Logique des Prédicats du Premier Ordre

1- Langage de la logique du premier ordre
Définition: Un *langage prédicatif* est défini par la donnée de :

- lettres de variables individuelles (ex: x, y, z),
- lettres de constantes individuelles (ex: a, b, c, ...),
- lettres de constantes prédicatives munies de leur arité (ex: **a**/1, **b**/2, **c**/2, ...)

On rajoutera plus tard une quatrième espèce: les *foncteurs*, qui serviront à fabriquer des termes composés. Pour l'instant, nous appelons *terme* toute variable ou toute constante individuelle.
Les langages prédicatifs admettent également toutes les constantes logiques ordinaires, déjà vues en logique propositionnelle: $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\Rightarrow$. Et ils admettent en plus deux nouveaux symboles constants: $\forall$ et $\exists$.
Les règles de formation communes à tous les langages prédicatifs sont :
a) *formules atomiques*:
• si **p**/n est une lettre de prédicat d'arité n et si $t_1, ..., t_n$ sont des termes, alors:

p/n($t_1, ..., t_n$) est une formule atomique.

b) *formules*:
• toute formule atomique est une formule,
• si A et B sont des formules, alors sont aussi des formules :

$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $\neg (A)$, $(A \Leftrightarrow B)$

• si A est une formule et x une variable individuelle, alors $(\forall x)A$ et $(\exists x)A$ sont aussi des formules, que l'on dit quantifiées. $\forall$ et $\exists$ sont appelés **quantificateurs** ($\forall$: quantificateur *universel*, qui se lit "**pour tout**", $\exists$: quantificateur *existentiel*, qui se lit: "**il existe**")[1].

Tarski's World

Dans « Tarski's World » (logiciel créé par Jon Barwise et John Etchemendy, Stanford, USA), on travaille sur un monde (univers) constitué de volumes géométriques : des cubes, des tétraèdres et des dodécaèdres, qui peuvent être de trois tailles possibles :

[1] Comme on le voit, la quantification ne porte que sur des variables individuelles. C'est en cela que ce calcul est désigné comme calcul des prédicats **du premier ordre**. On a en général besoin en mathématiques (et semble-t-il aussi dans le traitement des langues naturelles) d'une quantification d'ordre supérieur, c'est-à-dire qui porte sur des objets d'ordre supérieur aux individus, par exemple des ensembles ou bien des prédicats. Cela complique beaucoup les problèmes.

grands, moyens, petits, et qui occupent diverses positions les uns par rapport aux autres sur un damier. Cela conduit à utiliser les prédicats suivants :

- `Tet`
- `Cube`
- `Dodec`
- `Small`
- `Medium`
- `Large`
- `Smaller`
- `Larger`
- `BackOf`
- `FrontOf`
- `LeftOf`
- `RightOf`
- `Between`

Des noms sont d'autre part donnés pour étiqueter des volumes: ce sont des constantes:

- `a, b, c, d, e, f`

On a également le droit d'utiliser des variables :

- `u, v, w, x, y, z`

1- Donner des exemples de formules atomiques utilisables pour décrire cet univers. (donner des formules permettant d'exprimer par exemple que « a est un cube », « c est un tétraèdre », « a est plus petit que c » etc.)

2- Quelle est l'arité de chacun des prédicats mentionnés plus haut ?

3- Donner des exemples de formules complexes utilisables pour décrire cet univers. (donner des formules permettant d'exprimer par exemple que « si a est un cube alors d est un tétraèdre », « b est un grand cube », « b est un cube plus grand que le volume c », « b est un cube situé entre le tétraèdre c et le petit dodécaèdre d »)

4- Comment exprimer que :
   a) tous les cubes sont grands
   b) tous les volumes situés entre un cube et un tétraèdre sont petits
   c) il n'y a pas de volume entre a et b
   d) il n'y a aucun volume petit situé entre deux cubes
   e) tous les cubes ont un tétraèdre à leur gauche
   f) un tétraèdre est derrière tous les cubes

   Y a-t-il dans cette liste de phrases, des phrases ambiguës ?

NB : nous ne nous occupons pas pour l'instant de la vérité ou de la fausseté de ces phrases, nous verrons plus tard comment les évaluer. Pour l'instant, seule nous intéresse leur bonne formation.

2- Variables libres, variables liées

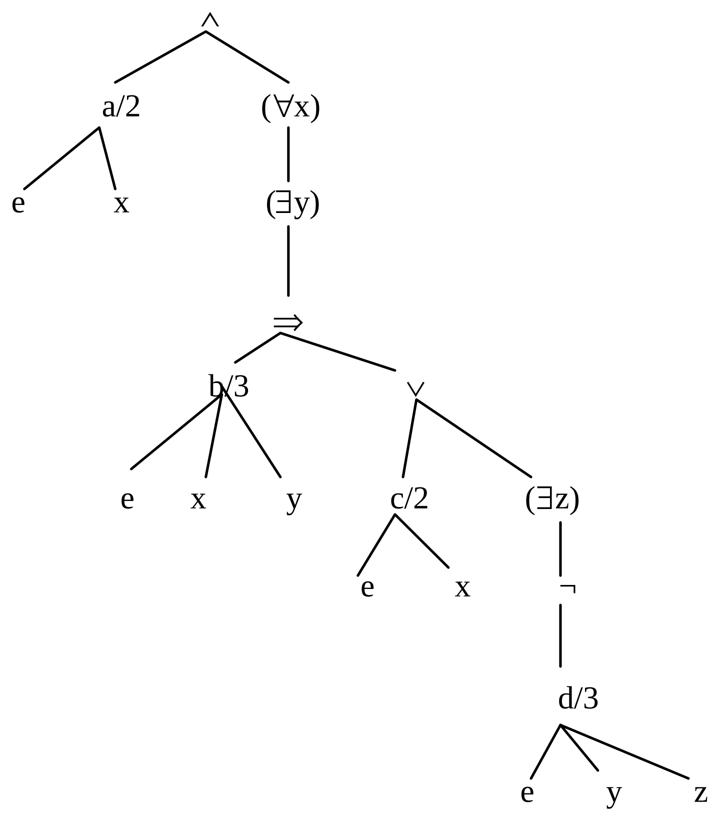
Définition : **champ d'un quantificateur**: étant donnée une formule A contenant un quantificateur Q, on appelle champ de ce quantificateur toute la partie de la formule qui figure à droite de Q.

Occurrence d'une variable : toute formule peut donner lieu à une analyse arborescente. On peut alors repérer chaque noeud de l'arbre par un numéro d'ordre. Une occurrence d'une variable est un numéro dans l'arbre où elle apparaît.

Exemple: soit la formule: (où e et f sont supposées être des constantes)

$$(\mathbf{a}/2(e, x) \wedge (\forall x)\ (\exists y)(\mathbf{b}/3(e, x, y) \Rightarrow (\mathbf{c}/2(e, x) \vee (\exists z)\ \neg \mathbf{d}/3(e, y, z))))$$

on peut la représenter par l'arbre:



En numérotant cet arbre par exemple de la façon suivante: chaque noeud reçoit pour étiquette une suite de n chiffres de sorte que les n-1 premiers indiquent le noeud dont il descend et le dernier son rang dans l'ordre gauche-droite parmi tous ceux qui ont le même noeud-père, on constate que le premier e reçoit l'étiquette: 111, le deuxième : 121111 et le troisième : 1211211. On dira donc que e possède trois occurrences dans cette formule, désignées respectivement par: 111, 121111 et 1211211.

Occurrence de variable liée: une occurrence de variable ζ sera dite *liée* si elle apparaît dans le champ d'un quantificateur $(\forall\zeta)$ ou $(\exists\zeta)$.

Occurrence de variable libre: une occurrence de variable ζ est dite *libre* dans le cas contraire.

Exemple:

Dans la formule $(\mathbf{a}/2(e, x) \wedge (\forall x)(\exists y)\ (\mathbf{b}/3(e, x, y) \Rightarrow (\mathbf{c}/2(e, x) \vee (\exists z)\ \neg \mathbf{d}/3(e, y, z))))$ (1) la première occurrence de x est libre, par contre les deux suivantes sont liées. Toutes les occurrences de z et de y sont liées.

