

Introduzione ai filtri

Filtri di Butterworth

Filtri di Chebishev

Introduzione ai filtri

I filtri sono dispositivi che elaborano segnali analogici: al variare della frequenza, cambia il modo con cui il segnale riesce a passare attraverso il filtro. Pur esistendo anche filtri specificati in fase, noi studieremo i filtri specificati in ampiezza; distinguiamo 4 tipi di filtri :

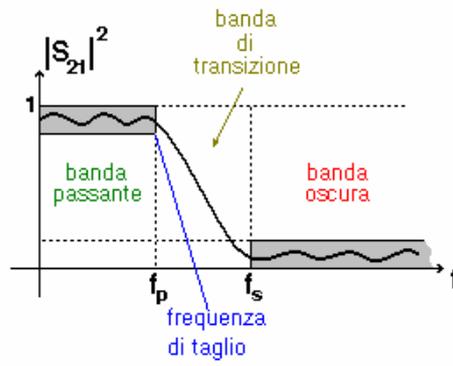
- *Passa-basso*

- *Passa-alto*

- *Passa-banda*

- *Elimina-banda*

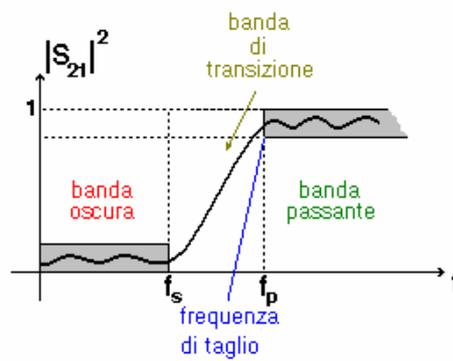
Filtri passa-basso (Low-pass)



Filtri passivi

3

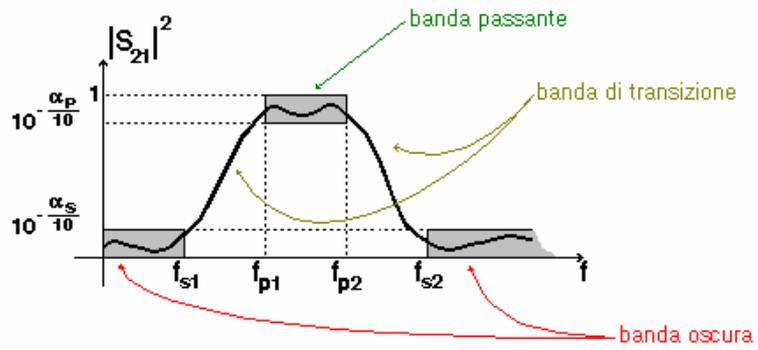
Filtri passa-alto (High-pass)



Filtri passivi

4

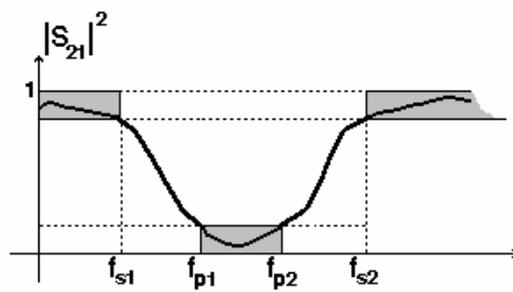
Filtri passa-banda (Band-pass)



Filtri passivi

5

Filtri elimina-banda



Filtri passivi

6

Filtri di Butterworth

Introduzione

Passa-basso normalizzati

Normalizzazione

Filtri passa-alto

Filtri passa-banda

Progetto di filtri

Introduzione

I filtri di Butterworth sono il più semplice esempio di filtri che si trovano, e sono caratterizzati da una [risposta in ampiezza monotona](#).

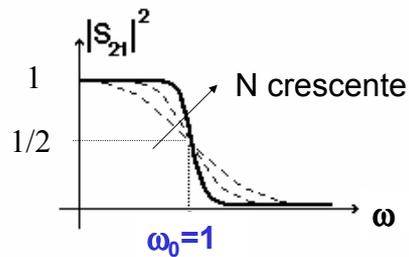
Per descrivere il progetto di questi filtri, si parte con il progetto del **filtro passa-basso normalizzato** di ordine N , per poi estendere il discorso anche agli altri tipi di filtri.

