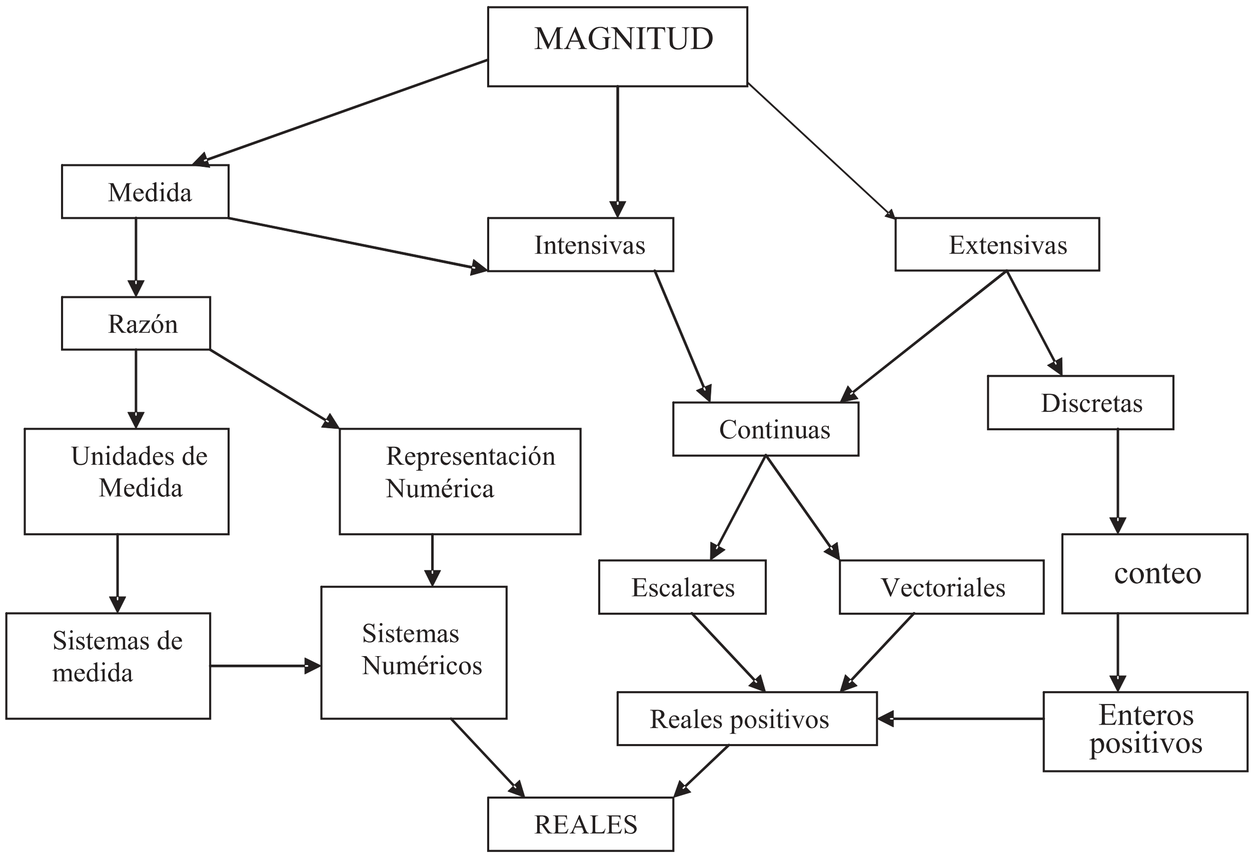
-En el pensamiento numérico:

- "Describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes"
- "Utilizar números (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida".

-En el pensamiento variacional:

- "Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias".

En el siguiente esquema se presentan los conceptos y algunas relaciones que estructuran el pensamiento métrico, además de posibles puentes con otros conceptos matemáticos.



La intuición sobre las magnitudes, implica inmediatamente su cuantificación a través de la medida, entendida esta como la asignación numérica que resulta de comparar o determinar el número de veces que otra magnitud del mismo género, tomada como unidad de medida, cabe en la magnitud a medir. A manera de ejemplo, una masa de 3,5 Kilogramos, significa que se ha comparado una masa de un kilogramo con otra más grande que la contiene tres veces y media.

La posibilidad de componer, por ejemplo, una masa de 3,5 Kg como tres veces y media una masa de un kilogramo, hace que a esta magnitud y a otras que cumplan la misma característica (aditiva), se les designe como magnitudes extensivas.

Hay otro tipo de magnitudes como la temperatura, en donde este proceso de componer magnitudes a partir de otras del mismo género, no es posible. Así, una temperatura de 70ºc no se puede componer a partir de una temperatura de 30ºc y otra de 40ºc; sin embargo se puede medir. A este tipo de magnitudes se les llama intensivas.

A las primeras, en donde la suma es posible con sentido (agregar), se les conoce como extensivas, a las segundas en donde la suma no es posible con dicho sentido, se les llama intensivas.

Las magnitudes también se pueden clasificar en discretas y continuas; en las discretas, las medidas de las magnitudes se pueden expresar con números naturales, en las continuas, las medidas de las magnitudes no siempre se pueden expresar con números naturales y por lo tanto debe recurrirse a los números reales.

Por ejemplo, son magnitudes continuas, la longitud, el peso, el tiempo, entre otras; y son magnitudes discretas las que tienen que ver con el conteo: cuando se cuentan objetos, personas o animales se habla de magnitudes discretas. Existe un isomorfismo entre los números y las medidas de las magnitudes; sí ese isomorfismo se establece entre las cantidades de las magnitudes y los números naturales, se dice que son discretas y si el isomorfismo se establece entre las cantidades de magnitud y los números reales, se habla de magnitudes continuas.

Las magnitudes continuas, a su vez, se dividen en escalares y vectoriales, considerando como escalares aquellas magnitudes cuyas medidas pueden ordenarse linealmente, ello quiere decir que entre dos elementos diferentes cualquiera, puede definirse una relación de orden ($\leq$) con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Las demás se consideran vectoriales. Son magnitudes escalares, el tiempo, la longitud, la masa, el volumen, etc.; son magnitudes vectoriales, la velocidad, el peso, la aceleración, entre otras.

EN UN CONTEXTO HISTÓRICO

Es necesario dar una mirada a la historia de las matemáticas para identificar allí las concepciones que el hombre, directa o indirectamente elaboró de los conceptos más primitivos de las matemáticas, como el de las magnitudes y sus mediciones, para analizar obstáculos epistemológicos que, o bien, potenciaron la construcción de los conceptos, o por el contrario, impidieron su desarrollo.

Los griegos (siglos VII a III a.n.e), fueron conocedores de las matemáticas egipcias y babilónicas por sus prácticas comerciales y por el uso en las construcciones, pero llevados quizás por la idea de considerar que el conocimiento práctico no tenía el carácter científico, no dejaron grandes evidencias escritas de ello; sin embargo su mayor contribución está en la construcción teórica de muy buena parte de ellas y uno de estos ejemplos está en la construcción de la teoría de las magnitudes, que les permitió profundizar en muchos otros temas de las matemáticas y de las ciencias, a la vez que superar serios problemas originados quizás por el descubrimiento de los inconmensurables de un lado, además de la imposibilidad para aceptar el infinito actual, tal vez como consecuencia de la “dicotomía continuo-discreto que estuvo presente a lo largo de la historia de las matemáticas y sólo fue superada hacia finales del siglo XV con los trabajos de Simón Stevin” (Obando Z., 2002…)

La ausencia de argumentos a favor de un continuo numérico obligó a los matemáticos griegos a pensar un continuo físico, sugerido por las magnitudes geométricas; siendo Eudoxo quien introduce la idea de magnitud continua; no se trataba de un número, sino de entidades geométricas (longitud, área, volumen, etc) las cuales eran continuas, contrariamente a los números que eran discretos.

Este tratamiento teórico de las magnitudes y de sus medidas, permitió, por una parte un refinamiento de la teoría de las proporciones en primer lugar y de las razones en segundo lugar. Además permitió superar la crisis generada por el descubrimiento de los irracionales, dejando las bases para la teoría moderna de los números reales.

EN UN CONTEXTO MATEMÁTICO

Magnitud.

Algebraicamente se define la magnitud como un *semigrupo conmutativo y ordenado, formado por clases de equivalencia que son sus cantidades:* dado un conjunto M, no vacío, se constituye en una magnitud, si en él puede definirse una relación de equivalencia (=) y una operación interna suma (+); con las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva, para la relación de equivalencia, y asociativa, conmutativa y modulativa para la operación interna (+).

Si en el conjunto M se ha definido la relación de equivalencia y la operación (+) con las condiciones para cada una, decimos, que "los elementos de M, definen, una magnitud" (Luengo, 1990, p 48), entendiendo ésta, por la cualidad común que hace que los elementos a, b, c, de M sean igualables.

Hasta aquí podemos afirmar que (M,+) es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

Cantidad de magnitud.

Con el término "cantidad de magnitud" nos referimos a aquello que tienen en común todos los elementos iguales entre sí, y todos los objetos que tienen la misma cantidad de magnitud forman una clase de equivalencia. Las cantidades de magnitud se pueden comparar entre sí; es decir, que en los elementos de M puede definirse una relación de orden, esto es, dados los elementos de M, al compararlos bajo la relación $\leq$, se da la ley de tricotomía con las propiedades: Reflexiva, antisimétrica, transitiva.

Quedan definidas las magnitudes desde el punto de vista algebraico como "un semigrupo conmutativo con elemento neutro totalmente ordenado".

Tipos de magnitudes.

Si bien la magnitudes han sido definidas desde su estructura algebraica éstas tienen un carácter mucho más intuitivo en las matemáticas escolares, ya que es a partir de la manipulación de objetos en donde se pueden determinar aquellas cualidades o atributos medibles. Es por ello que la tipología de las magnitudes, sus medidas, unidades de medida y sus sistemas de medición se hace atendiendo más a ese carácter intuitivo, y desde el punto de vista físico, más que desde el punto de vista algebraico.

- **Magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas:**

Magnitudes fundamentales son aquellas que se definen por sí mismas en el proceso de medición, usando sus respectivas unidades de medida son también llamadas indefinidas o primarias. Se definen en el Sistema Internacional (SI) cinco magnitudes fundamentales con su respectiva unidad básica de medida y su respectivo símbolo:

Magnitudes fundamentales (S.I. Sistema Internacional)

MAGNITUD	NOMBRE DE LA UNIDAD BASICA	SIMBOLO
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	Kg
Tiempo	Segundo	S
Intensidad de corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	Mol
Intensidad luminosa	Candela	Cd

Las magnitudes que se definen a partir de otras (fundamentales), o que no son medibles directamente se les denominan **derivadas**, como es el caso de la velocidad que se define a partir de la longitud o distancia y el tiempo. En el sistema internacional se definen otras magnitudes denominadas complementarias como son: el ángulo plano cuya unidad es el radián (rad.) y el ángulo sólido cuya unidad básica es el estereorradián (sr.).