Remarque importante: il est recommandé lorsque une même variable occurre dans une formule tantôt libre tantôt liée de changer le nom soit de la variable libre, soit de la variable liée. C'est une propriété importante, comme nous le comprendrons plus loin avec la manière d'assigner une valeur de vérité à une formule, que la vérité d'une formule ne dépende pas du nom qu'on donne aux variables. Ainsi la formule précédente pourra s'écrire aussi bien :

$(\mathbf{a}/2(e, u) \wedge (\forall x)\ (\exists y)\ (\mathbf{b}/3(e, x, y) \Rightarrow (\mathbf{c}/2(e, x) \vee (\exists z)\ \neg\mathbf{d}/3(e, y, z))))$ (2)

ou:

$(\mathbf{a}/2(e, x) \wedge (\forall u)\ (\exists y\ (\mathbf{b}/3(e, u, y) \Rightarrow (\mathbf{c}/2(e, u) \vee (\exists z)\ \neg\mathbf{d}/3(e, y, z))))$ (3)

Un tel changement de nom de variable a l'avantage de nous faire éviter toute confusion et de définir pour toute formule F deux ensembles disjoints:

Libre (F) = ensemble des variables libres dans F,

Liée (F) = ensemble des variables liées dans F.

Définition : Une formule sera dite *close* si toutes les occurrences de variables qui y figurent sont liées. On parlera aussi dans ce cas de *proposition* (*sentence*).

Comme on le notera, ce n'est pas le cas de la formule (2) ci-dessus. En effet, dans (2), u est libre. (2) n'est donc pas une proposition (au sens où nous entendons par là une expression qui est soit vraie, soit fausse) car sa valeur de vérité dépendra de la valeur donnée à u. C'est donc une *fonction propositionnelle* (définie dans l'univers de la variable u et à valeurs dans {0, 1}).

3- Substitution d'un terme à une variable dans une expression prédicative

Définitions: nous appellerons *terme* toute variable et toute constante individuelles. Plus loin, nous donnerons d'autres définitions de termes dans le cas où nous nous donnons des *foncteur*s.

Etant donnée une formule prédicative ϕ contenant une variable libre ζ, et un terme τ, nous définirons le résultat de la *substitution* de τ à ζ dans ϕ comme l'expression obtenue quand toutes les occurrences de ζ ont été remplacées par des occurrences de τ. On notera $\phi[\tau/\zeta]$ le résultat de la substitution de τ à ζ dans ϕ. On peut écrire $\phi(\tau)$ à la place de $\phi[\tau/\zeta]$, à condition de se souvenir que les places occupées maintenant par τ étaient celles repérées par ζ. Cette précaution est évidemment fondamentale si ϕ est une expression contenant d'autres variables que ζ.

Exemples:

Considérons la formule:

$(\mathbf{a}/2(e, u) \wedge (\forall x)(\mathbf{b}/3(e, x, y) \Rightarrow (\mathbf{c}/2(e, x) \vee (\exists z)\ \neg\mathbf{d}/3(e, y, z))))$ (4)

qui possède les variables libres u et y. Le résultat de la substitution de la constante k à y dans cette formule (opération que nous noterons: [k/y]) sera:

$(\mathbf{a}/2(e, u) \wedge (\forall x)(\mathbf{b}/3(e, x, k) \Rightarrow (\mathbf{c}/2(e, x) \vee (\exists z)\ \neg\mathbf{d}/3(e, k, z))))$ (5)

Le résultat de la substitution de la variable v à y dans cette formule sera:

$(\mathbf{a}/2(e, u) \wedge (\forall x)(\mathbf{b}/3(e, x, v) \Rightarrow (\mathbf{c}/2(e, x) \vee (\exists z)\ \neg\mathbf{d}/3(e, v, z))))$ (6)

De même le résultat de la substitution de x à y dans cette formule serait:

$(\mathbf{a}/2(e, u) \wedge (\forall x)(\mathbf{b}/3(e, x, x) \Rightarrow (\mathbf{c}/2(e, x) \vee (\exists z)\ \neg\mathbf{d}/3(e, x, z))))$ (6')

mais comme on peut le voir aisément, il y a une différence "structurelle" entre (6) et (6'). Dans (6), la substitution de v à y *préserve les liens* de la formule: il n'y a pas de nouveau lien créé. Ce n'est pas le cas de (6') où par substitution de x à y, parce que les occurrences de y sont dans le champ d'un quantificateur portant sur x, immédiatement de nouveaux liens sont créés, qui ne figuraient pas dans la formule originale. Il y a là quelque chose d'illicite, qui se comprend bien si nous considérons seulement le deuxième conjoint de la formule: $(\forall x)(\mathbf{b}/3(e, x, y) \Rightarrow (\mathbf{c}/2(e, x) \vee (\exists z)\ \neg\mathbf{d}/3(e, y, z)))$. En effet, la formule originale serait une fonction propositionnelle alors que la formule à laquelle on arriverait par simple substitution serait une formule close (une proposition). Nous éviterons ce type de situation en restreignant les substitutions d'un terme τ à une variable ζ aux cas où **τ est libre pour ζ**.

Définition : dans une expression $\phi(\zeta)$ (où x est une variable libre) on dira que le terme τ est *libre pour* ζ si la substitution de τ à ζ dans $\phi(\zeta)$ ne crée aucun lien supplémentaire par un quantificateur.

Exemple: dans '(∃y) (x < y)', z est libre pour x, mais y n'est pas libre pour x, car la substitution de y à x conduirait à: '(∃y) (y < y)'. (Or, une théorie qui admettrait la première formule pour vraie de tout x par exemple, n'admettrait pas nécessairement la seconde pour vraie: voir ce qui se passe quand on interprète le signe "<" comme la relation d'ordre strict usuelle sur les réels). Dans '(∃y) (x < y)', il y a un seul lien: entre le quantificateur (∃y) et l'unique occurrence de la variable y. Dans '(∃y) (y < y)', il y a deux liens: entre le quantificateur et les deux occurrences de y.

Exercice:

soit le langage prédicatif suivant:

- var. individuelles : x, y, z
- const. individuelles : p, j, m
- prédicats : **c**/2, **e**/2, **f**/1

Montrer qu'on peut former les formules suivantes :

- **f**(j)
- **f**(x)
- (∃z)**f**(z)
- (∃z)(∀x)(∀y)((**c**(x,y) ∧ **f**(y)) ⇒ **e**(z,x)),
- ¬((∃z)(∀x)(**f**(x) ⇒ **c**(z, x)))

Noter que dans cette liste, seule la deuxième formule a la particularité d'avoir une variable libre. Dans les autres formules, soit il n'y a pas de variable, soit elles sont toutes liées. Remarquer aussi que nos règles de formation n'interdisent pas une formule telle que :

- (∀x)(**f**(y) ⇒ **e**(j, y))

où la variable y est libre et la variable x n'apparaît pas dans la portée du quantificateur (∀x). Cela s'interprétera plus tard comme une quantification vide. On pourrait aussi avoir par exemple :

- (∀x) **f**(j)

4- Interprétation d'un langage prédicatif

4-1- Univers, fonction d'interprétation, structure

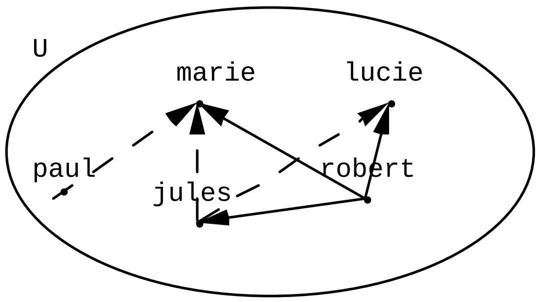
Définition: on appellera *interprétation* d'un langage prédicatif L ou: *L-structure*, la donnée de:

- un ensemble non vide U (appelé *domaine* ou *univers* d'interprétation)
- une fonction I (appelée *fonction d'interprétation*)

Remarque: l'ensemble U pourra être "stratifié", c'est-à-dire muni d'une partition telle que chaque atome de la partition soit associé à un *type* d'individu particulier. La notion de type est ici bien sûr la même que celle des langages informatiques. Par exemple dans notre exemple introductif, nous avions des individus de type *personne* et des individus de type *ville*. La fonction I devra évidemment dans ce cas respecter la stratification de U. Nous n'envisageons pas cette possibilité ici (bien qu'elle soit très intéressante et que nous puissions grâce à elle représenter des faits d'ordre supérieur dans un langage du premier ordre).