Per i filtri di Butterworth si parla di [approssimazione massimamente piatta](#) perchè essi approssimano il filtro ideale con una funzione monotona in altezza; l'approssimazione risulta essere sempre migliore all'aumentare dell'ordine N .

Filtri passa-basso normalizzati di ordine N

I filtri di Butterworth sono caratterizzati da una risposta in ampiezza così descritta:

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2N}}$$



Si parla così di **approssimazione massimamente piatta**.

Quindi,

$$\left. \frac{d^K |S_{21}(j\omega)|}{d\omega^K} \right|_{\omega=0} = 0 \quad \text{per } 1 \leq K \leq 2N-1$$

Dimostrazione

Notiamo che

$$|S_{21}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2N}}} = \frac{1}{(1 + \omega^{2N})^{1/2}} \quad x = \omega^{2N}$$

Ed **espandiamo con Taylor** quanto ottenuto; otteniamo:

$$|S_{21}(j\omega)| = 1 - \frac{\omega^{2N}}{2} + \frac{3}{8} \omega^{4N} + \dots$$

Si ricorda che l'espansione secondo Taylor di:

$$\frac{1}{(1+x)^N} = 1 - Nx + \frac{N(N+1)}{2!} x^2 - \dots$$

Da quanto ottenuto, se calcoliamo le derivate di $S_{21}(j\omega)$ in $\omega = 0$:

$$\left. \frac{d^K |S_{21}(j\omega)|}{d\omega^K} \right|_{\omega=0}$$

Le derivate ([facendo riferimento allo sviluppo in serie](#)) sono nulle fino all'ordine $2N$; solo allora questo termine diventerà una costante, che non si annullerà per $\omega = 0$.

C.V.D.

Ricordando la [sintesi di Darlington](#), possiamo sintetizzare un filtro di Butterworth ponendo:

$$A(\omega^2) = 1$$

$$B(\omega^2) = 1 + (\omega^2)^N \quad \text{quindi} \quad B(-s^2) = 1 + (-s^2)^N$$

$$C(-s^2) = (-s^2)^N$$

Quindi: **prolungando analiticamente $s_{21}(s)$ e $s_{11}(s)$**

$$S_{11}(s) S_{11}(-s) = \frac{(-s^2)^N}{1 + (-s^2)^N} \quad \text{essendo} \quad (s_{11}(s) = 1 - s_{21}(s)s_{21}(-s))$$

Le radici di $1 + (-s^2)^N$ varieranno a seconda che si abbia [N pari](#) o [N dispari](#); una volta trovate queste, posso estrarre tutte le radici con parte reale < 0 : ricostruisco in questo modo $E(s)$

N pari

$B(-s^2)^N = 1 + s^{2N}$: Le radici sono tutti punti equispaziati sulla circonferenza unitaria.

Quindi, le radici sono $S_n = e^{j\theta_n}$

Con semplici passaggi[@] si ottengono allora le radici :

$$\theta_n = \frac{\pi (2k+1)}{2N} \quad K = 0,1,2,\dots,2N-1$$

Poniamo ora per assurdo che esistano un N dispari ed un K tali che sia possibile ottenere una radice immaginaria, e mostriamo che ciò non è vero

$$\frac{\pi (2k+1)}{2N} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow N = (2k+1) \Rightarrow N \text{ dispari}$$

Assurdo

$$\begin{aligned} \textcircled{a} e^{jN\theta_n} &= e^{j(2K+1)\pi} \\ \Rightarrow 2N\theta_n &= \pi (2k+1) \end{aligned}$$

Filtri passivi

13

N dispari

$B(-s^2)^N = 1 - s^{2N}$

Ovvero, bisogna avere $s^{2N} = 1$

Con semplici passaggi[@] si ottengono le radici:

$$\theta_n = \frac{k\pi}{N} \quad K = 0,1,2,\dots,2N$$

Poniamo ora per assurdo che esistano un N dispari ed un K tali che sia possibile ottenere una radice immaginaria, e mostriamo che ciò non è vero

$$\frac{k\pi}{N} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow N = 2k \Rightarrow N \text{ pari}$$