- **Magnitudes escalares y magnitudes vectoriales:**

$r \in R^+$

"Toda magnitud definida en un conjunto M se llama escalar si los elementos del conjunto pueden ordenarse linealmente" (Luengo, 29, p, 53), O como ya se dijo que una magnitud que tenga estructura de semimódulo ordenado, con un orden compatible con su ley de composición, sobre el semianillo, (/R, +.), se denomina magnitud escalar. Si el semianillo es el de los números reales positivos diremos que la **magnitud es escalar continua**, si el semianillo es el de los número naturales diremos que es una **magnitud escalar discreta**. En forma intuitiva se denominan magnitudes escalares, aquellas cuyas cantidades de magnitud quedan completamente expresadas con un número y una unidad.

Medida.

Si dada una cantidad de magnitud "a" cualquiera que pertenece a M y definida una unidad "**e**" que pertenece a M, entonces , $\exists r \in R / \forall a \in M, a = r.e$ Decimos que "r" es la medida de "a" con respecto a la unidad **e**.

Se puede definir la "unidad de medida **e**" como ese elemento que pertenece a M, tal que multiplicado por el $r \in R^+$ adecuado, puede expresar cualquier cantidad de magnitud, o de otra forma, "cualquier cantidad de magnitud puede ser expresada como el producto de un por una cantidad fija llamada unidad de medida ". (Luengo, 1990, p 58).

EN UN CONTEXTO DIDÁCTICO

Para abordar un esquema conceptual en el campo de la didáctica, se sugiere al maestro, posicionarse en los diferentes conceptos y plantear situaciones que permitan enfatizar en estos y mostrar relaciones con otros.

"Una situación didáctica es un conjunto de relaciones establecidas explícitas y/o implícitamente entre un alumno o grupo de alumnos, un sistema educativo y un medio" (Grecia Gálvez).

A continuación se presenta un esquema que puede dar cuenta de varias actividades tendientes al desarrollo del concepto de la magnitud longitud:

Lenguaje Matemático	E	Partición de E: P	Orden sobre P
Actividades (objetos y procedimientos)	Segmentos Barras Cuerdas Hilos	Clases de objetos de igual longitud Cada clase define una longitud	Longitudes ordenadas
	Tallado Comparación Según el criterio " ...es tan largo como..."	- Comparación dos a dos de representantes de diferentes clases - Se ordenan las longitudes	

(Tomado de Chamorro María del Carmen y Juan Miguel Belmonte. EL problema de la medida. Didáctica de las Magnitudes lineales. Editorial Síntesis, No 17)

Se sugiere en forma similar plantear y diseñar cuadros correspondientes a las otras magnitudes fundamentales o puede remitirse al texto reseñado anteriormente.

SITUACIONES PROBLEMAS

Situación 1

Estándares asociados:

- Con respecto a los conceptos de magnitud los numerales 1 y 2 de los grados 1º a 3º.
- Con respecto a los sistemas de medida el numeral 3 y 4 de los grados 1º a 3º.

Actividad 1

Los estudiantes se organizan por equipos. A cada uno de los cuales se le entregará un juego de diez varillas que no tienen una medida determinada pero que guardan la siguiente relación:

Varilla A: ________________________

Varilla B: ____________ ____________ dos varillas (cada una la mitad de la varilla A.)

Varilla C: ________ ________ ________ ________ cuatro varillas (cada una la cuarta parte A).

- Compárelas entre si, ¿cuántas veces cabe una en otra? Hacerlo con todas, estableciendo todas las relaciones posibles y explicando lo que se hace, así:

  La varilla A es ____________ la varilla B
  La varilla B es ____________ la varilla B, etc.

- Medir largo y ancho del salón, o de otros objetos, utilizando las diferentes varillas.

Sugerencias metodológicas

Se debe permitir, además, incluir otras varillas que no se puedan medir unas con otras exactamente, situación que será parte de la discusión en grupo con el fin de establecer estados de complejidad.

También se permite hacer uso de los pies, las manos u otros objetos arbitrarios para hacer mediciones relacionadas con cada una de las longitudes. Discutir la conveniencia de ciertas unidades para ciertas mediciones.

Simultáneamente con los procesos concretos de medición, se deben validar y utilizar diferentes formas de representación: icónica y simbólica de las medidas, enfatizando en que la expresión de una medida requiere que se asigne un número y una unidad, ejemplo: 3 pasos, 6 cuartas.

El segmento de recta ha sido un instrumento válido para la representación icónica de las medidas de longitud y que puede usarse para representar los objetos concretos, las varillas.

Luego se socializa el trabajo realizado, con el propósito de analizar y explicar el uso de las unidades de medida y de los instrumentos de medición.

Actividad 2

Construir una regla graduada, no convencional.

1. Recortar una regleta de madera o de cartón de cualquier longitud.
2. Recortar también una cinta de papel del mismo tamaño, doblarla en dos partes iguales, colocarla sobre la regleta, haciendo coincidir los dos extremos y hacer una marca sobre el punto medio de la regleta, proceder de igual manera para la mitad de la mitad y así, hasta completar 8 divisiones o más, a lo largo de toda la regleta.

Después de realizar todos los dobleces y las marcas, recortar la tira de papel por cada uno de ellos. A continuación discutir con los alumnos preguntas y situaciones como las siguientes:

¿Cómo son esos espacios entre las marcas obtenidas sobre la regleta?; comparar los espacios entre las marcas con los pedazos de papel obtenidos; utilizar la regla construida para medir el largo y el ancho del salón u otros objetos; expresar por escrito la medida encontrada; comparar las unidades de medida con las utilizadas por otros compañeros; ¿por qué las medidas no son iguales si medimos las mismas distancias?, ¿cuáles medidas crees que son más exactas y por qué?; ¿hay igual número de pedazos de papel que marcas en la regleta?, justifique su respuesta; si enumeramos todas las marcas en orden partiendo del 1, ¿Qué números le corresponden a los extremos de la regleta?

Sugerencias metodológicas

Con esta actividad se puede iniciar un proceso dinámico de la medición, al permitir trasladar y sobreponer trozos de la tira de papel sobre cada tramo obtenido en la regleta. Actividad que inicia en las técnicas de cortar y pegar que serán útiles en los temas relacionados más tarde con el cálculo de áreas.

Téngase en cuenta que las dimensiones (ancho y grosor de la regla y del papel), se despreciarán con el ánimo de centrar la atención sólo en la distancia, objeto de medición y la unidad de medida como espacio entre dos marcas.

Después de construir la regla con marcaciones, se utiliza en situaciones prácticas de medición; es conveniente que el educador aproveche la situación para, realizar la socialización de la experiencia, planteando la necesidad de estandarizar las unidades y las medidas.

Situación 2

Propósitos:

- Reconocimiento de unidades de medida de longitud.
- Establecer relaciones entre diferentes unidades de medida de longitud.
- Uso de patrones e instrumentos de medida.

Estándares asociados:

Grados 1º a 3º:

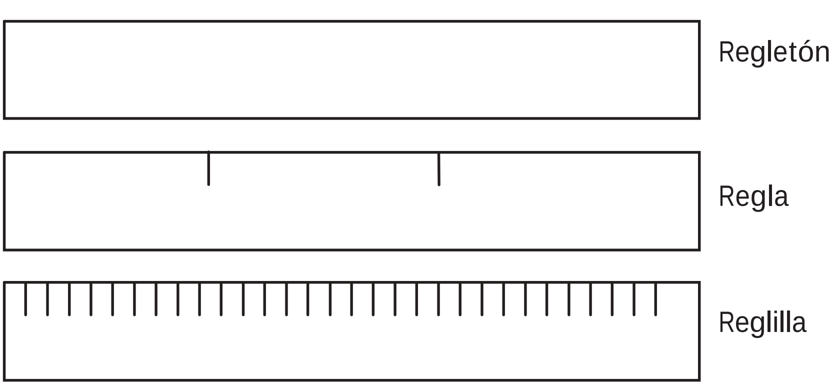
- Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados de acuerdo al contexto.

- Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición.

Grados 8º y 9º

Seleccionar y usar técnicas de instrumentos para medir longitudes, áreas de superficie, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

Materiales: Hojas de papel para consignar explicaciones; tres cintas de papel: una graduada cuyas unidades corresponden a centímetros, otra graduada cuyas unidades corresponden a decímetros y otra sin graduar; las cintas tienen una longitud igual de 30 centímetros.



Descripción:

1. A cada estudiante se le entregará una cinta o tirilla de papel no graduada (30 cm), y se le pedirá que mida con ella el largo de su cuaderno o del libro. Llamaremos "regletón" a esta primera regla y **alfa** (α) a la unidad.

   Luego se hará una discusión sobre los valores obtenidos, los estudiantes deben justificar la medida obtenida.

2. Se entrega una segunda cinta al estudiante para que mida nuevamente el largo del cuaderno (el mismo que midieron en la actividad anterior). La segunda cinta está dividida en tres partes iguales (3 decímetros). Llamaremos "regla" a la segunda cinta y **Beta** (β) a cada unidad en que está dividida. También se socializarán los resultados obtenidos.

3. Se entrega una tercera cinta graduada (en centímetros) y se repite el proceso. Llamaremos "reglilla" a la nueva regla y **lambda** (λ) a las unidades en las que está dividida, para que las compare y llene la siguiente tabla:

Expresa en cada casilla los resultados de medir las unidades de cada una de las cintas, con las otras dos.

Medir / con	α	β	λ
α			
β			
λ			

Análisis Didáctico:

1. Se espera que el estudiante mida el largo de su cuaderno con el "regletón "y exprese el resultado en términos de α: mide un α,o por el contrario que diga que no es posible medir el largo de su cuaderno con dicho instrumento.

2. En la discusión deberá surgir la necesidad de utilizar otros instrumentos con otras unidades para hacer la medida correspondiente, así se les entregará "la regla", para que expresen sus resultados nuevamente, por ejemplo: un β, o 2β.

3. También en la socialización debe replantearse la necesidad de medir utilizando otras unidades que permitan mayor precisión, así se les entregará "la reglilla", y obtendrán resultados como: 25λ, o 30λ, algunos inclusive podrán pensar en utilizar las dos últimas unidades, así: $2\ \beta$ y $8\ \lambda$.

Situación 3

Propósito: Hallar la medida entre dos puntos usando unidades del sistema métrico decimal.

Estándares asociados:

Para grado 6º y 7º:

- Identificar relaciones entre unidades para medir diferentes magnitudes.