La fonction I a comme domaine de définition l'ensemble des constantes, individuelles et prédicatives, du langage. La règle est qu'elle associe à toute constante individuelle un élément de U, à tout prédicat unaire une partie de U, à tout prédicat binaire une partie de U^2, et généralement à tout prédicat n-aire une partie de U^n.
Exemple :
I(**f**) est une partie de U
I(**e**) et I(**c**) sont des parties de $U \times U$ (donc des relations binaires sur U).
I(j), I(p) et I(m) sont des éléments de U.
Le schéma suivant fournit ainsi une interprétation particulière du langage prédicatif de notre exemple.

`U = {paul, jules, marie, lucie, robert}`



I(p) = paul,
I(j) = jules,
I(m) = marie,

I(**f**) = {marie, lucie}
I(**e**) est représenté par les flèches en trait plein,
I(**c**) est représenté par les flèches en pointillé.

4.2 Assignation relative à une interprétation
Définition: on appelle *assignation relative à une interprétation* <U, I> toute application g définie dans l'ensemble des variables individuelles et à valeurs dans U.
On notera g(A) le résultat de l'assignation g à toutes les variables libres figurant dans A.
Exemples d'assignations:

x	paul
y	marie
z	jules

x	paul
y	paul
z	jules

x	marie
y	lucie
z	jules

x	robert
y	robert
z	robert

... (et bien d'autres!)

Si nous notons g_1, g_2, g_3, g_4 ces quatre premières assignations, nous avons par exemple :

g_1(**f**(x)) = **f**(paul),
g_2(**f**(x)) = **f**(paul),
g_3(**f**(x)) = **f**(marie),
g_4(**f**(x)) = **f**(robert),
...

Remarquer qu'il y a ici un abus de notation. `paul`, `marie`, `robert` ... ne sont pas des termes de notre langage! Ce sont seulement des objets individuels dont on suppose l'existence dans l'interprétation donnée. On devrait donc écrire, rigoureusement:

`paul` $\in$ I(**f**), `marie` $\in$ I(**f**) ou `robert` $\in$ I(**f**),

ou bien si l'interprétation I associe ces individus à des constantes, de sorte que:

I(p) = `paul`,
I(j) = `jules`,
I(m) = `marie`,

on écrira g_1(**f**(x)) = **f**(p) au lieu de g_1(**f**(x)) = **f**(`paul`), *parce que* g_1(x) = I(p) = `paul`.

Mais un langage prédicatif ne contient pas nécessairement un nom (= une constante) pour chaque chose de l'univers! Ici par exemple, I n'est pas surjective: il n'y a pas de constante dans le langage pour dénoter `robert`. On peut dans ce cas introduire dans un langage prédicatif un stock de constantes anonymes (n1, n2, n3, ...) qui serviront à désigner des objets arbitraires de l'univers. Par exemple, tombant sur `robert` ... on aura peut-être besoin, ne serait-ce que momentanément, de lui donner un nom. Ce genre de constante sera utilisé pour cela. On peut imaginer ici une distribution de plaques minéralogiques provisoires pour des véhicules non encore immatriculés!

On notera g[x <--- a] une assignation telle que la variable individuelle x se voit assignée l'élément a de l'univers. Par exemple g_1 est une assignation qui pourrait s'écrire g[x<--`paul`].

De plus, nous étendrons la définition d'une assignation g aux constantes en posant:

pour toute constante c figurant dans le langage prédicatif, g(c) = I(c).

4.3 Evaluation des formules relativement à une interprétation M= <U, I> et une assignation g

Désormais, une formule s'évalue (à "VRAI" ou à "FAUX") relativement à une interprétation M= <U, I> et à une assignation g. Les règles d'évaluation sont des règles récursives tout à fait comparables à la définition de la fonction `eval` en LISP. Nous noterons *val*(A) le résultat de l'évaluation de la formule A.

Définition de la fonction val (qui est définie dans l'ensemble de toutes les formules ayant reçu une assignation et à valeurs dans {0, 1}):

(i) *val*(g(**a**/n(x_1,...,x_n))) = 1 ssi (g(x_1), ... , g(x_n)) $\in$ I(**a**/n)

(ii)*val*(g(A) $\wedge$ g(B)) = 1 ssi *val*(g(A)) = *val*(g(B)) = 1

(iii)*val*(g(A) $\vee$ g(B)) = 1 ssi *val*(g(A)) = 1 ou *val*(g(B)) = 1

(iv)*val*(g(A) $\Rightarrow$ g(B)) = 1 ssi *val*(g(A)) = 0 ou *val*(g(B)) = 1

(v)*val*(g($\neg$ A)) = 1 ssi *val*(g(A)) = 0

(vi)*val*(g(($\exists$x)A)) = 1 ssi il existe une assignation h identique à g sauf éventuellement en x telle que *val*(h(A)) = 1

(vii)*val*(($\forall$x)A)) = 1 ssi toute assignation h identique à g sauf éventuellement en x est telle que *val*(h(A)) = 1

Exemple: soit à évaluer les formules:

(1) **f**(j)
(2) **f**(x)
(3) ($\exists$x)**f**(x)
(4) ($\exists$z)($\forall$x)($\forall$y)((**c**(x,y) $\wedge$ **f**(y)) $\Rightarrow$ **e**(z,x))

(1): quelle que soit l'assignation g, puisque nous avons étendu l'assignation aux constantes en imposant que g(c) soit toujours égal à I(c), nous avons:

val(g(**f**(j))) = 1 ssi I(j) $\in$ I(**f**), autrement dit ssi `jules` appartient à l'ensemble F associé à **f**, ce qui n'est pas le cas, donc pour toute assignation g, *val*(g(**f**(j))) = 0. Nous pourrons écrire:

M |= ¬**f**(j)

où M est l'interprétation <U, I>. Cette notation signifie: ¬**f**(j) est une formule vraie dans l'interprétation M. (Cette vérité ne dépend pas d'une assignation quelconque, seulement d'une interprétation donnée).

Remarque: nous constatons ici une évidence: l'évaluation d'une formule ne contenant que des constantes est indépendante d'une assignation particulière.

(2): la valeur de vérité dépend ici bien s•r d'une assignation. Par exemple:

val(g_1(**f**(x))) = 1 ssi g_1(x) $\in$ I(**f**), autrement dit ssi `paul` appartient à F, donc: *val*(g_1(**f**(x))) = 0, mais *val*(g_3(f(x))) = 1 puisque g_3(x) = `marie` et `marie` $\in$ F. Nous pourrons écrire :

(M, g_1) |= ¬ **f**(x)

(M, g_3) |= **f**(x)

(3): *val*(g_1((∃x)**f**(x))) = 1 ssi il existe une assignation h identique à g_1 sauf éventuellement en x telle que val(h(f(x))) = 1. Bien s•r g_1 ne convient pas ici puisque nous venons de voir que val(g_1(f(x))) = 0. En revanche, il existe bien au moins une assignation h identique à g_1 sauf en x telle que val(h(f(x))) = 1. Il suffit de prendre g_1 et de changer la valeur qu'elle donne à x en, par exemple : `marie`. On obtient l'assignation h:

x	marie
y	marie
z	jules

qui convient tout à fait. Donc:

(M, g_1) |= (∃x)**f**(x)

Mais on note immédiatement qu'on aurait pu faire ce raisonnement pour n'importe quelle assignation (puisqu'il n'y a pas d'autre variable libre dans l'expression). On en déduit que l'évaluation est encore une fois indépendante d'une assignation particulière. D'où:

M |= (∃x)**f**(x)

(4): *val*(g((∃z)(∀x)(∀y)((**c**(x,y) ∧ **f**(y)) ⇒ **e**(z,x)))) = 1 ssi il existe une assignation h_1 identique à g sauf éventuellement en z telle que:

val(h_1((∀x)(∀y)((**c**(x,y) ∧ **f**(y)) ⇒ **e**(z,x)))) = 1

or ceci est le cas ssi toute assignation h_2 identique à h_1 sauf éventuellement en x est telle que:

val(h_2((∀y)((**c**(x,y) ∧ **f**(y)) ⇒ **e**(z,x)))) = 1

or ceci est le cas ssi toute assignation h_3 identique à h_2 sauf éventuellement en y est telle que:

val(h_3((**c**(x,y) ∧ **f**(y)) ⇒ **e**(z,x)))) = 1.

Ce qui est le cas si et seulement si:

val(h_3((**c**(x,y) ∧ **f**(y)))) = 0

ou bien *val* (h_3(**e**(z,x))) = 1

On arrive donc à la conclusion: la formule de départ aura la valeur 1 pour l'assignation g s'il existe une assignation h_1 identique à g sauf éventuellement en z telle que toute assignation h_3 identique à h_1 sauf éventuellement en x et en y est telle que:

(*) *val*(h_3(**c**(x, y))) = 0 ou *val*(h_3(**f**(y))) = 0 ou *val*(h_3(**e**(z,x))) = 1.