Assurdo

$$\begin{aligned} \textcircled{a} e^{j2N\theta_n} &= e^{j2K\pi} \\ \Rightarrow 2N\theta_n &= 2k\pi \end{aligned}$$

Filtri passivi

14

Esempio di sintesi

Per esempio, sintetizziamo un filtro di Butterworth di **ordine N = 3**

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^6}$$

Quindi, $C(-s^2) = (-s^2)^3 = -s^6$ $B(-s^2) = 1 - s^6$

Le radici, saranno : $e^{\frac{jK\pi}{3}}$ $K = 0,1,2,3,4,5$ (poli)

Le radici con parte reale < 0, sono : $e^{\frac{jK\pi}{3}}$ $K = 2,3,4$

Ovvero :

$$s_1 = -1 \qquad s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

In seguito alle **radici trovate**, calcoliamo ora quanto vale $S_{11}(s)$

$$S_{11}(s) = \pm \frac{s^3}{(s+1) \left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$S_{11}(s) = \pm \frac{s^3}{(s+1) \left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]} = \pm \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Hp. ($R_0=1$)

$$Z_1 = \frac{1 \mp S_{11}}{1 \pm S_{11}} = \frac{1 \mp \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}}{1 \pm \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}} = \begin{cases} \frac{2s^2 + 2s + 1}{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \\ \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1} \end{cases}$$

Valori tabulati per filtri di Butterworth

Dal momento che:

$$S_{21} = \pm \frac{1}{E_N(s)}$$

Quello che ci serve sapere per il progetto di un filtro è $E_N(s)$ oppure i valori degli elementi circuitali.

Scrivendo $E_N(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_N s^N$

N	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅
1	1	1	0	0	0	0
2	1	$\sqrt{2}$	1	0	0	0
3	1	2	2	1	0	0
4	1	2.6131	3.4142	2.6131	1	0
5	1	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361	1

I filtri di Butterworth servono anche come base per i filtri digitali

Filtri passivi

19

Vediamo ora i valori delle capacità e delle induttanze, con $R_0 = 1$

N	C ₁ L ₁	L ₂ C ₂	C ₃ L ₃	L ₄ C ₄	L ₅ C ₅
1	2	0	0	0	0
2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	0
3	1	2	1	0	0
4	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654	0
5	0.618	1.618	2	1.618	0.618

Filtri passivi

20

Normalizzazione

La trattazione che si è vista fino a questo momento per i filtri è stata fatta assumendo $R_0 = 1$ ed $\omega_0 = 1$: si dice che questi filtri sono normalizzati, e come già detti ci si può riferire ai **valori tabulati** per questi una volta per tutte per il progetto di un qualunque filtro passa-basso (e non solo) di Butterworth; vediamo come:

Normalizzazione rispetto a R_0

$$Z_n(s) = \frac{Z(s)}{R_0} \Rightarrow Z(s) = Z_n(s) R_0$$

$$Y_n(s) = Y(s) R_0 \Rightarrow Y(s) = \frac{Y_n(s)}{R_0}$$

Le formule di trasformazione dei valori dei componenti da utilizzare, quindi, risultano essere:

$$R \Rightarrow R''_n = R / R_0$$

$$sL \Rightarrow sL / R_0 \Rightarrow L''_n = L / R_0$$

$$C \Rightarrow C''_n = C R_0$$

Se quindi il doppio bipolo che voglio funzioni da filtro di Butterworth è chiuso su una resistenza diversa da 1 ohm, applico le seguenti:

$$R = R_0 R''_n$$

$$L = R_0 L''_n$$

$$C = C''_n / R_0$$

Normalizzazione rispetto a ω_0

$$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$Z = sL \Rightarrow Z = j\omega L \Rightarrow Z = j\omega_n \omega_0 L \Rightarrow L'_n = \omega_0 L$$

$$Z = 1/sC \Rightarrow Z = 1/j\omega C \Rightarrow Z = 1/j\omega_n \omega_0 C \Rightarrow C'_n = \omega_0 C$$

Se quindi, come accade usualmente, si desidera una frequenza di taglio diversa da 1, devo applicare le:

$$L = L'_n / \omega_0$$

$$C = C'_n / \omega_0$$

Naturalmente, anche il polinomio descrittivo del filtro è dato dalle tabelle in forma normalizzata. Si può allora operare la trasformazione:

$$s_n = \frac{s}{\omega_0}$$



$$E_N(s) = a_0 + a_1 \frac{s}{\omega_0} + a_2 \frac{s^2}{\omega_0^2} + \dots + a_N \frac{s^N}{\omega_0^N}$$