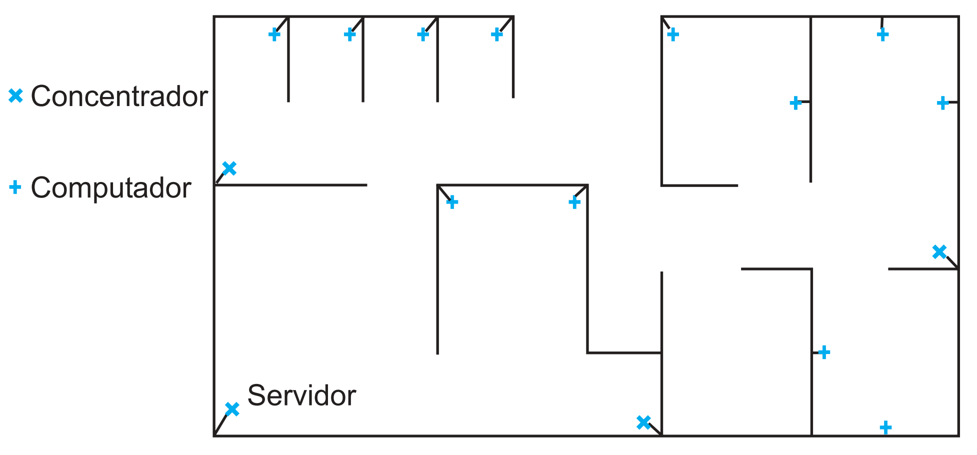
Para 8º y 9º.

- Seleccionar y usar técnicas de instrumentos para medir longitudes, áreas de superficie, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

- Justificar la pertinencia de utilizar unidades de medida específicas en las ciencias.

Descripción:

Determinar con la mayor precisión posible cuanto cable se necesita para conectar los computadores en red, si cada concentrador puede conectar cuatro computadores, y cada concentrador se conecta directamente al servidor. Se dirá que por cada centímetro medido con la regla se tendrá que comprar un metro de cable o su equivalente por fracción de éste.



Análisis Didàctico:

1. Si no se hace la aclaración (el cable debe pasar por las paredes solamente), es posible que los estudiantes inmediatamente se les entregue el material empiecen a trazar líneas entre cada computador y uno de los concentradores y de estos hacia el servidor, y que empiecen a medir indistintamente.

2. Después de ubicar los concentradores, el servidor y los doce computadores, también es posible que el estudiante determine por tanteo o por estimación el cable que se necesita. Podrá pensar

en una sala normal de sistemas o en un salón de clase y tener alguna guía o punto de referencia, diciendo por ejemplo que se necesitan 100 metros de cable o noventa, por lo general con números enteros y aproximados a las decenas.

3. En la medida que se vaya avanzando en el proceso y dialogando con los estudiantes, estos determinaran una forma organizada de medir las longitudes y hacer los cálculos necesarios: Sea **P** el concentrador de la izquierda, **Q** el de la derecha y **R** el del centro inferior. Sean **C1**, **C2**, **C3**, **C4**, los computadores que están colocados en la parte superior de izquierda a derecha respectivamente y que se podrán conectar con **P**. **C5**, **C6**, **C7**, **C8**, los computadores colocados en la parte superior derecha (de izquierda a derecha respectivamente) y que se pueden conectar con **Q**. Y **C9**, **C10**, **C11**, **C12**, los otros cuatro computadores que se pueden conectar con **R**. Y por último considérese **S** al servidor.

4. Las distancias:

- Entre los concentradores y el servidor son respectivamente:
  PS= 3cm, RS = 6cm, QS = 12cm.
- Entre los computadores y el respectivo concentrador son:
  C1P = 3cm; C2P = 4cm, C3P = 5cm, C4P = 6 cm
  C5Q = 7cm, C6Q = 6cm, C7Q = 5cm, C8Q = 2cm
  C9R = 3cm, C10R = 3cm, C11R = 4cm, C12R = 6cm

5. Cálculo del cable total, se espera que el estudiante desarrolle un proceso similar al planteado acá, sumando las cantidades de medida de las distancias anteriormente obtenidas y luego teniendo en cuenta que cada centímetro en el papel corresponde a un metro en la sala real:

   PS + RS + QS = 21cm
   C1P +C2P +C3P + C4P = 18cm
   C5Q + C6Q + C7Q + C8Q = 20cm
   C9R + C10R +C11R + C12R = 16cm
   Total: 75 cm

Respuesta: Se necesitan 75 metros de cable para conectar los computadores en red.

Situación 4. Medidas de superficie

Propósito:

Identificar unidades de área y establecer relaciones entre ellas al medir áreas de superficies dadas.

Estándares asociados:

Para grados 8º y 9º.

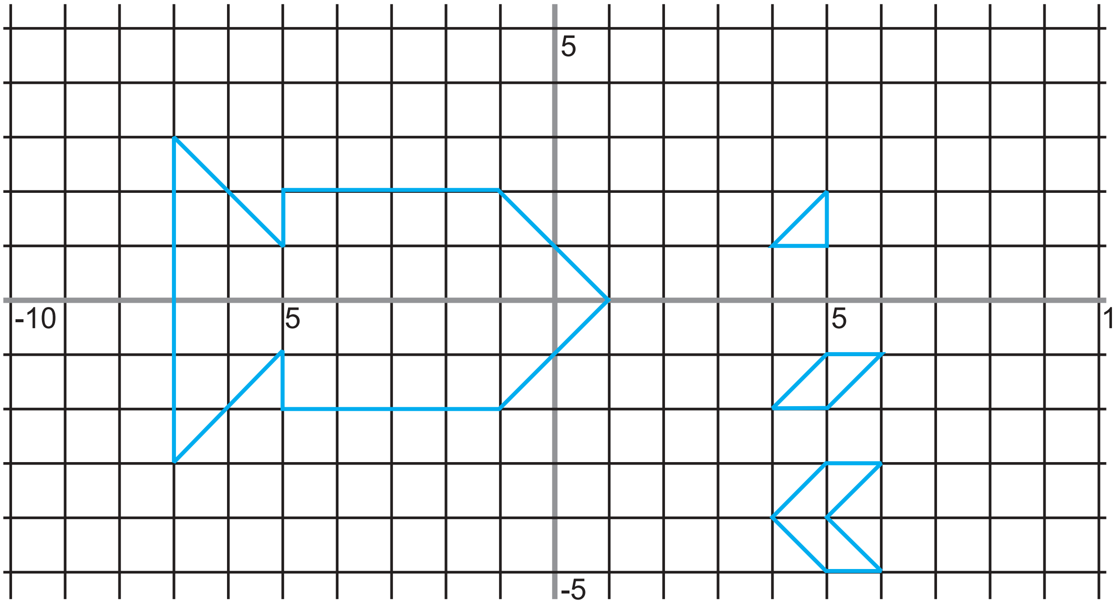
- Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.

- Seleccionar y usar técnicas de instrumentos para medir longitudes, áreas de superficie, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.

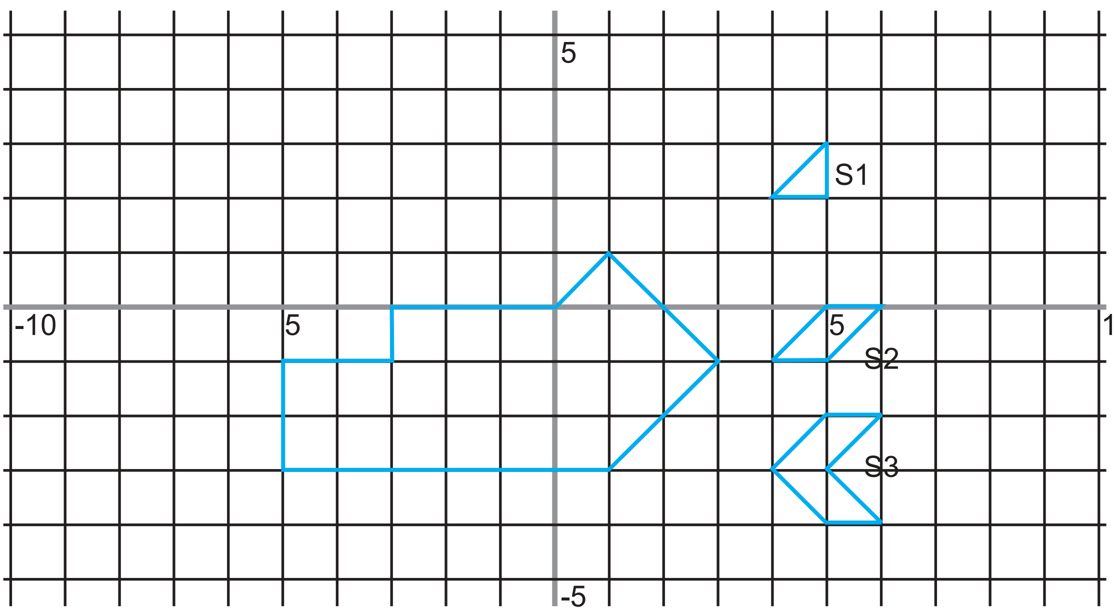
Materiales: Hoja con ilustraciones, tijeras.

Descripción:

Mide la siguiente superficie utilizando como unidad de medida S1 como unidad de medida.



Mide esta otra superficie, utilizando como unidad de medida S2.



Compara las unidades S1, S2 y S3. ¿Qué pasaría si se midiera la primera superficie utilizando S2 como unidad de medida y si se utilizara S3?, ¿Qué pasaría si se midiera la segunda superficie con S1?

Análisis Didáctico:

Se espera que el estudiante busque estrategias para iniciar la medida con S1 (**etapa de acción**), podrá hacerlo recortando el triángulo del papel y midiendo con él la superficie dada, o podrá utilizar algún tipo de rayado, como también utilizando regla y tal vez pensando en alguna fórmula o algoritmo para las figuras que observe como polígonos conocidos.

Acudirá a sus compañeros y profesores para preguntarles si está haciendo lo correcto o para pedir sugerencias para proceder a resolver el problema e intentará una reflexión y socialización sobre sus conocimientos (**comunicación**).

Luego se debe animar a los estudiantes a que descubran la relación entre las unidades dadas S1, S2, S3 y que entiendan así la construcción de un sistema de unidades de área: S1 = ½ de S2; S2 = ½ de S3; S3 = 2S2 = 4S1; S2 = 2S1.

Y luego la medida de la superficie del pez es: 56S1 = 28S2 =14S3. Se presentará una etapa de comparación y discusión sobre los resultados obtenidos, se podrán hacer confrontaciones con las dos gráficas presentadas para que se **validen** las diferentes respuestas y procedimientos obtenidos.