Supposons par exemple: g = g_1. Changeons la valeur de g_1(z) en: `robert` au lieu de `jules`, on obtient h_1. Considérons maintenant toutes les assignations identiques à h_1 sauf éventuellement en x et en y. Cela donne en fait toutes les assignations pour lesquelles z prend la valeur `robert`. (toutes les g[z <--- `robert`]). Pour vérifier (*), il suffit de considérer les cas où *val*(h_3(**c**(x, y))) = *val*(h_3(**f**(y))) = 1 et de vérifier que dans ces cas-là, on a: *val*(h_3(**e**(z,x))) = 1. D'après l'interprétation, *val*(h_3(**c**(x, y))) = *val*(h_3(**f**(y))) = 1 si et seulement si y est `marie` ou `lucie` et x est `paul` ou `jules`. Considérons alors l'assignation h_3:

x	paul
y	marie
z	robert

on a *val*(h_3(**c**(x, y))) = *val*(h_3(**f**(y))) = 1, mais *val*(h_3(**e**(z,x))) = 1 ssi (h_3(z), h_3(x))∈ I(**e**), autrement dit ssi (`robert, paul`) ∈ I(**e**), ce qui n'est pas le cas. Donc la formule s'évalue à 0 pour I et g_1. On doit noter là encore que le raisonnement aurait été le même en partant de n'importe quelle assignation g. Cette fois, cela est dû à ce que toutes les variables de l'expression sont liées. On peut donc écrire:

$$M \models \neg ((\exists z)(\forall x)(\forall y)((\mathbf{c}(x,y) \wedge \mathbf{f}(y)) \Rightarrow \mathbf{e}(z,x)))$$

On aura noté au passage que dans tous les cas considérés la procédure d'évaluation se terminait. Cela tient évidemment à ce que, à chaque pas dans l'évaluation, on est ramené à l'évaluation d'un cas plus simple (c'est-à-dire contenant un symbole logique en moins). Et cela tenait dans notre exemple au fait que nous avions un univers fini, ce qui permettait de passer en revue tous les cas possibles lorsque les formules étaient quantifiées. Cela ne sera plus le cas si l'univers est infini (cas où par exemple, l'univers esr l'ensemble des nombres entiers). En effet, on gardera bien toujours la première caractéristique (formule à évaluer plus simple à chaque pas) mais l'infinitude de l'univers fera que nous ne pourrons pas toujours terminer l'évaluation d'une formule avec quantificateur. De fait, il a été démontré (Church, 1936, Turing, 1936) que la logique des prédicats du premier ordre, contrairement à la logique propositionnelle, est *indécidable*. Cela signifie qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de décider en un nombre fini de pas qu'une formule est vraie. Cela n'empêche pas qu'elle soit *complète* (Gšdel, 1930). C'est-à-dire qu'il existe un système formel permettant de démontrer *toutes* les formules qui sont vraies. On pourrait penser qu'il suffit alors de prendre ce système pour résoudre la question de la décidabilité, mais c'est lui-même un système indécidable. Autrement dit, confronté à une formule quelconque, il ne sera pas capable en général de dire au bout d'un temps fini si c'est un théorème ou non.

Tarski's World
« The Game »

"Tarski's World" propose une autre manière d'évaluer la vérité d'une formule d'un langage prédicatif, autrement dit ***une autre sémantique***. Cette sémantique repose sur la notion de jeu et suppose deux partenaires, que nous appellerons « Moi » et « Tarski ». L'idée du jeu est que si je soutiens qu'une formule F est vraie par rapport à une situation donnée, alors « Tarski » va essayer d'attaquer mon point de vue, et je vais devoir le défendre. Je ne gagnerai (et la formule ne sera vraie) que si je suis capable de répondre à toutes les objections de « Tarski ». Evidemment, « Tarski » est très fort : si je suis dans l'erreur, il est toujours capable de me donner immédiatement le « contre-exemple qui tue ». Par exemple, supposons une situation où il y a seulement un grand cube, un petit cube et un petit tétraèdre dans l'univers choisi et que je soutienne la proposition « tous les cubes sont grands », alors « Tarski » va immédiatement m'indiquer le petit cube comme contre-exemple à mon assertion, et j'aurai perdu. Les règles du jeu sont les suivantes (elles sont associées à chaque symbole de connecteur ou de quantificateur).

a) cas de « $\neg$ » :
   1- je soutiens la vérité de $\neg A$: « Tarski » m'oblige à soutenir la fausseté de A.
   2- je soutiens la fausseté de $\neg A$: « Tarski » m'oblige à soutenir la vérité de A.
b) cas du «$\wedge$ » :
   1- je soutiens la vérité de $A \wedge B$: « Tarski » me demande de vérifier l'un des deux, si l'un des deux est faux, il me soumettra justement celui-là, si les deux sont vrais ou les deux sont faux, il en choisit un au hasard, si je ne peux pas vérifier la vérité de la sous-formule qu'il me soumet, j'ai perdu. Ainsi, $A \wedge B$ est vrai si et seulement si les deux conjoints (A et B) sont vrais.
   2- Je soutiens la fausseté de $A \wedge B$: « Tarski » me demande de choisir l'une des deux sous-formules et de vérifier qu'elle est fausse.

Résumé :

Je soutiens la vérité de $A \wedge B$: « Tarski » choisit A ou B,
Je soutiens la fausseté de $A \wedge B$: c'est moi qui choisis.

Exemples : dans la situation illustrée par la figure précédente, supposons que je soutienne :

- **f**(marie) $\wedge$ **f**(jules)

alors « Tarski » répond : « you are commited to the truth of **f**(marie) $\wedge$ **f**(jules), show that **f**(jules) is true", évidemment ceci est faux, donc je ne peux pas montrer que **f**(jules) est vrai, donc j'ai perdu.
Supposons maintenant que je soutienne :

- $\neg$(**f**(marie) $\wedge$ **f**(jules))

alors « Tarski » répond : « you are commited to the falsity of **f**(marie) $\wedge$ **f**(jules), choose a formula that you think is wrong", évidemment, je choisis **f**(jules) et j'ai gagné.

c) cas du « $\vee$ » :
   1- je soutiens la vérité de $A \vee B$: « Tarski » me demande de choisir l'une des deux sous-formules et de vérifier qu'elle est vraie.
   2- Je soutiens la fausseté de $A \vee B$: « Tarski » choisit l'une des deux sous-formules et me demande d'établir sa vérité. Là encore, si l'une des deux est vraie, il choisit celle-là, si elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses, il choisit au hasard.

Résumé :

Je soutiens la vérité de $A \vee B$: je choisis A ou B,
Je soutiens la fausseté de $A \vee B$: c'est « Tarski » qui choisit

(remarquer que c'est le contraire du « $\wedge$ ».)

Exemples : je soutiens la vérité de **f**(marie) $\vee$ **f**(jules) :

- « Tarski » : « you are commited to the truth of **f**(marie) $\vee$ **f**(jules) , choose a formula you think is correct".
- Moi: je choisis **f**(marie), j'ai gagné.

Je soutiens la fausseté de **f**(marie) $\vee$ **f**(jules) :

- « Tarski » : « you are commited to the falsity of **f**(marie) $\vee$ **f**(jules) , show that **f**(marie) is wrong".
- Moi: je suis bloqué (car **f**(marie) est correct), j'ai donc perdu.

d) Autres connecteurs : « Tarski » remplace « A $\Rightarrow$ B » par « $\neg$A $\vee$ B », et « A $\Leftrightarrow$ B » par « (A $\Rightarrow$ B) $\wedge$ (B $\Rightarrow$ A) ».

e) cas du « $\exists$ » :

1- je soutiens la vérité de ($\exists$x)A(x) : « Tarski » me demande de choisir un b tel que A(b) soit vrai.
2- Je soutiens la fausseté de ($\exists$x)A(x) : « Tarski » essaie de trouver un objet b tel que A(b) soit vrai.

Résumé :

Je soutiens la vérité de ($\exists$x)A(x) : je choisis un b tel que A(b)
Je soutiens la fausseté de ($\exists$x)A(x) : c'est « Tarski » qui choisit.

Exemples : toujours dans la même situation, je soutiens la vérité de $\exists$x (e(robert, x)).

