El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$)

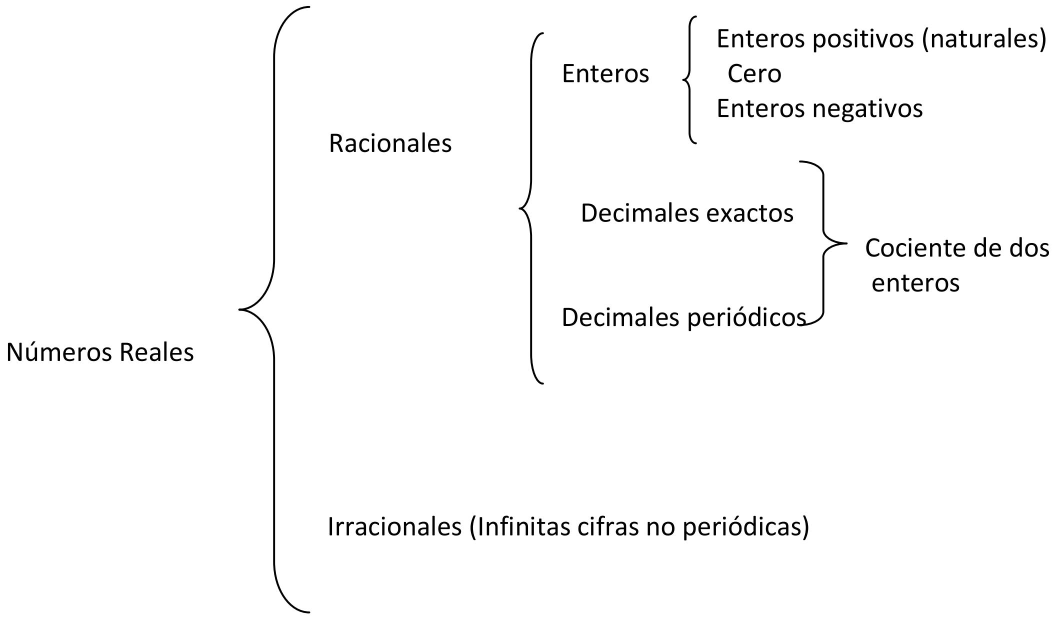
El conjunto de los números reales se forma mediante la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$$

Propiedades del conjunto $\mathbb{R}$

1. $\mathbb{R}$ es un conjunto infinito
2. $\mathbb{R}$ no tiene ni primer ni último elemento.
3. Es un conjunto totalmente ordenado: dados dos números reales distintos, siempre se puede establecer entre ellos una relación de menor o mayor.
4. Ley de Tricotomía
   Dado cualquier par de números reales a y b, se verifica necesariamente una y solamente una de las siguientes:
   $a < b$; $a = b$ ó $a > b$
5. Los números reales completan la recta numérica. Es decir, a todo número real le corresponde un punto sobre la recta y a todo punto sobre la recta le corresponde un número real.
6. Entre dos números reales existen infinitos números reales, es decir, $\mathbb{R}$ es un conjunto **denso**. Como además completa la recta, decimos que $\mathbb{R}$ es **denso y continuo**.

Todo lo expresado anteriormente acerca de los conjuntos numéricos se puede sintetizar en el siguiente cuadro:



Axiomas de Campo

A continuación enunciaremos una serie de axiomas que se verifican en el conjunto de los números reales.

Axioma 1: Propiedades de clausura

$$\forall a\,, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a+b \in \mathbb{R} \\ a.b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Axioma 2: Propiedades conmutativas de la adición y la multiplicación

$$\forall a\,, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a+b=b+a \\ a.b=b.a \end{cases}$$

Axioma 3: Propiedades asociativas de la adición y la multiplicación

$$\forall a\,, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a.(b.c)=(a.b).c \end{cases}$$

Axioma 4: Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \; ; \; a.(b+c)=a.b+a.c$$

Axioma 5: Existencia de elementos neutros

Existen dos números reales y distintos, el 0 y el 1, tales que $\forall a \in \mathbb{R}$, se verifica que:

$$a+0=a$$

$$a.1=a$$

"0" recibe el nombre de **neutro aditivo o idéntico**

"1" recibe el nombre de **neutro multiplicativo**.

Axioma 6: Existencia de elementos inversos

$$i)\ \forall a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R} \,/\, a+(-a)=0$$

$-a$ se llama **inverso aditivo u opuesto** de a

$$ii)\ \forall a \in \mathbb{R}, con\ a \neq 0, \exists a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R} \,/\ a.a^{-1}=1$$

a^{-1} se llama **inverso multiplicativo o recíproco** de a

Propiedades de la igualdad

1. **1.** Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a = a$
2. **2.** Simétrica: $\forall a, b \in \mathbb{R},\ Si\ \ a = b \Rightarrow b = a$
3. **3.** Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ Si\ \left(a = b \wedge b = c\right) \Rightarrow a = c$
4. **4.** Uniforme de la adición: $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ Si\ \ a = b \Rightarrow a + c = b + c$
5. **5.** Uniforme de la multiplicación: $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ Si\ \ a = b \Rightarrow a.c = b.c$