ESTÁNDARES DE MATEMÁTICAS: PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

Ejes temáticos	1º a 3º	4º a 5º	6º a 7º	8º a 9º	10º a 11º
CONCEPTODE MAGNITUD	1. Reconocer atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie capacidad, masa y tiempo)en diversas situaciones 2. Comparar y ordenar objetos	1. Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa-peso, tiempo, y amplitud angular) en diversas situaciones. 6. Reconocer el uso de magnitudes y las dimensiones de las unidades respectivas en situaciones aditivas y multiplicativas.	3. Calcular áreas y volúmenes a través de composición de figuras de cuerpos.		
SISTEMAS DE MEDIDAS	3. Realizar y describir procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados de acuerdo con el contexto. 4. Analizar y explicar la pertinencia de usar una determinada unidad de medida y un instrumento de medición	2. Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.	1. Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. 4. Identificar relaciones entre unidades y para medir diferentes magnitudes.	2. Selección y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. 3. Justificar la pertinencia de utilizar unidades de medida específicas en las ciencias.	1. Diseñar estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. 2. Resolver y formular problemas que involucren mediciones derivadas para atributos tales como velocidad y densidad.

ESTÁNDARES DE MATEMÁTICAS:
PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

Ejes temáticos	1º a 3º	4º a 5º	6º a 7º	8º a 9º	10º a 11º
SISTEMAS DE MEDIDAS	5. Utilizar y justificar el uso de estimaciones de medidas en la resolución de problemas relativos a la vida social, económica y de ciencias. 6. Reconocer el uso de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas	3. Utilizar y justificar el uso de la estimación en situaciones de la vida social, económica y en las ciencias. 4. Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes. 5. Calcular el área y volumen de figuras geométricas utilizando dos o más procedimientos equivalentes.	2. Resolver y formular problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas) 5. Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación	1. Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volumen de sólidos.	3. Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.
CÁLCULO		6. Reconocer el significado y el sentido de las magnitudes en situaciones aditivas y multiplicativas 7. Describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando es constante una de las dimensiones. 8. Reconocer y usar la proporcionalidad para resolver problemas de medición (de alturas, cálculo del tamaño de grupos grandes....)			

BIBLIOGRAFÍA

- ARTIGUE, M, DOUADY, R.,MORENO,L.,GOMEZ,P.,Ingeniería didáctica en educación matemática, pp, 33-59 ,"una empresa docente" , Grupo editorial Iberoamericana, México, 1995.

- ASOCOLME, Asociación Colombiana de Matemáticas Educativas, Estándares Curriculares para Matemáticas, Cuadernillos de Matemáticas Educativas, Nº 5, Gaia, 2002.

- BROUSSEAU, G., "Fundamentos y método de la didáctica de las matemáticas, en: Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa. Compilación de Ernesto Sánchez y Gonzalo Zubieta. Traducido de Fondements et méthodes de la didactique des mathematiques, Recherches en didactique des mathematiques. Pp 33-115, 1993.

- CASTRO, Encarnación, y Otros, Estimación Cálculo y Medida, Matemáticas: cultura y aprendizaje, Nº 9. Síntesis, Madrid, 2000. 205 p.

- CHAMORRO, Carmen y Otro, El Problema de la Medida, Matemáticas: cultura y aprendizaje, Nº 17. Síntesis, Madrid, 1991. 136 p.

- De la Torre, Andrés, Anotaciones a una lectura de Arquímedes, U. de A., Medellín, 1993.

____________, La modelización del espacio y del tiempo, Universidad de Antioquia, Medellín, 2003.

- FIOL, M. Luisa y Joseph M. Proporcionalidad Directa. La Forma y el Número. Matemáticas: cultura y aprendizaje, Nº 20 . Síntesis, Madrid, 1990. 185 p.

- GODINO, Juan; BATANERO, Carmen. Medida de Magnitudes y Didáctica para maestros, www.ugr.es/local/godino/edumat-maestros/, Granada, 2002.

- HEATH, Thomas L. The thirteen books of Euclid's Elements, Dover publications, N. Y. 1993.

- LUENGO, G, Ricardo y Otros, GRUPO BETA, Proporcionalidad Geométrica y Semejanza, Matemática: cultura y aprendizaje, Nº 14, Síntesis, Madrid 1990.

- LOVEll,K. Desarrollo de los Conceptos Básicos Matemáticos y Científicos en los niños, Morata, Madrid, 1986.

- MEN, Colombia, Estándares Básicos de Matemáticas, Santafé de Bogotá, Mayo, 2003

- MEN, COLOMBIA, Lineamientos Curriculares Matemáticas, Magisterio, Bogotá, 1998. 129p

- MEN- ICFES, Matemáticas Escolares, Aportes para orientar procesos de innovación, Bogotá, 2003.

- MEN-ICFES, Evaluar para transformar, Aportes de las pruebas saber al trabajo en el aula, Bogota,2002-2003.

- MESA BETANCUR, Orlando, Contextos para el desarrollo de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas, Instituto de educación no formal, Medellín, 1998.

- OBANDO, G, MUNERA, j, Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemáticas, en, Educación y Pedagogía, No 35, Vol, XV, Universidad de Antioquia, Medellín, 2003

SEPARADOR 5

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS

Carlos Octavio Gómez Tabares
I. C. Presbítero Camilo Torres Restrepo - Medellín

Gustavo Gallego Girón
I. E. José Felix Restrepo - Medellín

José Wilde Cisneros
I. E. Andrés Bello - Bello

Liliana Catrillón Giraldo
C. E. R. El Porvenir - Yolombó

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS

INTRODUCCIÓN

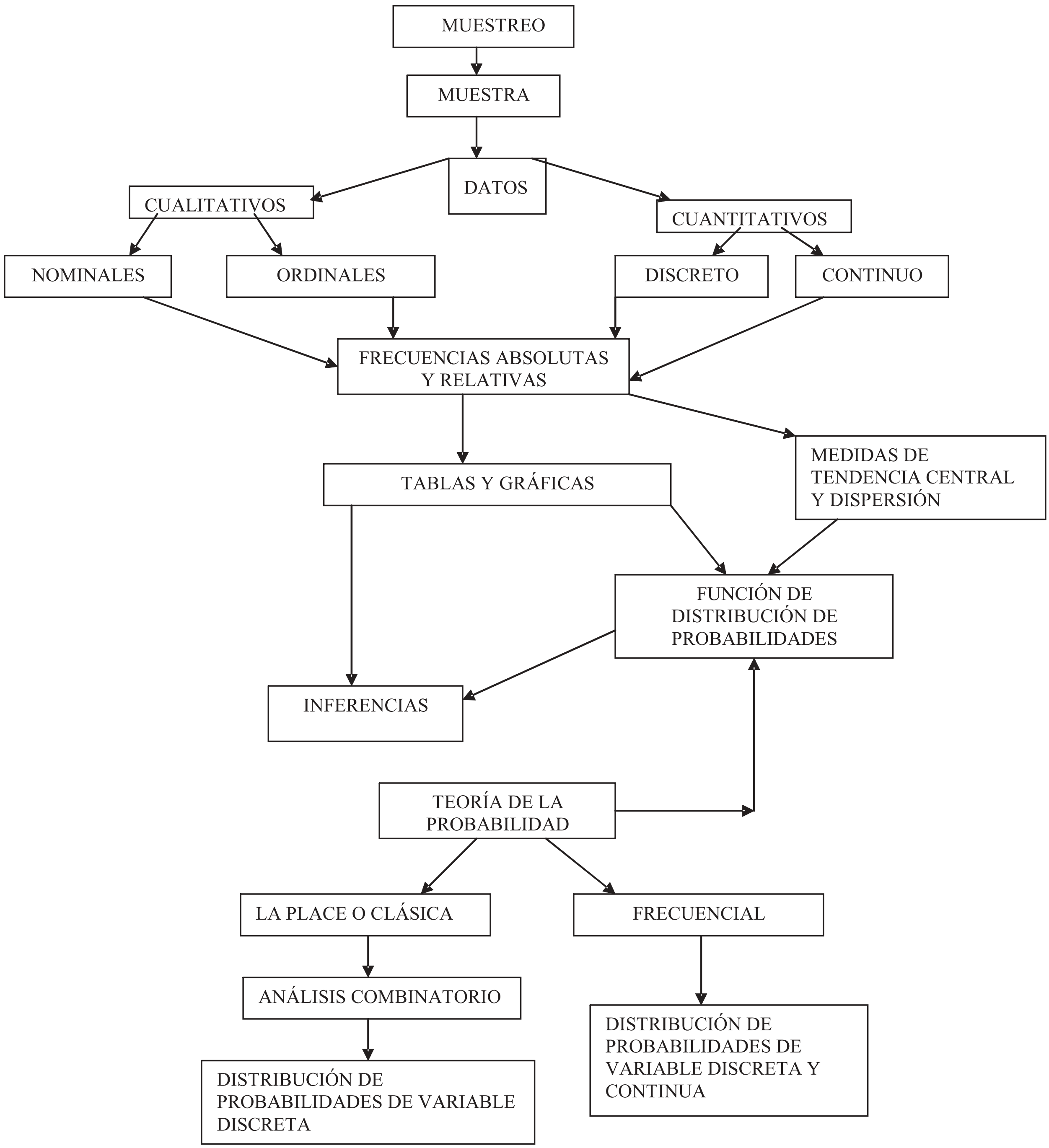
> *"Una tendencia actual en los currículos de matemáticas es la de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual ha estado presente a lo largo de este siglo, en la ciencia, en la cultura y aún en la forma de pensar cotidiana. La teoría de la probabilidad y su aplicación a los fenómenos aleatorios, han construido un andamiaje matemático que de alguna manera logra dominar y manejar acertadamente la incertidumbre. Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de una manera semejante a como actúan las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias. Los dominios de la estadística han favorecido el tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología, la lingüística..., y aún más, han permitido desarrollos al interior de la misma matemática" (MEN, 1998).*

La cita anterior manifiesta la necesidad de introducir el pensamiento aleatorio y los conceptos de sistemas de datos en los planes de área de Matemáticas, los cuáles no se han desarrollado en la mayoría de los currículos en el país. Ahora, las directrices del ministerio que incluyen no sólo los lineamientos curriculares sino también los estándares y las competencias exigen introducirlos en los planes desde el grado primero hasta el undécimo. Por eso es necesario, definir criterios básicos que permitan al educador de cada nivel desarrollar y afianzar sus acciones pedagógicas relacionadas con el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, enmarcadas dentro de las exigencias de los documentos rectores emanados por el ministerio de educación.

Esta propuesta inicialmente presenta un esquema general en el cual se muestran los conceptos fundamentales del pensamiento aleatorio, y una breve descripción de ellos. Luego se definen y explican unos posibles ejes temáticos mediante los cuales se organizan los estándares por niveles de grado.

A continuación se presentan esquemas generales de cada uno de estos ejes, con una somera explicación y finalmente se proponen unas situaciones problemas que sirven para desarrollar el pensamiento estadístico en el aula.