- « Tarski » : « you are commited to the truth of $\exists$x (**e**(robert, x)), pick up a b such that **e**(robert, b)".
- Moi: je choisis lucie, j'ai gagné.

Je soutiens la fausseté de $\exists$x (**e**(robert, x)).

- « Tarski » : « you are commited to the falsity of $\exists$x (**e**(robert, x)), show that **e**(robert, marie) is wrong"
- Moi: je suis bloqué, **e**(robert, marie) est correct. J'ai donc perdu.
-

e) cas du « $\forall$ » :

1- je soutiens la vérité de ($\forall$x)A(x) : « Tarski » essaie de trouver un objet b tel que A(b) soit faux.
2- Je soutiens la fausseté de ($\forall$x)A(x) : « Tarski » me demande de choisir un b tel que A(b) soit faux.

Résumé :

Je soutiens la vérité de ($\forall$x)A(x) : « Tarski » choisit
Je soutiens la fausseté de ($\forall$x)A(x) : c'est moi qui choisit.

(là encore, c'est le contraire de $\exists$)

Exemples : Je soutiens la vérité de $\forall$x (**f**(x) $\Rightarrow$ **e**(robert, x)).

- « Tarski » : (ne trouvant pas de b tel que $\mathbf{f}(b) \Rightarrow \mathbf{e}(robert, b)$ soit faux, il en prend un au hasard) . « You are commited to the truth of $\forall x\ (\mathbf{f}(x) \Rightarrow \mathbf{e}(robert, x))$, show that $\neg\mathbf{f}(marie) \vee \mathbf{e}(robert, marie)$ is correct, choose a formula you think is correct"
- Moi: je choisis $\mathbf{e}(robert, marie)$: j'ai gagné.

Question : que ce serait-il passé si « Tarski » avait choisi *jules* ou *paul* à la place de *marie* ?

Je soutiens la fausseté de $\forall x\ (\mathbf{f}(x) \Rightarrow \mathbf{e}(robert, x))$.

- « Tarski » : « You are commited to the falsity of $\forall x\ (\mathbf{f}(x) \Rightarrow \mathbf{e}(robert, x))$, choose a b such that you think $\neg\mathbf{f}(b) \vee \mathbf{e}(robert, b)$ is wrong"
- Moi: j'essaie b = marie,
- « Tarski » : « you are commited to the falsity of $\neg\mathbf{f}(marie) \vee \mathbf{e}(robert, marie)$, show that $\mathbf{e}(robert, marie)$ is wrong"
- Moi: $\mathbf{e}(robert, marie)$ est correct, donc j'ai perdu.

Exemple plus compliqué :
Je soutiens que dans cette structure :
$\forall x\ (\forall y\ ((\mathbf{e}(x, y) \wedge \neg\mathbf{f}(y)) \Rightarrow \mathbf{c}(y, marie)))$

- « Tarski » : « you are commited to the truth of:
$$\forall x\ (\forall y\ ((\mathbf{e}(x, y) \wedge \neg\mathbf{f}(y)) \Rightarrow \mathbf{c}(y, marie))),$$
therefore you are commited to the truth of :
$$\forall y\ ((\mathbf{e}(robert, y) \wedge \neg\mathbf{f}(y)) \Rightarrow \mathbf{c}(y, marie)),$$
therefore you are commited to the truth of :
$$(\mathbf{e}(robert, jules) \wedge \neg\mathbf{f}(jules)) \Rightarrow \mathbf{c}(jules, marie),$$
therefore to the truth of :
$$\neg(\mathbf{e}(robert, jules) \wedge \neg\mathbf{f}(jules)) \vee \mathbf{c}(jules, marie),$$
choose a formula you think is correct »
- Moi: je choisis $\mathbf{c}(jules, marie)$; j'ai gagné.

Question : énumérer tous les choix possibles qu'aurait pu faire « Tarski » pour x et pour y, vérifier que dans chaque cas, il y a une stratégie gagnante pour « Moi », c'est-à-dire une façon de répondre qui assure à « Moi » la victoire.

Exercices :

1- Sur le modèle du dialogue précédent, imaginer un dialogue similaire pour les formules suivantes (toujours par rapport à la même structure) :

- $\forall x\ (\mathbf{f}(x) \Rightarrow \exists y\ (\mathbf{e}(y, x)))$
- $\forall x\ (\exists y\ (\mathbf{c}(paul, x) \Rightarrow \mathbf{e}(y, x)))$
- $\forall x\ (\forall y\ (\mathbf{c}(x, y) \Rightarrow \mathbf{e}(robert, y)))$
- $\forall x\ (\forall y\ ((\mathbf{e}(robert, x) \wedge \mathbf{f}(x)) \Rightarrow \mathbf{c}(y, x)))$
- $\exists y\ (\mathbf{f}(y) \wedge \forall x\ (\neg\mathbf{f}(x) \Rightarrow (\mathbf{c}(x, y) \vee \mathbf{e}(x, y))))$

2- Evaluer la valeur de vérité des mêmes formules en utilisant la procédure récursive du paragraphe 4-3.

3- Dans « TARSKI’S World », ouvrez les fichiers `Peirce.wld` et `Peirce.sen`. Faites le jeu sur les formules proposées dans `Peirce.sen`.

4- Idem avec les fichiers `Leibniz.wld` et `Zorn.sen`.

5-Notion de modèle, consistance et déduction

5-1 Modèles

Définition : étant donné un ensemble Φ de formules closes d'un langage prédicatif donné, on appelle **modèle de Φ** toute interprétation <U, I> par rapport à laquelle toutes les formules de Φ sont vraies.

Un ensemble Φ de formules closes d'un langage prédicatif est dit **consistant** ou **compatible** s'il en existe un modèle. Il est dit **inconsistant** dans le cas contraire.

Remarque: on appelle souvent **théorie** un ensemble de formules de closes Φ d'un langage prédicatif L. On dit alors qu'une théorie est consistante si et seulement si elle admet un modèle.

On voit que l'on peut désormais généraliser les notions introduites à propos de la logique propositionnelle (consistance, inconsistance, déductibilité).

Définition: étant données des formules closes $A_1, ..., A_n$ et B d'un langage prédicatif, on dira que B **se déduit** (sémantiquement) **de** $A_1, ..., A_n$ et on écrira:

$$\{A_1, ..., A_n\} \models B$$

si et seulement si tout modèle de $\{A_1, ..., A_n\}$ est un modèle de B.

Définition: une formule close A d'un langage prédicatif L sera dite *universellement valide* (cf tautologie en logique propositionnelle) si et seulement si elle est vraie dans toute L-structure. On écrit dans ce cas: $\models A$.

On démontre maintenant de façon analogue à ce qu'on a vu en logique propositionnelle:

Proposition: $A \models B$ si et seulement si : $\models (A \Rightarrow B)$

Définition: deux formules closes A et B d'un langage prédicatif L sont dites *universellement équivalentes* si et seulement si: $\models (A \Leftrightarrow B)$.

Définition: deux théories **T** et **S** sont dites équivalentes si et seulement si elles admettent les mêmes modèles.

Ajoutons quelques notations dont nous aurons besoin:

nous écrirons: $M \models A$, pour: A est vraie dans la L-structure M, quelle que soit l'assignation considérée. Cela est équivalent à: la *clôture universelle* de A est vraie dans M, où *clôture universelle* d'une formule signifie: formule obtenue en ajoutant devant elle des quantificateurs universels portant sur toutes les variables qui sont libres dans A.

5-2. Quelques formules universellement valides de la logique des prédicats du premier ordre

Nous allons montrer dans ce qui suit que certaines formules sont toujours vraies, indépendamment de toute interprétation et de toute assignation. Ces formules vraies donneront lieu, comme dans le cas de la logique propositionnelle, à des règles d'inférence. On pourra ensuite utiliser certaines pour construire un système formel qui démontre toutes les formules qui sont des tautologies.

5-2-1 Règle de particularisation:

$$\boxed{\models ((\forall x)\, P(x)) \Rightarrow P[\tau/x]}$$

où τ est libre pour x dans P(x).