Diferencia y cociente

a. **i)** Dados dos números reales cualesquiera "a" y "b", si existe otro real "x" tal que $a + x = b$, este real "x" se llama **diferencia** entre "b" y "a" y lo representamos como $x = b - a$.

ii) También se suele definir la diferencia entre "b" y "a" $\in \mathbb{R}$ como $b - a = b + \left(-a\right)$

b. **i)** Dados dos números reales cualesquiera "a" y "b", con $b \neq 0$, si existe otro real "x" tal que $b.x = a$, este real "x" se llama **cociente** entre "a" y "b", y lo representamos como $x = \dfrac{a}{b}$.

ii) También se suele definir el cociente entre "a" y "b", con $b \neq 0$ como $\dfrac{a}{b} = a.b^{-1}$

PARA RESOLVER

1) Escribe V (verdadero) o F (falso) según corresponda en cada caso. Justifica tu respuesta.

   a) –3 es un número natural
   b) Todo número natural es entero.
   c) Todo número entero es natural.
   d) Los múltiplos de 11 son números enteros.
   e) El inverso multiplicativo de todo número entero distinto de cero es un número entero.
   f) Los números pares son racionales.
   g) Los números impares son irracionales.
   h) La raíz cuadrada de cinco es un número racional.
   i) $\sqrt{2}\,.\sqrt{2}$ es un número irracional.
   j) A todo punto sobre la recta le corresponde un número racional.
   k) A todo número irracional le corresponde un punto sobre la recta.

2) Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales.

   a) $\sqrt{6}$ b) $-\dfrac{1}{7}$ c) $\dfrac{\sqrt{4}}{3}$ d) $-\pi$ e) 7 f) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   g) –5 h) e i) $\sqrt{13}$ j) 0 k) $\dfrac{4}{5}$ l) 12

3) Escribe dos números racionales y dos irracionales que estén comprendidos entre:

a) 7,34 y 7,35
b) $0,\overset{\frown}{4}$ y $0,45$
c) $\frac{31}{13}$ y $\frac{18}{7}$

4) Sabemos que el cociente de dos números enteros, si el divisor es distinto de cero, es siempre un racional, pero... ¿ocurre lo mismo con el cociente de dos decimales exactos? Justifica tu respuesta
5) Escribe en la forma más abreviada posible las siguientes expresiones:

a) $3\sqrt{2}$ - $7\sqrt{2} =$ d) ($\sqrt{5}$ + $\sqrt{2}$)^2= g) ($\sqrt{5}$ + $\sqrt{4}$) ($\sqrt{5}$ - $\sqrt{4}$) =
b) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ = e) (1 + $\sqrt{2}$) (3 + $\sqrt{2}$) = h) 5 + 4 $\sqrt{3}$ - (7 + 2 $\sqrt{3}$) =
c) $\sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)$ = f) (3 + $\sqrt{2}$) (3 - $\sqrt{2}$) =

6) ¿Cuáles axiomas o propiedades de la igualdad, si es que los hay, justifican cada enunciado?

a) 6 (x + 3) = 6 x + 18
b) a (-b + b) = a . 0
c) Si 2 = x, entonces x = 2.
d) $x^3 - y^3 = x^3 + (- y^3)$
e) 4 x + (2 y + 5) = (4 x + 2 y) + 5
f) x + y = y + x
g) – 1. 3 x = - 3 x = (- 3). X
h) $5 y^3 + 0 = 5 y^3$
i) (x + 2) . $\frac{1}{x+2}$ = 1 ; x$\neq$ -2

7) Completá la siguiente tabla. Anotá las observaciones, curiosidades o regularidades que te parezcan interesantes. Formulá algunas hipótesis a partir de tus observaciones e intentá demostrarlas.

a	*b*	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$	$a.b^{-1}$	$(a.b)^{-1}$	1 - $\frac{a}{b}$
1	-2						
$\frac{1}{2}$	3						
$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$						
0,5	$\frac{1}{2}$						
$2,\overset{\frown}{6}$	$0,\overset{\frown}{3}$						

8) Indica para qué valores de x no están definidas en *R* las siguientes expresiones

a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{x-2}{x+2}$ c) $\frac{2x^2-1}{x^2+1}$ d) $\frac{3x}{x^2-2x}$

e) $\frac{0}{x^2+4}$ f) $\frac{4}{x+\frac{1}{3}}$ g) $\frac{0}{x(x-2)}$ h) $\frac{5x+2}{x^3-1}$

9) El costo por rentar una lavadora de alfombras es de \$ 4,25 por hora más \$ 3,25 por el jabón. Calcula el costo de lavar una alfombra cuando el tiempo requerido es de 3,5 horas.

10) Una persona compró acciones de una compañía a \$ $26\frac{3}{8}$ cada una. Hoy en día el valor de las acciones es de \$ $22\frac{1}{2}$ cada una. ¿A qué porcentaje del valor original corresponde el valor actual de las acciones?

11) El precio de una computadora fue rebajado a la mitad. Después se le hizo una rebaja adicional de 34 dólares. El nuevo precio es de 338 dólares. ¿Cuál era el precio original?