ESQUEMA



Para desarrollar ciertas investigaciones o estudios se requiere plantear sobre qué características de determinados objetos, cosas, personas o fenómenos se hará el proceso de recolección y análisis de datos, es decir, se define una *población* de estudio y las variables a estudiar. Como usualmente es casi imposible, por razones económicas o logísticas, obtener todos los datos de la población se debe seleccionar un conjunto de ésta para realizar el estudio, el cual debe ser lo más representativo posible de esa población y se le denomina *muestra*. Para que se cumpla la representatividad se hace un estudio previo de la selección de la muestra que se denomina *muestreo*, que es un proceso para garantizar que, con la menor incertidumbre posible, los datos que se tomarán de la muestra representan o dan razón muy aproximada del verdadero comportamiento de la población. En la educación básica y media no se desarrolla la teoría del muestreo debido a que requiere de conceptos muy elaborados de la Estadística y las Matemáticas, fundamentalmente de probabilidad e inferencia.

En resumen, partiendo de un proceso serio y previo, el muestreo, se define una muestra que es representativa de la población para obtener un conjunto de datos que darán cuenta de forma aproximada de alguna de sus características.

Así, los datos a obtener nos darán información importante. Para lograr esto se requiere organizarlos, ya que usualmente se toman en desorden por razones operativas. La organización de los datos se puede hacer por medio de tablas, pictogramas, diagramas y gráficas, principalmente. Este proceso depende del tipo de datos que se está analizando, lo que hace indispensable, por razones pedagógicas, dividir su estudio.

Tipos de datos: Los datos pueden ser cualitativos o cuantitativos. Los primeros se refieren a eventos que agrupan cualidades no cuantificables como color, sexo, etc. También se pueden agrupar en cualidades que son susceptibles de estratificar, las que se denominan ordinales. Ejemplo: Estrato económico, las notas de calificación (D, I, A, S, E), los rangos militares. Los datos cuantitativos tienen la propiedad de ser cardinales, es decir, que además de un orden preestablecido se pueden comparar y relacionar entre sí. Se clasifican en discretos y continuos. Discretos cuando en un intervalo de la recta numérica todos los valores posibles son finitos o puntuales, ejemplos: número de hijos, la edad, la estatura, los precios. Y continuos cuando los valores posibles son todos los de la escala numérica real, ejemplo: rapidez de un móvil, la medida de las hipotenusas de los triángulos rectángulos inscritos en una semicircunferencia.

Si los datos son nominales se pueden agrupar en una tabla de doble entrada donde a cada fila le corresponde el nombre del dato en la primera columna, en la segunda columna se anota el número de veces que aparece el dato en la muestra, lo que se denomina *frecuencia absoluta*. En la tercera columna la relación entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra que es el número total de datos. Esta relación es la f*recuencia relativa*. Se puede agregar una cuarta columna con el porcentaje de participación de cada uno de los datos en la muestra. A esta tabla se le llama *tabla de distribución de frecuencias.* Con los datos organizados así se pueden elaborar gráficas como tortas, barras y pictogramas.

Cuando los datos son ordinales, a la tabla se le puede agregar dos columnas: una donde se van acumulando las frecuencias absolutas al pasar de una fila a la siguiente obteniéndose las *frecuencias absolutas acumuladas* y otra donde se acumulan las relativas y se calculan las *frecuencias relativas acumuladas.* Además de las gráficas anteriores se pueden elaborar los histogramas para cada frecuencia.

Cuando los datos son cuantitativos de tipo discreto, si el rango (diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la muestra) o cantidad de valores diferentes es relativamente pequeña, por ejemplo las edades de un grupo de tercero diurno, se elabora la tabla tal como para los datos ordinales. Pero si el rango es grande, como por ejemplo las edades de un grupo de tercero de un nocturno, se debe trabajar una primera columna con los datos agrupados o por intervalos y una segunda columna donde se anota el valor o punto medio del intervalo, a lo que se denomina *marca de clase.* El resto de las columnas iguales para las cuatro diferentes frecuencias. Para ambos casos se pueden elaborar las mismas gráficas y, además, diagramas de cajón.

Si los datos son de tipo cuantitativo continuo se elabora la tabla como el caso anterior. Además de las gráficas anotadas y los diagramas de cajón aquí se pueden elaborar polígonos de frecuencias absolutas, relativas, absolutas acumuladas y relativas acumuladas. Las segundas se pueden ajustar a una curva que se aproxima a una función de distribución de frecuencias y las cuartas a otra curva que se denomina ojiva y de ella se puede definir una función de densidad de probabilidad. De ahí se pueden definir modelos probabilísticos que permiten hacer inferencias a partir de la muestra acerca de la población.

Pero para lograr hacer este tipo de análisis se requiere formular una teoría de la probabilidad: las diferentes definiciones de probabilidad, axiomas y teoremas y las distribuciones discretas como la binomial, Poisson, hipergeométrica y multinomial y las continuas como la normal, la chi-cuadrada, etc. y los tests para pruebas de hipótesis.

EJES TEMÁTICOS

Para organizar los estándares del pensamiento aleatorio y sistemas de datos se definieron unos grandes ejes temáticos que permiten agruparlos, por niveles de grado, los cuáles son: Organización de datos, medidas de posición y variabilidad y probabilidad e inferencia. Cada uno de los estándares se ubicó en uno o varios de los ejes según su afinidad temática.

El primer eje temático, la **Organización de datos** abarca temas relacionados con los diferentes procedimientos, técnicas y enfoques para organizar, recolectar y analizar un conjunto de datos obtenidos de una muestra, para que se le dé o tengan sentido dentro de su contexto y realizar las inferencias de acuerdo con ello, sin olvidar las diferentes formas de representación basados en la distribución de frecuencias.

Como ejemplo desarrollaremos una práctica que permite visualizar la eficiencia que tiene la Estadística para los fenómenos que, estudiados de otra manera, es casi imposible determinar sus regularidades. Esta consiste en determinar cual es la vocal más usada en nuestro idioma. Para comenzar, la población de estudio referida serán todas las vocales del idioma Español que es infinita. Pero podemos determinar una muestra a partir de una página completa de un libro cualesquiera, no es un buen ejemplo de muestreo, pero la experiencia nos ha mostrado que es una buena muestra para los propósitos de la clase. Por tanto, pediremos a cada estudiante que lleve a clase una copia de la página de un texto cualquiera. Es importante que la página esté completa de texto.

La toma de la muestra se podrá hacer realizando un listado de todas las vocales del texto en el orden en que aparecen y luego señalando con un color para cada vocal.

Continuando con el ejercicio de las vocales, los datos obtenidos de una manera real, se pueden organizar en la siguiente tabla:

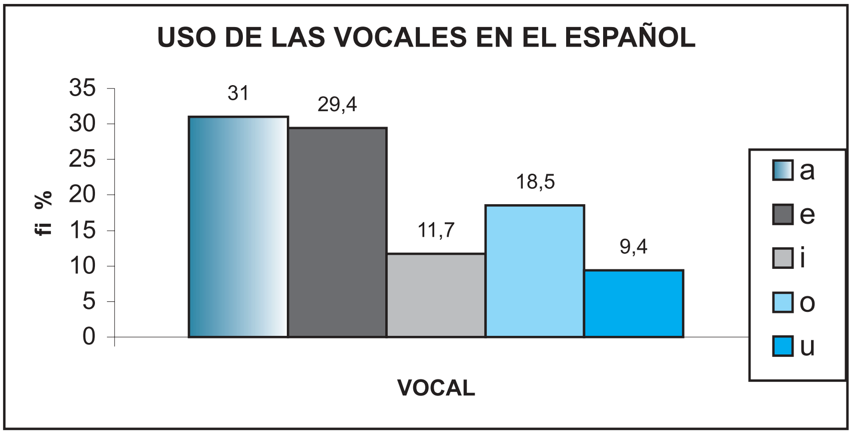
Para el caso de las vocales se considera como variables nominales.

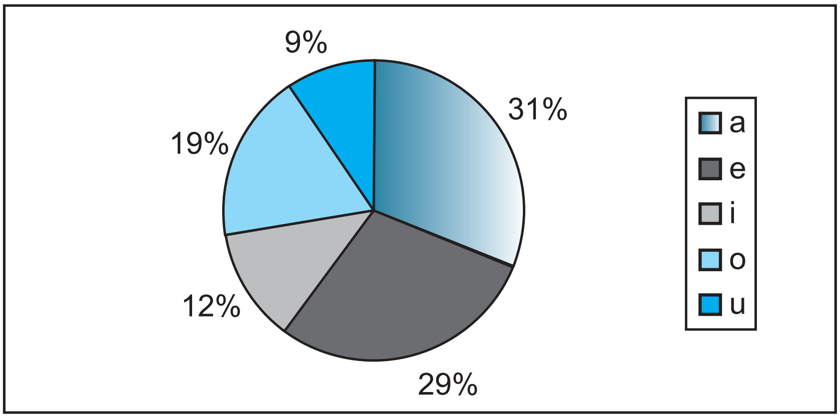
Vocal	ni	fi
a	324	0.31
e	308	0.294
i	122	0.117
o	194	0.185
u	98	0.094
Σ	1046	1.00

donde:
ni: Es la frecuencia absoluta, es decir, el valor que indica cuantas veces está el dato en la muestra.

fi: Es la frecuencia relativa, o sea, el valor proporcional que le corresponde al dato de la muestra. Si se desea puede agregar otra columna de **fi** en términos de porcentaje.

Los datos de la tabla anterior se pueden representar por medio de gráficas como barras o tortas.





Los temas del eje de **Las medidas de posición y variabilidad** son: media, mediana, moda, rango, varianza, desviación, etc. teniendo en cuenta que estos se obtienen a partir del conjunto de datos. Se comparan y se toman los valores que sean más representativos y permitan hacer inferencias. Se debe cubrir los diversos procedimientos estadísticos que se refieran a medidas de posición y variabilidad.

La media aritmética o promedio se calcula sumando cada uno de los datos, X_i y dividiendo el resultado por el número total de datos o tamaño de la muestra, N. Asi:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

La varianza S^2, es el promedio del cuadrado de todas las distancias de cada uno de los datos respecto a la medida, o sea, se calcula realizando cada diferencia (X_1 - X), se eleva esta al cuadrado y se suman con las siguientes, así:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N}$$

La desviación S, equivale a la raiz cuadrada de la varianza: $S = \sqrt{S^2}$

Continuando con la práctica de las vocales se procede a analizar toda la información del grupo. Primero se recogen todos los resultados de la f_i en porcentaje. Como ejemplo, se muestra a continuación 32 datos de la vocal *i* tomados de un grupo de décimo:

12.4 10.5 9.5 19.5 15.9 19.1 14.6 15.8 20.0 13.7 15.0 13.3 18.0 15.0 19.0 15.0 17.6 10.4 15.6 17.0 21.0 12.0 15.0 14.4 12.4 13.7 9.4 1.6 14.6 15.6 13.7 17.9

Para fines más prácticos el resultado 1.6 debería revisarse o descartarse, pero los cálculos se hicieron con todos los datos. Aplicando las fórmulas se obtuvo:

$\overline{X}$ = 14.6 %, S^2 = 14.67, S = 3.83. Parece ser una varianza relativamente baja, lo que indica que la media de esta muestra está cercana a la de la población.