Dem: le schéma général des démonstrations que nous allons faire maintenant est le suivant: on suppose que la formule peut être fausse, et on montre que cela entraîne alors nécessairement une contradiction. Pour être précis, je suppose qu'il existe une interprétation et une assignation pour lesquelles la formule est fausse. Alors cela entraîne que dans cette interprétation et cette assignation, il y a une contradiction. Ici par exemple, supposons l'existence d'une interprétation M et d'une assignation g telles que:

$val(g(((\forall x)\ P(x)) \Rightarrow P[\tau/x]) = 0$

alors cela entraînerait: $val(g((\forall x)\ P(x))) = 1$ et $val(g(P[\tau/x])) = 0$. La première de ces égalités entraîne que pour toute assignation h identique à g sauf éventuellement en x:

$val(h(P(x)) = 1$

Autrement dit: pour toute assignation d'une valeur α à x, dans cette interprétation M, on aurait: $val(P(\alpha)) = 1$. Mais parmi toutes les assignations possibles il en est nécessairement au moins une qui assigne la valeur $g(\tau)$ à x, c'est-à-dire la valeur que g assigne à τ (soit, si τ est une constante, la valeur $I(\tau)$, soit, si τ est une variable, la valeur $g(\tau)$). Pour une telle assignation $h[x\text{<--}\ g(\tau)]$, on aurait à la fois $val(h(P(x)) = 1$ et $val(h(P(x)) = 0$, ce qui est impossible.

Bien sûr, il n'y aurait pas contradiction si τ désignait une variable déjà quantifiée dans P. En effet, dans ce dernier cas, nous avons vu que la valeur de vérité donnée à $g(P(\tau))$ est en fait *indépendante* de l'assignation particulière faite à τ par une fonction d'assignation g, elle n'a donc pas de raison d'être égale à val(h(P(x)) où h assigne à x la valeur assignée à τ par g. Ce qui fait que $val(g(P[\tau/x])) = 0$ n'entraînerait pas nécessairement $val(h(P(x)) = 0$.

Prenons un exemple:
supposons que dans une structure M la formule suivante soit vraie:

$(\forall x)\ (\exists y)\ \mathbf{a}(x, y)$

(on peut imaginer que le prédicat **a** traduise la relation `aimer`)
Nous ne pouvons pas en déduire:

$(\exists y)\ \mathbf{a}(y, y)$

bien que cette dernière formule s'obtienne à partir de $(\exists y)\ \mathbf{a}(x, y)$ par substitution du terme y à la variable x.
(avec notre "interprétation" suggérée: on ne peut pas déduire du fait que tout individu aime au moins une personne le fait qu'il existe un individu qui s'aime lui-même !).
On peut en effet trouver (sans que cela produise une contradiction) une L-structure M et une assignation g telles que:

$val(g((\forall x)\ (\exists y)\ \mathbf{a}(x, y))) = 1$ et

$val(g((\exists y)\ \mathbf{a}(y, y))) = 0$

Cela tient à ce que parmi toutes les assignations différant de g seulement possiblement en x, qui rendent par hypothèse $(\exists y)\ \mathbf{a}(x, y)$ vraie, celle qui donne à x et à y la même valeur donne bien sûr à $(\exists y)\ \mathbf{a}(x, y)$ la valeur 1, mais *on n'a pas*: $val(h((\exists y)\ \mathbf{a}(x, y))) = val(h((\exists y)\ \mathbf{a}(y, y)))$, ce qui empêche d'avoir 1 = 0 !
On comprend donc ici le rôle joué par la restriction portant sur le terme τ et la raison pour laquelle nous imposons de manière générale que les substitutions licites soient celles pour lesquelles le *substituant soit libre pour le substitué*. ◊
On peut systématiser ce genre de démonstration et simplifier les notations sans danger. D'abord, pour nous débarrasser du problème posé par "t libre pour x dans P", on suppose que si t est une variable, alors t est une *variable neuve*, c'est-à-dire qui n'a encore jamais été utilisée (en particulier non utilisée dans notre formule). Si ce n'est pas le cas, on la renomme. Cela suppose évidemment de travailler dans un système qui possède un stock de variables quasi inépuisable. Nous supposons donc désormais que notre ensemble de

variables est infini dénombrable.[2] Le raisonnement se ramène à : nous partons de l'hypothèse que $((\forall x)\ P(x)) \Rightarrow P[\tau/x]$ est faux. Cela entraine: $(\forall x)\ P(x)$ est vrai et $P[\tau/x]$ est faux. Mais si $(\forall x)\ P(x)$ est vrai, alors toute assignation de valeur α à x est telle que $P(\alpha)$ est vrai. Donc y compris celle pour laquelle $\alpha = g(\tau)$. (Nous écrirons simplement: $\alpha = \tau$). On peut encore simplifier la présentation de cette démonstration en remarquant qu'à chaque stade, on a un ensemble de formules dont on suppose qu'elles sont fausses et un ensemble de formules dont on suppose qu'elles sont vraies. Par convention, on va mettre les formules fausses à droite d'un symbole |, et les formules vraies à gauche. On atteint une contradiction si on atteint un stade où une même formule est à la fois à gauche et à droite. Une expression du genre:

$$A_1, ..., A_n \mid B_1, ..., B_n$$

s'appelle *un séquent*. Une habitude remontant aux années trente veut qu'on mette l'hypothèse en bas et qu'on remonte vers les feuilles.

Départ : $\mid ((\forall x)\ P(x)) \Rightarrow P[\tau/x]$ (pas de formule vraie)
pas 1 : $((\forall x)\ P(x)) \mid P[\tau/x]$
pas 2 : $\{x := \tau\}\ P(\tau) \mid P(\tau)$
stop (car contradiction).

Remarque: la notation$\{x := \tau\}$ signifiera désormais qu'on fixe une assignation pour laquelle la variable x prend pour valeur la même que celle que prend τ (que ce soit par assignation ou par interprétation).

Représentation classique :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{stop!}}{P(\tau) \mid P(\tau)}}{((\forall x)\ P(x)) \mid P[\tau/x]}}{\mid ((\forall x)\ P(x)) \Rightarrow P[\tau/x]}$$

Exercice : donner la version « Tarski’s World » de la validité universelle de cette formule, en utilisant le « Jeu ».

5-2-2 Règle de généralisation existentielle

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad\quad \models (P[\tau/x] \Rightarrow (\exists x)\ P(x)) \\ (\tau \text{ libre pour x dans P}) \end{array}}$$

Démonstration simplifiée:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{stop}}{P[\tau/x] \mid P(\tau)}}{P[\tau/x] \mid (\exists x)\ P(x)}}{\mid P[\tau/x] \Rightarrow (\exists x)\ P(x)}$$

[2] Noter que dans un langage comme Prolog, c'est pratiquement le cas. Un interpréteur Prolog distribue en effet des noms de variables au fur et à mesure des besoins. Pour cela, il utilise des nombres entiers (_345, _876, etc.)

commentaire: $P[\tau/x] \mid\ (\exists x)\ P(x)$ signifie que $(\exists x)\ P(x)$ est faux. Donc il n'existe pas d'assignation de α à x telle que $P(\alpha)$ soit vrai. Donc dans toute assignation, P(x) est faux. Donc en particulier pour une assignation telle que $x := \tau$.

Exercice : donner la version « Tarski’s World » de la validité universelle de cette formule, en utilisant le « Jeu ».

5-2-3 Règle de généralisation universelle

$$\frac{M \models P[y/x]}{M \models ((\forall x)\ P(x))}$$

où y est une **variable** *libre pour x* dans P

Comme on peut le constater, cette règle est inhabituelle dans sa forme. Elle dit que si P[y/x] est vraie dans M *pour toute* assignation, alors $(\forall x)\ P(x)$ est également vraie. La prémisse est en haut, la conclusion en bas.

Démonstration: Admettons: $M \models P[y/x]$, et supposons que $M \mid\!-\ ((\forall x)\ P(x))$ (ce qui signifie qu'il existe une assignation rendant faux $(\forall x)\ P(x)$ dans M). "$M \models P[y/x]$" signifie que *toute* assignation rend P(y) vraie relativement à l'interprétation M. Mais comme il existe une assignation g rendant fausse $(\forall x)\ P(x)$ dans M, il en résulte l'existence d'une assignation h identique à g sauf éventuellement en x (supposons $h(x) = \alpha$) telle que $h(P(x)) = P(\alpha)$ soit fausse. Considérons alors une assignation qui à y donne la valeur α, on a à la fois: $P(\alpha)$ est vraie et $P(\alpha)$ est fausse. ◊

Question: à quoi cette règle correspond-elle du point de vue du « jeu » de « Tarski’s World » ?