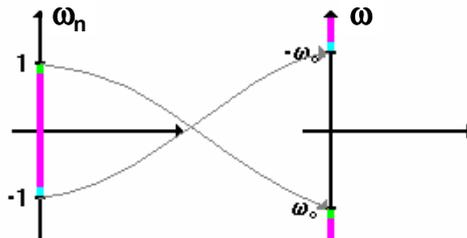
$$s_{21}(s) = \pm \frac{1}{E_N(s)}$$

Dal filtro passa-basso normalizzato, di cui si sono viste le tabelle, passiamo ora agli altri filtri, tramite delle trasformazioni in ω

Trasformazione da passa-alto a passa-basso normalizzato

$$s_n = \omega_0 / s \Rightarrow j\omega_n = \omega_0 / j\omega \Rightarrow \omega_n = -\omega_0 / \omega$$

Vediamo ora un'interpretazione grafica di ciò in termini di trasformazione del piano z



Filtri passivi

25

Vediamo ora come si trasformano di conseguenza gli elementi circuitali:

Induttori :

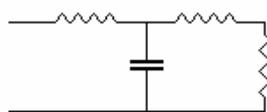
$$Z_n = s_n L_n = (\omega_0 / s) L_n \quad \text{L'induttanza diventa una capacità}$$

Condensatori :

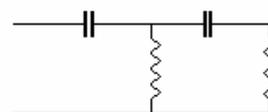
$$Z_n = 1 / s_n C_n = 1 / [(\omega_0 / s) C_n] \quad \text{La capacità diventa una induttanza}$$

N.B.

Notiamo che, coerentemente con quanto sappiamo, la sintesi di Cauer I diventa Cauer II.



Diventa



Filtri passivi

26

Per quanto riguarda il polinomio descrittivo, poi:

$$s_n = \frac{\omega_0}{s}$$



$$E_N(s) = a_0 + a_1 \frac{\omega_0}{s} + a_2 \frac{\omega_0^2}{s^2} + \dots + a_N \frac{\omega_0^N}{s^N}$$

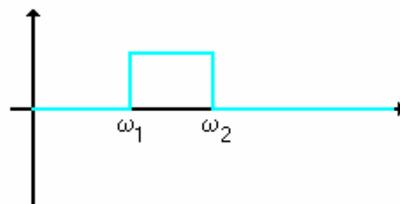
che quindi da polinomio diventa funzione razionale.

S₂₁ diventa

$$S_{21} = \frac{s^n}{a_0 s^n + a_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots}$$

N.B. I filtri passa-basso avevano zeri di trasmissione all'infinito.
Ora gli zeri sono nell'origine.

Trasformazione da passa-banda a passa-basso normalizzato



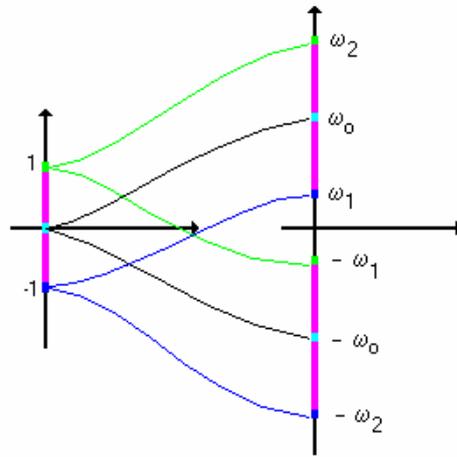
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

$$s_n = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) = \frac{\omega_0}{B} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)$$

$$\omega_n = \frac{\omega_0}{B} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Vediamo ora un'interpretazione grafica di ciò in termini di trasformazione del piano z:



Filtri passivi

29

Vediamo ora come si trasformano i componenti circuitali.