Los temas del eje de **probabilidad e inferencia** son: definiciones de probabilidad, teoría de la probabilidad, variables aleatorias, funciones de distribución de probabilidad, modelación de muestras, etc.

Organizando los datos anteriores se obtiene la siguiente tabla y gráfica.

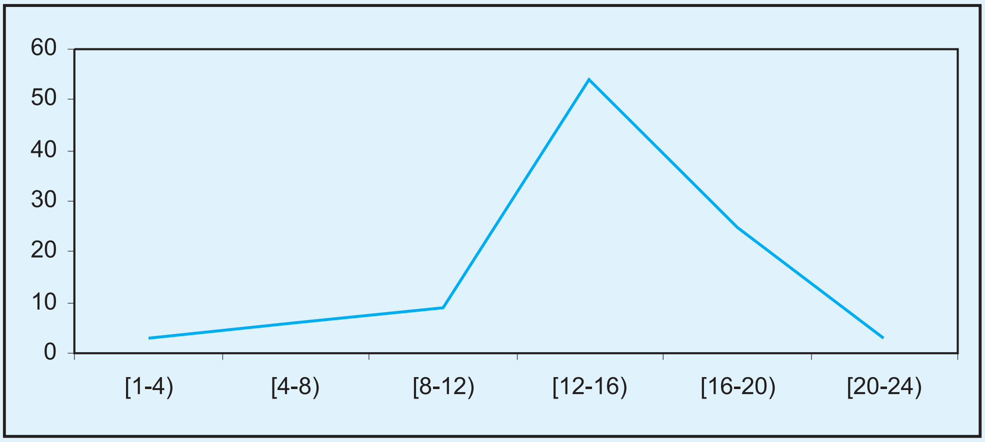
Intervalo	x_i	n_i	f_i	N_i	F_i	f_i %
1-3.99	2.5	1	0.03	1	0.03	3
4-7.99	6.5	2	0.06	3	0.09	6
8-17.99	10.5	3	0.09	6	0.18	9
12-15.99	14.5	17	0.54	23	0.72	54
16-19.99	18.5	8	0.25	31	0.97	25
20-23.99	22.5	1	0.03	32	1	3
		32				100

Donde: x_i: es el punto medio de cada intervalo y se denomina *marca de clase*

N_i: es la frecuencia absoluta acumulada

F_i: frecuencia relativa acumulada

Con los datos organizados se pueden construir histogramas o polígonos, tal como se muestra en la siguiente gráfica, donde se representa el polígono de frecuencias relativas de los datos de la vocal i.



Esta grafica se puede aproximar a una curva y a una distribución de frecuencias estandarizada, lo que permite, entonces hacer inferencias respecto a la media, por ejemplo.

A continuación se presenta una propuesta para la distribución del área de Matemáticas para trabajar el pensamiento aleatorio o estadístico y el sistema de datos según los estándares, niveles y ejes temáticos

Ejes por grado	1º A 3º
Organización de datos	1. Clasificar y organizar la presentación de datos (relativos a objetos reales o eventos escolares) de acuerdo con cualidades o atributos. 4. Representar datos relativos a su entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras 8. Resolver y formular preguntas que requieran para su solución coleccionar y analizar datos del entorno próximo.
Medidas de posición y variabilidad	2. Interpretar cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar. 3. Describir situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos. 5. Identificar regularidades y tendencias en un conjunto de datos.
Probabilidad e inferencia	6. Explicar desde su experiencia la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos. 7. Predecir si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.

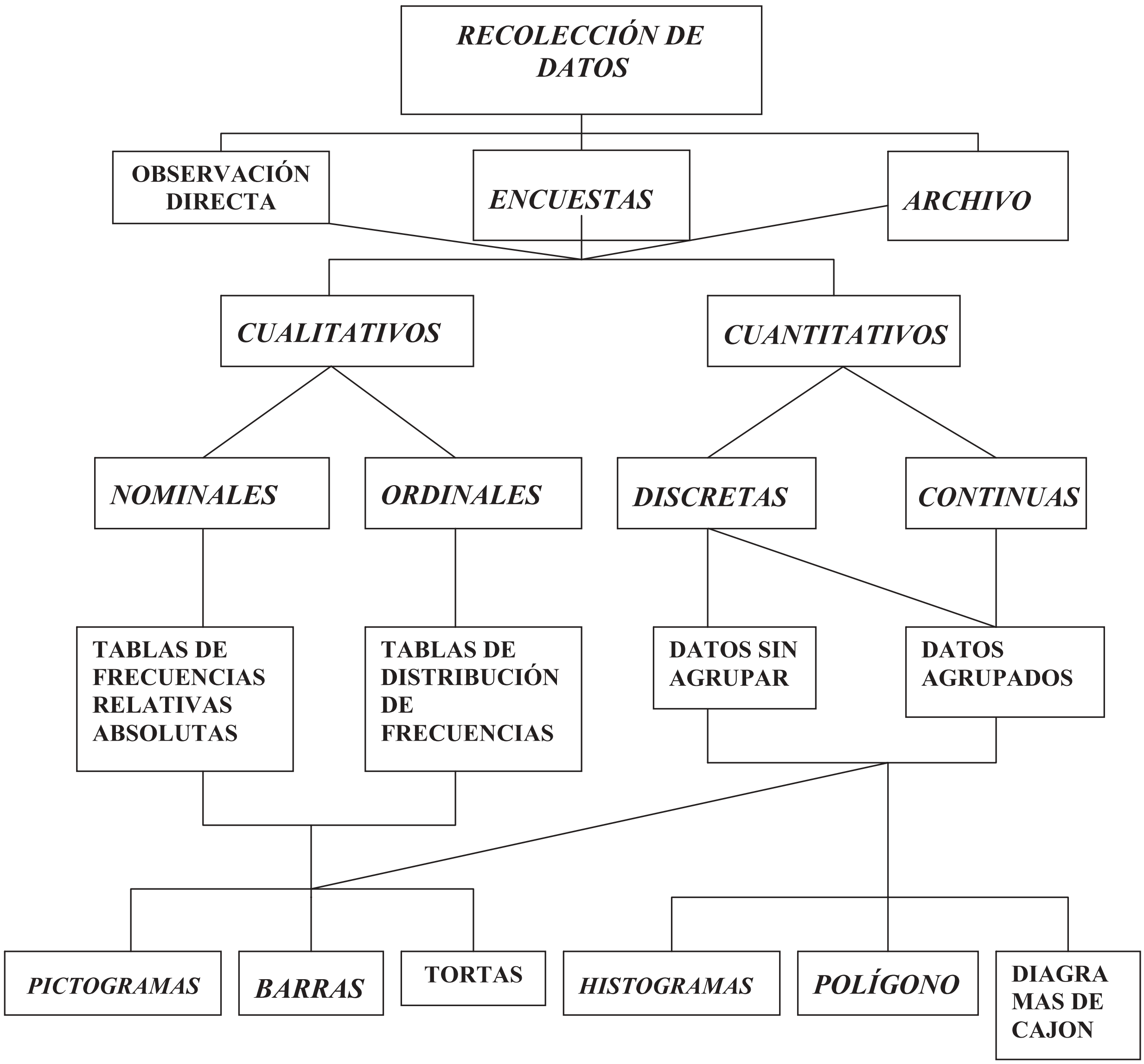
Ejes por grado	4º A 5º
Organización de datos	1. Representar datos usando tablas y gráficas (de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). 2. Comparar diferentes representaciones del mismo conjunto de datos.
Medidas de posición y variabilidad	3. Interpretar información presentada en tablas y gráficas (de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). 5. Comparar y describir la distribución de un conjunto de datos. 6. Usar e interpretar la mediana (promedio).
Probabilidad e inferencia	4. Hacer conjeturas y poner a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.

Ejes por grado	6º A 7º
Organización de datos	2. Reconocer relación entre un conjunto de datos y su representación. 3. Usar representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos (diagramas de barras, diagramas circulares). 7. Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.
Medidas de posición y variabilidad	1. Comparar e interpretar datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). 4. Usar medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar el comportamiento de un conjunto de datos.
Probabilidad e inferencia	5. Usar modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. 6. Hacer conjeturas acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. 7. Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas y experimentos. 8. P redecir y justificar razonamientos y conclusiones usando información estadística.

Ejes por grado	8º A 9º
Organización de datos	1. Reconocer que, diferentes maneras de presentar la información, pueden dar origen a distintas interpretaciones.
Medidas de posición y variabilidad	3. Interpretar conceptos de media, mediana y moda. 4. Seleccionar y usar algunos métodos estadísticos adecuados según el tipo de información. 7. Reconocer tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas.
Probabilidad e inferencia	2. Interpretar analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). 6. Resolver y formular problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). 5. Comparar resultados experimentales con probabilidad matemática esperada. 8. Calcular probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). 9. Usar conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia...).

Ejes por grado	10º A 11º
Organización de datos	
Medidas de posición y variabilidad	1. Comparar estudios provenientes de medios de comunicación. 4. Describir tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. 5. Interpretar nociones básicas relacionadas con el manejo de información (como población, muestra, variable, estadígrafo y parámetro). 6. Usar comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad).
Probabilidad e inferencia	2. Justificar inferencias provenientes de los medios o de estudios diseñados en el ámbito escolar. 3. Diseñar experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta. 7. Interpretar conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos. 8. Resolver y formular problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazamiento). 9. Proponer inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

EJE ORGANIZACIÓN DE DATOS



En el eje organización de datos se utilizan técnicas como la clasificación, organización, representación y modelos a partir de una presentación de datos que pueden obtenerse mediante:

1. Observación directa: En la solución de un problema de investigación, se acude a la fuente de la que se desea obtener la información, para ello se utilizan instrumentos como conversatorios o toma de datos por medio de apuntes de algún fenómeno que se esta observando, por ejemplo preguntar por los precios de algunos artículos en diferentes tiendas. Otro ejemplo de observación directa es anotar el número de infracciones de tránsito que ocurren en un sitio determinado en intervalos de tiempo.