Cette règle, fondamentale, permet d'*introduire* un quantificateur universel. Etendons nous un instant sur elle. On doit noter que le fait de supposer que P[y/x] est vraie pour toute assignation se traduit par le fait que n'importe quelle valeur appartenant à l'univers U peut se substituer à la variable x, autrement dit que rien ne doit restreindre le "choix" d'une valeur y venant se substituer à x (sauf le fait de demeurer libre pour x, mais alors s'il y a un problème de ce type, on peut toujours y remédier par un renommage des variables). On ne saurait confondre cette règle avec la règle de généralisation existentielle. Dans cette dernière en effet, nous n'avons pas l'exigence que la formule de gauche contienne une variable libre et soit vraie indépendamment de toute assignation: il suffit qu'*une* assignation rende P vrai. Enfin, cette règle justifie la notion de *quelconque*. Dire que P[y/x] est vrai dans toute assignation de valeurs aux variables libres de P[y/x] (donc à y) peut se traduire par: P est vraie pour un y quelconque. Cette règle peut alors être lue: si P est vraie d'un y *quelconque*, alors elle est vraie de *tout* x.

5-2-4- Règle de particularisation existentielle

La règle suivante doit être lue avec précaution. Nous avons supposé l'existence d'un stock de constantes anonymes (n1, n2, n3, ...) servant à désigner des objets arbitraires de l'univers. Nous allons ici en faire usage. La règle signifie que lorsqu'on a une formule existentielle $(\exists x)\ P(x)$ alors on peut puiser dans ce stock de constantes anonymes en en prenant une qui n'a jamais servi, notons-la n et écrire: P(n).

$$\models ((\exists x)\ P(x)) \Rightarrow P(\mathtt{n})$$

où n est une constante anonyme neuve.

Dem: dire que $(\exists x)\ P(x)$ est vraie dans une L-structure M, c'est dire qu'il existe une assignation g telle que val(g(P(x)) = 1. Donnons une désignation n (au moyen d'une constante anonyme) à l'élément g(x) de la structure, alors on a: val(P(n)) = 1.

Question: à quoi cette règle correspond-elle du point de vue du « jeu » de « Tarski's World » ?

5-2-5 Autre exemple de formule universellement valide

$$\models\ ((\forall x)\ (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow (\forall x)\ Q)$$
où P ne contient pas x comme variable libre.

Remarque: nous adoptons la convention que P, Q, ... représentent des expressions prédicatives entières, sans précision supplémentaire du nom ni du nombre de variables y occurrant.

Démonstration: supposons que ce ne soit pas une tautologie fonctionnelle, alors: $((\forall x)(P\Rightarrow Q))$ est vrai dans une certaine interprétation M et une certaine assignation g (hyp1) et, dans la même situation, $(P\Rightarrow(\forall x)\ Q)$ est faux (hyp2). La valeur que g assigne à x ne joue pas de rôle dans l'évaluation de $(P\Rightarrow(\forall x)\ Q)$ puisque P ne contient pas x libre et que dans $(\forall x)Q$, x est liée. Elle n'en joue pas davantage dans l'évaluation de $((\forall x)(P\Rightarrow Q))$. $(P\Rightarrow(\forall x)\ Q)$ est faux implique que dans (M, g), P est vrai et $(\forall x)\ Q$ est faux. Donc il existe une assignation h identique à g sauf éventuellement en x telle que dans cette assignation, Q soit faux. Comme la valeur de vérité de P ne dépend pas de l'assignation faite à x, dans (M, h) on a: P vrai et Q faux, donc $(P \Rightarrow Q)$ est faux. D'où, l'existence d'une assignation h identique à g sauf éventuellement en x telle que $(P \Rightarrow Q)$ soit fausse. Ce qui montre que $(\forall x)\ (P \Rightarrow Q)$ est faux, contrairement à hyp1.

stop!   stop!

$P \Rightarrow Q(\tau)\ ,\ P \mid\ P,\ Q(\tau)$ $P \Rightarrow Q(\tau)\ ,\ P,\ Q(\tau) \mid\ Q(\tau)$

$P \Rightarrow Q(\tau)\ ,\ P \mid\ Q(\tau)$[3] $\{x := \tau\}$

$(\forall x)\ (P \Rightarrow Q)\ ,\ P \mid\ Q(\tau)$ {choix d'un τ arbitraire - inconnu - qui rend faux $(\forall x)\ Q$}

$(\forall x)\ (P \Rightarrow Q)\ ,\ P \mid (\forall x)\ Q$

$(\forall x)\ (P \Rightarrow Q) \mid (P \Rightarrow (\forall x)\ Q)$

$\mid ((\forall x)\ (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow (\forall x)\ Q)$

commentaire : le dernier pas (en haut de cette suite de séquents) est inhabituel. Il consiste en fait simplement en : dire que $A \Rightarrow B$ est vrai c'est dire que A est faux *ou* que B est vrai. D'où deux alternatives: en remontant, la preuve bifurque et donne deux branches. Pour que l'hypothèse d'où nous sommes partis soit contredite, il faut désormais que *toutes* les branches mènent à une impasse (une contradiction). S'il devait arriver qu'une branche ne conduise pas à une impasse, alors nous aurions trouvé un contre-exemple valide de ce que nous voulions démontrer. Nous voyons ici qu'en fait cette technique est une recherche de contre-exemples. *Une formule est vraie si et seulement si elle n'a pas de contre-exemple valide.*

[3] Noter qu'à ce pas de la preuve, si x figurait libre dans P, on aurait à gauche: $P(\tau) \Rightarrow Q(\tau)$ et P(x). Ce qui ne permettrait pas de déduire $Q(\tau)$ car rien n'oblige à ce que x ait la (même) valeur (que) τ. D'où la nécessité de supposer que x n'occurre pas libre dans P.

6- Un exemple de résolution de problème en calcul des prédicats

On admet les prémisses suivantes:

– *les chevaux sont plus rapides que les chiens*
– *il existe un lévrier plus rapide que tout lapin*
– *les lévriers sont des chiens*
– *Harry est un cheval*
– *Ralph est un lapin*

Peut-on déduire:

– *Harry est plus rapide que Ralph ?*

Traduisons d'abord les phrases dans un langage prédicatif.
Ce langage L doit posséder les symboles suivants:

- variables individuelles: x, y, z
- constantes individuelles: `harry, ralph`
- prédicats unaires: **cheval**, **chien**, **lévrier**, **lapin**
- prédicats binaires: **plus_rapide**

Nous écrivons les traductions suivantes:

$(\forall x)(\forall y)\ ((\mathbf{cheval}(x) \wedge \mathbf{chien}(y)) \Rightarrow \mathbf{plus\_rapide}(x, y))$
$(\exists y)\ (\mathbf{levrier}(y) \wedge ((\forall z)\ \mathbf{lapin}(z) \Rightarrow \mathbf{plus\_rapide}(y, z)))$
$(\forall y)\ (\mathbf{levrier}(y) \Rightarrow \mathbf{chien}(y))$
$\mathbf{cheval}(\mathtt{harry})$
$\mathbf{lapin}(\mathtt{ralph})$

Nous ajoutons également un axiome (formule close) concernant le prédicat plus_rapide:

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ \mathbf{plus\_rapide}(x, y) \wedge \mathbf{plus\_rapide}(y, z) \Rightarrow \mathbf{plus\_rapide}(x, z)$

NB: cela signifie que les seules L-structures qui nous intéressent sont celles pour lesquelles cette formule est vraie, c'est-à-dire: les modèles de cette formule. En un sens, nous venons de définir une théorie de la rapidité, supposée consistante et nous nous restreignons aux modèles de cette théorie !

Nous pouvons alors faire la déduction suivante: (où nous désignons respectivement par: GU, PU, GE et PE les règles de: généralisation universelle, particularisation universelle, généralisation existentielle et particularisation existentielle, par e$\wedge$ la règle : $A \wedge B \models A$ ou la règle $A \wedge B \models B$ et par i$\wedge$ la règle: $\{A, B\} \models A \wedge B$).