Induttori :

$$s_n L_n \rightarrow \frac{\omega_0}{B} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) L_n = \frac{s L_n}{B} + \frac{1}{s} \frac{B}{\omega_0^2 L_n}$$



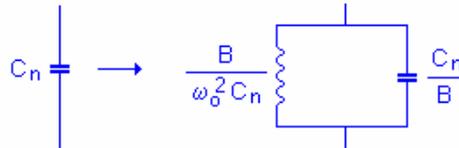
Condensatori :

$$Y_n = s_n C_n \rightarrow \frac{\omega_0}{B} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) C_n = \frac{s C_n}{B} + \frac{1}{s} \frac{B}{\omega_0^2 C_n}$$

Filtri passivi

30

In termini circuitali :



La funzione di trasferimento del passa-basso normalizzato, era:

$$H_N(s_n) = 1 / P_N(s_n)$$

mentre per il filtro passa-banda diventa:

$$E_N(s) = a_0 + \frac{a_1}{B} \left(s + \frac{\omega_0^2}{s} \right) + \frac{a_2}{B^2} \left(s + \frac{\omega_0^2}{s} \right)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{a_N}{B^N} \left(s + \frac{\omega_0^2}{s} \right)^N$$

$$H_N(s) = \frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{B} \left(s + \frac{\omega_0^2}{s} \right) + \frac{a_2}{B^2} \left(s + \frac{\omega_0^2}{s} \right)^2 + \dots}$$

Per quanto riguarda il circuito:



Trasformazione da elimina-banda a passa-basso normalizzato

$$s_n = \frac{B}{\omega_0 \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)}$$

Vediamo ora come si trasformano i componenti circuitali.

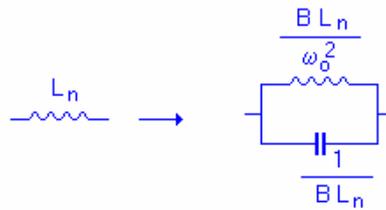
Induttori :

$$s_n L_n \rightarrow \frac{B L_n}{s + \frac{\omega_0^2}{s}} = Z \rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{s}{B L_n} + \frac{\omega_0^2}{s B L_n}$$

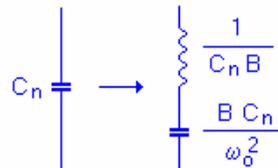
Filtri passivi

33

Vediamo circuitalmente:



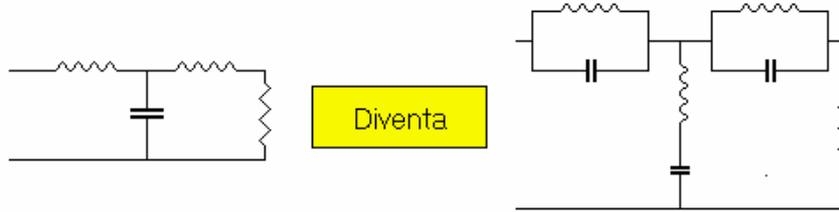
Condensatori :



Filtri passivi

34

Per quanto riguarda il circuito:



Filtri passivi

35

Progetto di un filtro di Butterworth

In fase di progetto vengono fornite come specifiche

- L' **ATTENUAZIONE**
- I **LIMITI ESTREMI** della banda passante e di quella oscura.

A partire dalle specifiche occorre determinare

- il grado del filtro **N** (il numero dei componenti)
- la frequenza di taglio **f_0**

presenti nelle formule di trasformazione.

Filtri passivi

36

Indicando con:

N ordine del filtro
 ω_0 pulsazione di taglio
 $B = \omega_2 - \omega_1$ banda di transizione

L'attenuazione è definita come:

$$\alpha = -20 \text{Log}_{10}(|S_{21}(f)|) = -20 \text{Log}_{10}(|S_{21}(\omega)|) \quad \text{con } \omega = 2\pi f$$

E' inoltre *noto* che:

$$|S_{21}| \leq 1 \Rightarrow \text{Log}_{10}(|S_{21}|) \leq 0$$

e quindi, in particolare:

$$\alpha > 0$$

Filtri passivi

37

se $|S_{21}| \cong 1 \Rightarrow \alpha \cong 0$

piccola attenuazione

se $|S_{21}| \cong 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow \infty$

grande attenuazione

Nei **filtri di Butterworth** si ha che:

$$|S_{21}|^2 = \frac{1}{1 + \omega_n^{2N}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^{2N}} \quad \text{essendo } \omega_n = \left(\frac{f}{f_0}\right) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

e quindi è possibile esprimere α nella forma:

$$\alpha = -10 \text{Log}_{10}(|S_{21}|^2) = 10 \text{Log}_{10} \left[1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^{2N} \right] \quad f = f_0 \Rightarrow \alpha = 3 \text{ dB}$$