2. Encuestas: La encuesta es un procedimiento utilizado en la investigación de mercados para obtener información mediante preguntas dirigidas a una muestra de individuos representativa de la población o universo, de forma que las conclusiones que se obtengan puedan generalizarse al

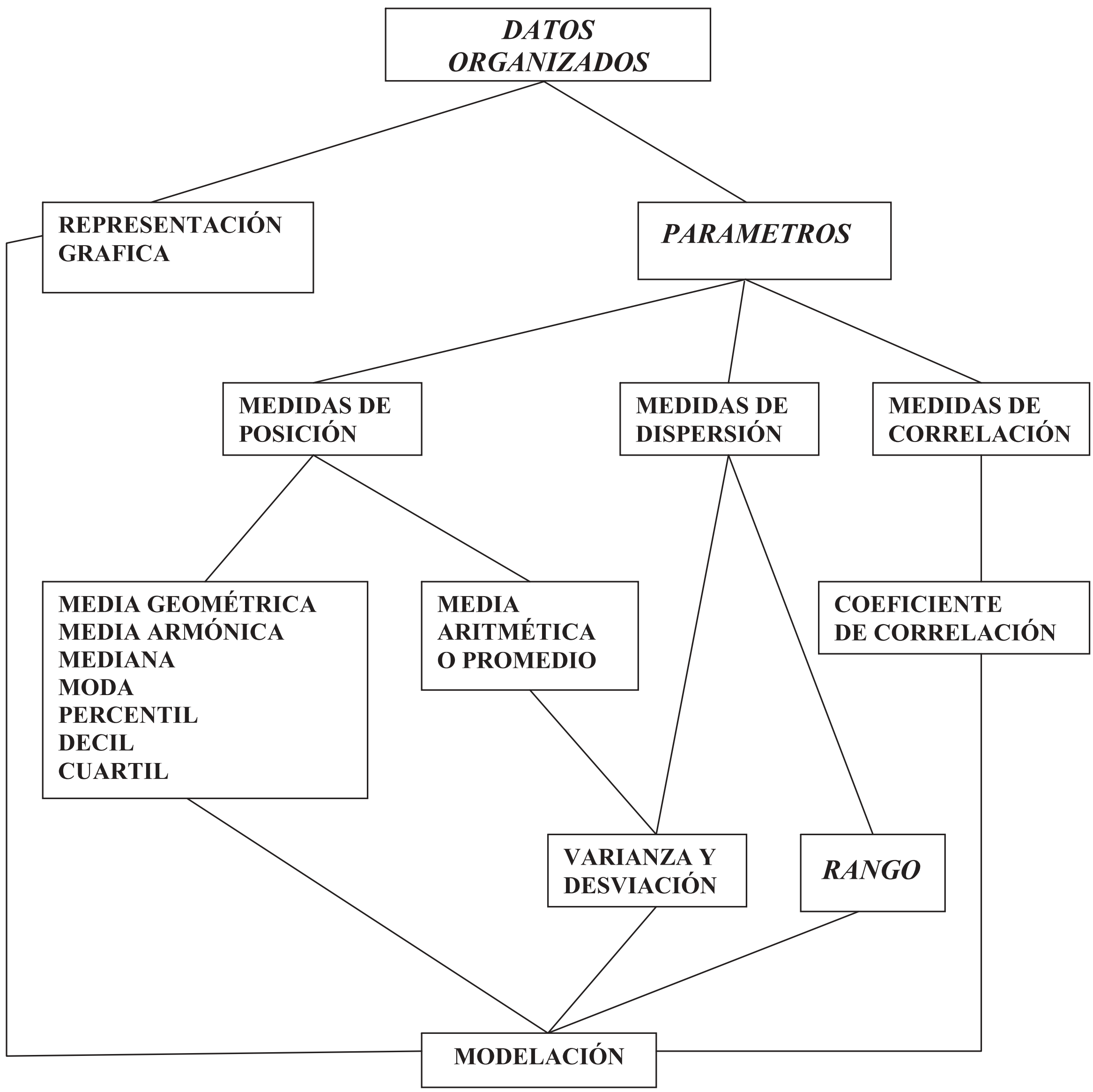
conjunto de la población siguiendo los principios básicos de la inferencia estadística, ya que la encuesta se basa en el método inductivo, es decir, a partir de un número suficiente de datos podemos obtener conclusiones a nivel general.

La principal ventaja de la encuesta frente a otras técnicas es su versatilidad o capacidad para recoger datos sobre una amplia gama de necesidades de información.

3. Archivo: Esta técnica consiste en utilizar datos que fueron recogidos con anterioridad por otra persona o un grupo de investigadores. Por ejemplo tomar datos del Anuario Departamental, informes del Dane o Sistema Nacional de Pruebas entre otros.

Los datos recogidos mediante los instrumentos anteriores se dividen en cualitativos y cuantitativos, y responden a las explicaciones dadas sobre estos mismos conceptos.

EJE MEDIDAS DE POSICIÓN Y VARIABILIDAD

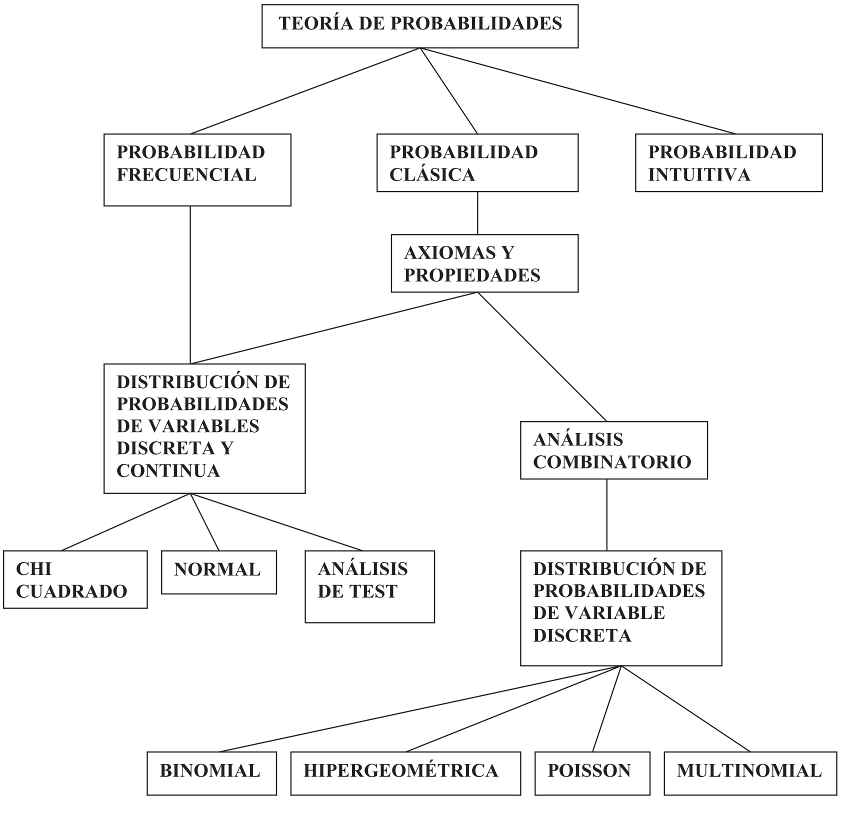


Las medidas de posición y variabilidad responden a lo que se va a realizar y para qué, entre ellas encontramos:

1. Representación gráfica: Tiene como objetivo darle un manejo eficiente a la información obtenida, de tal forma que el lector o quien la observe visualice fácilmente lo que expresan los datos. Por ejemplo para la distribución de variables categóricas, se puede utilizar el diagrama de bloques (rectángulos separados que representan cada uno una categoría de la variable). Si lo que se desea es comparar la frecuencia de una de las clases con la frecuencia de las demás clases o con el total de observaciones, el gráfico más apropiado es el diagrama circular (círculo divido en tantos sectores como categorías tenga la variable). En el caso de una variable discreta se utiliza el diagrama de barras (varias barras paralelas separadas, las cuales representan una categoría). En el caso de que la variable sea cuantitativa continua, se utiliza un histograma (bloques o rectángulos adyacentes donde cada uno representa la clasificación de la variable).

2. Los parámetros: Son descripciones que se hacen de un conjunto de datos numéricos, entre ellos tenemos: Medidas de posición, que son aquellas que contribuyen a dar la imagen de la correspondiente distribución; ya que determinan valores especiales del conjunto de datos por el lugar que ocupan dentro de ella y entre ellas se encuentran media, mediana, moda, percentil, cuartil, media geométrica y media armónica. Medidas de dispersión; las cuales hacen referencia a que tan separados están entre sí los diferentes valores que asume la variable con respecto a una medida de posición que generalmente es la media. Entre ellas están la varianza, rango y la desviación estándar. Medidas de correlación, son las que establecen relación entre dos variables aleatorias llamadas variable dependiente asociada a la independiente. Entre ellas están el coeficiente de correlación.

EJE PROBABILIDAD E INFERENCIA



La probabilidad y la inferencia conforman el tercer eje temático enmarcado en la Teoría de Probabilidades. Existen fundamentalmente tres tipos de probabilidades: la Frecuencial, la Clásica y la Intuitiva.

Tanto la probabilidad clásica como la frecuencial se construyen sobre axiomas y propiedades de la distribución de probabilidades de variables discretas y continuas, así como también sobre el análisis combinatorio, siendo las distribuciones de probabilidades más usadas la chi-cuadrado, la normal y el análisis de test.

El análisis combinatorio se utiliza para el estudio de la distribución de probabilidades de variable discreta, siendo las más usadas la binomial, la hipergeométrica, poisson y multinomial.

La probabilidad intuitiva de un evento se entiende como el grado de creencia o confianza que un individuo coloca en la ocurrencia de cierto evento, basándose para ello en la evidencia de que dispone. No obstante en la solución de algunos problemas de riesgo o incertidumbre, no basta determinar que existe una probabilidad de ocurrencia de un evento, es necesario interpretarla y utilizar esa información para tomar decisiones que lleven a la consecución de un objetivo, como por ejemplo ganar o minimizar las pérdidas en un juego.

ACTIVIDADES METODOLÓGICAS

DESCRIPCIÓN

La búsqueda de respuestas a preguntas que sobre el mundo físico se hacen los niños resulta ser una actividad rica y llena de sentido si se hace a través de recolección y análisis de datos. Decidir la pertinencia de la información necesaria, la forma de recogerla, de representarla y de interpretarla para obtener las respuestas lleva a nuevas hipótesis y a exploraciones muy enriquecedoras para los estudiantes. Estas actividades permiten además encontrar relaciones con otras áreas del currículo y poner en práctica conocimientos sobre los números, las mediciones, la estimación y estrategias de resolución de problemas.

En la tarea de buscar y recoger datos es importante mantener claros los objetivos, las actitudes, los intereses que la indujeron, prever qué tipos de respuestas se pueden encontrar, las dificultades que podrían presentarse, las distintas fuentes como consultas, entrevistas, encuestas, observaciones, la evaluación de su veracidad, distorsiones, sesgos, lagunas, omisiones y la evaluación de la actitud ética de quien recoge los datos y su responsabilidad social (MEN, Lineamientos Curriculares de Matemáticas).