1. $(\forall x)(\forall y)\ ((\mathbf{cheval}(x) \wedge \mathbf{chien}(y)) \Rightarrow \mathbf{plus\_rapide}(x, y))$	PREM
2. $(\exists y)\ (\mathbf{levrier}(y) \wedge ((\forall z)\ \mathbf{lapin}(z) \Rightarrow \mathbf{plus\_rapide}(y, z)))$	PREM
3. $(\forall y)\ (\mathbf{levrier}(y) \Rightarrow \mathbf{chien}(y))$	PREM
4. $\mathbf{cheval}(\mathtt{harry})$	PREM
5. $\mathbf{lapin}(\mathtt{ralph})$	PREM
6. $\mathbf{levrier}(\mathtt{n}) \wedge ((\forall z)\ \mathbf{lapin}(z) \Rightarrow \mathbf{plus\_rapide}(\mathtt{n}, z))$	PE, 2
7. $\mathbf{levrier}(\mathtt{n})$	e$\wedge$, 6
8. $\mathbf{levrier}(\mathtt{n}) \Rightarrow \mathbf{chien}(\mathtt{n})$	PU, 3
9. $\mathbf{chien}(\mathtt{n})$	MP, 7,8
10. $(\forall z)\ \mathbf{lapin}(z) \Rightarrow \mathbf{plus\_rapide}(\mathtt{n}, z)$	e$\wedge$, 6
11. $\mathbf{lapin}(\mathtt{ralph}) \Rightarrow \mathbf{plus\_rapide}(\mathtt{n}, \mathtt{ralph})$	PU, 10
12. $\mathbf{plus\_rapide}(\mathtt{n}, \mathtt{ralph})$	MP, 5,11
13. $(\mathbf{cheval}(\mathtt{harry}) \wedge \mathbf{chien}(\mathtt{n})) \Rightarrow \mathbf{plus\_rapide}(\mathtt{harry}, \mathtt{n})$	PU, 1
14. $\mathbf{cheval}(\mathtt{harry}) \wedge \mathbf{chien}(\mathtt{n})$	i$\wedge$, 4,9
15. $\mathbf{plus\_rapide}(\mathtt{harry}, \mathtt{n})$	MP,13,14
16. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ \mathbf{plus\_rapide}(x, y) \wedge \mathbf{plus\_rapide}(y, z) \Rightarrow \mathbf{plus\_rapide}(x, z)$	Axiome
17. $\mathbf{plus\_rapide}(\mathtt{harry}, \mathtt{n}) \wedge \mathbf{plus\_rapide}(\mathtt{n}, \mathtt{ralph}) \Rightarrow$	

	plus_rapide(`harry, ralph`)	PU, 16
18.	**plus_rapide**(`harry, n`) $\wedge$ **plus_rapide**(`n, ralph`)	i$\wedge$, 12,15
19.	**plus_rapide**(`harry, ralph`)	MP, 17,18

Exercices

1- Démontrer les tautologies suivantes où Q est une proposition ou une fonction propositionnelle ne contenant aucune occurrence libre de x:

(8) $\models \forall x\ (P(x) \vee Q) \Leftrightarrow (\forall x\ P(x) \vee Q)$
(9) $\models \exists x\ (P(x) \vee Q) \Leftrightarrow (\exists x\ P(x) \vee Q)$
(10) $\models \forall x\ (P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow (\forall x\ P(x) \wedge Q)$
(11) $\models \exists x\ (P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow (\exists x\ P(x) \wedge Q)$
(12) $\models \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\exists x\ P(x) \Rightarrow Q)$
(13) $\models \exists x\ (P(x) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\forall x\ P(x) \Rightarrow Q)$
(14) $\models \forall x\ (Q \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow \forall x\ P(x))$
(15) $\models \exists x\ (Q \Rightarrow P(x)) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow \exists x\ P(x))$

Réponse pour (12):
Montrons ici simplement: $\models \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q) \Rightarrow (\exists x\ P(x) \Rightarrow Q)$ (le lecteur démontrera l'implication réciproque).

```
---------------              ------------
P(τ) | P(τ), Q               P(τ), Q | Q  [⇒ |]
P(τ) ⇒ Q, P(τ) | Q  {x := τ}[∀ |]
(∀x) (P(x) ⇒ Q), P(τ) | Q  (τ: une inconnue) [∃ |]
(∀x) (P(x) ⇒ Q), (∃x)P(x) | Q  [| ⇒]
(∀x) (P(x) ⇒ Q) | (∃x)P(x) ⇒ Q  [| ⇒]
| (∀x) (P(x) ⇒ Q) ⇒ ((∃x)P(x) ⇒ Q)
```

2- Démontrer les "lois de distributivité" pour les quantificateurs:

(16) $\models \forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x))$
(17) $\models \exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x))$

3- Soient les formules suivantes du calcul des prédicats:

a) $(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x)\ \neg P(x)$
b) $(\exists x)\ P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\ P(x)$
c) $(\forall x)\ (\forall y)\ (P(x) \Leftrightarrow P(y))$
d) $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow (\forall x)\ P(x))$
e) $(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$

Montrer qu'elles sont vraies dans toute interprétation dont le domaine d'individus se compose d'un seul élément.
En choisissant des interprétations appropriées dans un domaine d'individus à deux éléments, montrer qu'elles ne sont pas universellement valides.

4- L'*argument ontologique* [4]repose sur le fait que si un être est tel que l'on ne peut en concevoir de plus grand, il doit nécessairement exister. On convient de représenter "x existe" par: "E(x)" et on admet que "$(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow E(x))$" est vrai, quel que soit le prédicat P.

1. Le croyant soutient que:

   Quel que soit x, si x est tel que l'on ne peut rien penser de plus grand que x, alors x existe.

2. L'insensé soutient que:

   Il n'y a pas d'x tel que rien de plus grand que x ne peut être pensé et x existe.

a) Transcrire les deux affirmations dans la notation du calcul des prédicats (x est un être en comparaison duquel on ne peut en penser de plus grand: Q(x)). Montrer que, compte tenu de ce qu'on a supposé concernant le prédicat "E", la thèse du croyant est vraie, mais sans intérêt, et celle de l'insensé n'est pas incompatible avec elle.

b) Quelle est la prémisse nécessaire pour pouvoir déduire:

$$(\exists x)\ (P(x) \wedge E(x)) \text{ de } (\forall x)\ (P(x) \Rightarrow E(x))?$$

que peut-t-on en conclure (si on admet la formulation ci-dessus et les lois du calcul des prédicats) concernant l'argumentation utilisée par le croyant?

c) L'incroyant admet la proposition anselmienne: "Un être en comparaison duquel on ne peut en penser de plus grand et qui n'existe pas n'est pas un être en comparaison duquel on ne peut en penser de plus grand." Est-il contraint par là à admettre la proposition: "Il y a un être en comparaison duquel on ne peut en penser de plus grand"?

5- Les phrases suivantes sont-elles compatibles? autrement dit: admettent-elles un modèle?

Aucun informaticien n'est romancier
Tout non-informaticien déteste les puzzles
Il y a un romancier qui aime les puzzles

6- De l'ensemble des prémisses suivant :

---

[4] L'argument ontologique, ou "preuve ontologique" est l'argument selon lequel Saint Anselme croit démontrer l'existence de Dieu. Ce nom lui a été donné au XVIIème siècle, par Descartes. Anselme naquit à Aoste en 1033, et devint prieur au monastère de Bec en 1063, abbé en 1078. Il mourut en 1109. (La contemplation conserve!). Ses oeuvres sont le résultat de discussions qu'il avait au monastère. Anselme accorde une grande place à la raison. Selon lui, "la recherche rationnelle est non pas la satisfaction d'un vain orgueil humain, mais un degré dans la vie du salut et comme une préparation à la béatitude". Le véritable argument ontologique est le suivant: "l'*insipiens* lui-même (celui qui doute...) quand il entend ce que je dis: un être tel qu'on ne peut en penser de plus grand, comprend ce qu'il entend, et ce qu'il comprend est dans son intellect, même s'il ne comprend pas qu'il existe; car autre chose est d'avoir une réalité dans l'intellect, autre chose de comprendre qu'elle existe...mais: l'être tel que rien de plus grand ne peut être pensé ne peut être dans le seul intellect. Si en effet il est dans le seul intellect, on peut penser qu'il est aussi en réalité, ce qui est plus (!!!). Si donc l'être tel que rien de plus grand ne peut être pensé est dans le seul intellect, l'être tel que rien de plus grand ne peut être pensé est tel que quelque chose de plus grand peut être pensé: mais cela n'est pas possible; il est donc hors de doute que l'être tel que rien de plus grand ne peut être pensé est et dans l'intellect et dans la réalité." cf références in E. Bréhier: "La philosophie du Moyen-Age".

si quelqu'un résoud ce problème alors tout mathématicien le résoud,
Cabot est mathématicien et ne résoud pas ce problème

peut-on déduire :

personne ne résoud ce problème