Algunos de los conceptos involucrados en las actividades o situaciones problema que vamos a presentar son: muestra, población, ordenamiento de datos, valor mínimo (menor), valor máximo (mayor), moda, media aritmética (promedio), distribución de frecuencias, porcentajes y gráficas. Además los relacionados con otros pensamientos, como por ejemplo con el pensamiento métrico, en la utilización del metro para la medición de las estaturas de los estudiantes; así se puede aprovechar la actividad para recordar algunos conceptos fundamentales involucrados en las medidas de longitud y del pensamiento numérico como: La estructura decimal, múltiplos, submúltiplos y notación decimal.

El objetivo de las actividades es presentar a los docentes ejemplos de exploración de datos que puedan utilizar con sus estudiantes. Un proyecto de análisis de datos, a partir de una clase o de un experimento por ejemplo, servirá para abordar los principales contenidos sobre análisis de datos en cualquier nivel de enseñanza, mostrar ejemplos de cuestiones que requieran el uso de conceptos y técnicas estadísticas, describir algunas dificultades previsibles de los estudiantes con los mismos y sugerir criterios para el trabajo en clase con ellos. La metodología del taller alternará el trabajo en grupo y discusión de los docentes y el resumen de algunos puntos claves por el docente.

SITUACIONES PROBLEMA

OBJETIVOS RELACIONADOS CON LOS PROCEDIMIENTOS ESTADÍSTICOS

1. Definir una muestra.
2. Ordenar adecuadamente datos.
3. Representar gráficamente los grupos de datos.
4. Utilizar los métodos estadísticos para realizar análisis de datos y posibles inferencias.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Las siguientes actividades están enmarcadas dentro del siguiente propósito:

> "Explorar e interpretar los datos, relacionarlos con otros, conjeturar, buscar configuraciones cualitativas, tendencias, oscilaciones, tipos de crecimiento, buscar correlaciones, distinguir correlación de causalidad, calcular correlaciones y su significación, hacer inferencias cualitativas, diseños, pruebas de hipótesis, reinterpretar los datos, criticarlos, leer entre líneas, hacer simulaciones, saber que hay riesgos en las decisiones basadas en inferencias" (Vasco C. citado en lineamientos).

PRESENTACIÓN DE ACTIVIDADES O SITUACIONES PROBLEMA A DESARROLLAR POR LOS ESTUDIANTES EN EL AULA

Situación problema uno: *¿Existe relación entre la estatura y el peso?*

Es una actividad a desarrollar por todo el grupo en el aula de clase, pero cada estudiante debe consignar los datos, las operaciones y resultados en su cuaderno.

Material

- Los propios del aula de clase.
- La lista de los estudiantes.
- Los estudiantes.
- Un metro.
- Una balanza.

Desarrollo de la actividad

Solicitar a los estudiantes que propongan métodos para medir la estatura y el peso de cada uno de los compañeros de clase. La discusión nos debe llevar al metro y al kilogramo (fuerza) de peso, aprovechando para recordar los conceptos fundamentales involucrados en ellos, como estructura decimal, múltiplos, submúltiplos, notación de mediciones menores y mediciones mayores.

Luego se les induce a organizar los datos y realizar sus representaciones gráficas.

Preguntas

1. ¿Cuál es el compañero más bajo del grupo?
2. ¿Cuál es el compañero más alto del grupo?
3. ¿Cuál es la estatura que más se repite?
4. ¿Si sumas todas las estaturas y las divides por el número de alumnos del grupo que número obtienes? ¿Qué significado le puedes dar a este número?
5. ¿Si sumas el valor más bajo con el más alto y los divides por dos, qué número obtienes? ¿Tiene alguna relación con el número obtenido en la pregunta anterior?
6. ¿Habrá alguna otra forma de presentar la tabla de valores?
7. Representa estos valores gráficamente.
8. Describa un rango en el cual esté el 70% de los alumnos.
9. Si tomas el dato de la pregunta 5, ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que están entre 5 cm menos y 5 cm más de ese dato?

Situación problema dos: Un fabricante de teclados y máquinas de escribir ha descubierto que en su producto, unas teclas se desgastan mas rápidamente que otras. Él está interesado en realizar un estudio sobre cuáles de las teclas debe reforzar en sus productos.

Posibilidad de generar situaciones de aprendizaje . Lo usual es trabajar sobre varios textos , ya que se pretende obtener frecuencias absolutas y relativas sobre el uso de las vocales. Estos conjuntos de datos son obtenidos por los mismos estudiantes, mediante la realización de una lectura con sus compañeros sobre temas diversos, incluyendo temas relacionados con otras áreas o publicaciones.

Las preguntas o cuestionamientos que se le realizan pueden ser entre otras:

Grados 1° A 3°

¿Cuál es la vocal que más se repite?. En este caso que debe hacer el fabricante de teclados?

Grados 4° Y 5°

El ejercicio anterior se repite para los grados 4° y 5°, profundizando en cuanto a consonantes, artículos, y palabras más utilizadas por cualquier autor. Puede incluir en este momento una página o una hoja que el niño escoja.

Grados 6° y 7°

Se ahonda un poco más en el ejercicio y con la ayuda del profesor de Español se llega a las palabras que incluyen 3 vocales, el artículo más usado etc. para ello debe el docente proponer 3 ó 4 hojas ya que este ejercicio se torna más especial.

Grados 8° A 11°

No solamente se lleva el anterior record sino que se ahonda en diptongos, triptongos. Además el comportamiento de las gráficas en este nivel debe ser porcentual y por grados.

Existen vocales juntas? Cuáles son? Cuales se repiten más? Este tipo de situaciones permite correlacionar con otras áreas como humanidades y lengua castellana.

Representar gráficamente las anteriores situaciones.

> ***Fuerte apoyo en representaciones gráficas***: "Una idea fundamental del análisis exploratorio de datos es que al usar representaciones múltiples de los datos se convierte en un medio de desarrollar nuevos conocimientos y perspectivas. Esto puede ejemplificarse al pasar de tablas a gráficos, de lista de números a representaciones como la del "tronco", reduciendo los números a una variedad discreta en un mapa estadístico para facilitar la exploración de la estructura total, construyendo gráficos, como el de la "caja" que hace posible la comparación de varias muestras". (Biehler [4],pg.2). (Citado por Godino y Batanero 2002).

Situación problema tres: ¿Cuál es la influencia de la luz solar en el crecimiento de una planta?

El educador debe inducir al estudiante en este nivel al cultivo de una planta en lugares diferentes bajo las mismas condiciones en cuanto a la forma de abonarlas con el mismo producto, regarlas con la misma cantidad de agua, además a tomar medidas cada 3 días y representarlas en tablas. El ejercicio debe hacerse por un mes o dos (según la conveniencia). Con lo anterior se realizan preguntas como: cuál crece más rápido. Qué sucedería sí las épocas de siembra son diferentes. Cuáles se pueden sembrar al mismo tiempo. En dónde no debe sembrarse. Bajo cuáles condiciones entre otras. Lo anterior se da para los grados 1° a 3°.

Para los siguientes grados 4° a 7°, la actividad ya debe conllevar a una situación casi problémica donde prácticamente, el estudiante es quien lleva la propia iniciativa para resolver la actividad. Además se le pide que grafique la situación de acuerdo a los datos de la tabla y al tipo de variable a estudiar.

Para los grados superiores la actividad en realidad se debe convertir en un proceso investigativo, ya que interviene en dicho proceso otros tipos de variables que pueden ser controlados como es el uso de insecticidas además es importante recalcarle al estudiante que la planta a sembrar debe ser de su propio medio como el entorno donde se mueve el estudiante y la posibilidad o no de este tipo de producto, otra variable a tener en cuenta es el tiempo de cosecha, los insectos, tipo de terreno etc. Se debe recordar el trabajo completo para los grados 10° y 11° con porcentajes y además con análisis predictivos.

Situación problema cuatro: Organización de un campeonato deportivo.

En concordancia con el departamento de Educación Física y Deportes, se le propone a los educadores formalizar los diferentes torneos interclases con la ayuda de los diferentes grupos.

Esta actividad para los grados de 1° a 3° se les induce para que se organice un campeonato con tres equipos. Los estudiantes escogen su deporte favorito y con base en ello, deben formar los equipos con diferentes camisetas, jugar todos contra todos en dos vueltas.

En los grados 4° y 5° se les propone 4 equipos bajo las condiciones anteriores y estando en la mitad del campeonato y realizar la tabla de partidos posibles, se les realiza preguntas como: En la próxima fecha que equipo queda de primero. Cuál va a ser el goleador, además predecir el equipo ganador de la fecha (del día).

A partir de los grados 6° a 11° se debe aumentar el número de equipos y la distribución se hará de acuerdo al grado con el objetivo de ir dificultando el conteo, además la organización del respectivo campeonato debe ser tal que deben entregar planillas desde el inicio del torneo.

A este nivel, el tema de probabilidad se hace más interesante ya que se les pregunta cuál es la posibilidad de que determinado grado gane el campeonato. O que el goleador del torneo sea de un grado específico. Cuál puede ser el goleador del equipo etc.

BIBLIOGRAFÍA

Lineamientos Curriculares de Matemáticas, MEN, 1998

Estándares Curriculares de Matemáticas, MEN, 2003

Carmen Batanero y Juan D. Godino, Estocástica y su Didáctica para maestros, proyectos edumat-maestros, Granada 2002.

SU OPINIÓN

La secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, está muy interesada en conocer su opinión y sus recomendaciones, así como sus inquietudes sobre la aplicación de los Estándares Básicos de Matemáticas en su institución. Para ello se sugiere que en reuniones de las mesas municipales sea el espacio apropiado para cumplir con este propósito.

Las siguientes preguntas son una guía para tener en cuenta en sus sugerencias e inquietudes, sin embargo puede hacer otras sugerencias.

1. ¿Usted considera que los Estándares muestran una adecuada progresión entre los grados?

2. ¿De los cinco pensamientos matemáticos en cual o cuales ha tenido mayor dificultad para incorporarlos a su plan de estudios?

3. ¿Teniendo en cuenta los Estándares en su conjunto, en que aspectos considera usted que necesita recibir formación para hacerse a una mejor apropiación de ellos?

4. ¿Qué Estándares considera usted que deben ser agregados para una mejor estructuración de ellos?

5. Otras posibles preguntas sugeridas por usted?

Sus sugerencias e inquietudes pueden canalizarsen a través de los Directores de Núcleo para hacerlas llegar a la Dirección de Fomento de la Educación con Calidad en las siguientes direcciones:

- Calle 42B No. 52 - 106 Centro Administrativo Departamental La Alpujarra, Oficina 524
- Fax: 262 22 94
- Telefonos: 385 85 44 - 94
- E-mail: Fiducaci@gobant.gov.co