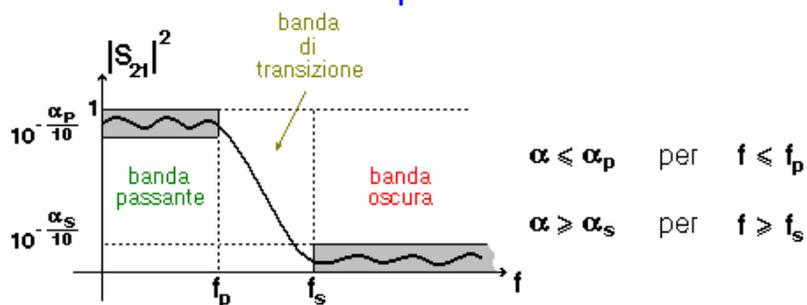
rispetto al massimo

Passiamo ora ad esaminare in dettaglio i filtri *passa basso*, *passa alto* e *passa banda*.

Filtri passivi

38

Filtri passa-basso



Se $|S_{21}|^2$ passa per le zone ombreggiate allora le specifiche sono state rispettate

I valori riportati in ordinate si ricavano dall'espressione di α

$$\alpha \leq \alpha_p \Rightarrow -20 \log |s_{21}(j\omega)| \leq \alpha_p$$

$$|s_{21}(j\omega)|^2 \geq 10^{-\alpha_p/10}$$

$$\alpha \geq \alpha_s \Rightarrow -20 \log |s_{21}(j\omega)| \geq \alpha_s$$

$$|s_{21}(j\omega)|^2 \leq 10^{-\alpha_s/10}$$

Si definisce inoltre la **selettività** del filtro

$$k = \frac{f_p}{f_s} < 1$$

Quanto più k è prossimo ad 1 tanto più la banda di transizione è stretta, ovvero il filtro è 'selettivo'.

Infine si definisce la discriminazione:

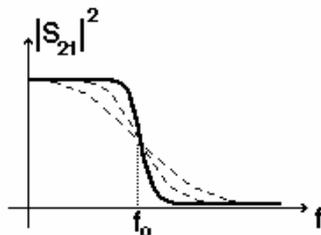
$$K_1 = \sqrt{\frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}} \ll 1$$

Notare che, dato l'ordine di grandezza dei numeri in gioco, nei calcoli si possono fare le seguenti approssimazioni:

$$\sqrt{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1} \cong \sqrt{0.23\alpha_p}$$

$$\sqrt{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1} \cong 10^{\frac{\alpha_s}{20}}$$

Nei filtri di Butterworth la caratteristica è monotona, cioè del tipo:



e quindi, se la $|S_{21}|^2$ passa per i punti

$$\left(f_s, 10^{-\frac{\alpha_s}{10}}\right) \text{ e } \left(f_p, 10^{-\frac{\alpha_p}{10}}\right)$$

le specifiche sono sicuramente rispettate.

Allora per il progetto pratico si parte dalle seguenti condizioni:

$$\alpha = \alpha_p \quad \text{per} \quad f = f_p$$

$$\alpha = \alpha_s \quad \text{per} \quad f = f_s$$

allora:

$$\begin{cases} \alpha_p = 10 \text{Log} \left[1 + \left(\frac{f_p}{f_0} \right)^{2N} \right] \\ \alpha_s = 10 \text{Log} \left[1 + \left(\frac{f_s}{f_0} \right)^{2N} \right] \end{cases}$$

da cui, dividendo per 10 ed elevando alla 10 si ottiene:

$$\begin{cases} \left(\frac{f_p}{f_0} \right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1 \\ \left(\frac{f_s}{f_0} \right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1 \end{cases}$$

e dividendo membro a membro ed estraendo la radice quadrata:

$$\left(\frac{f_p}{f_s} \right)^N = \sqrt{\frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}} \quad \text{In cui e' tutto noto tranne N}$$

il che equivale, con le [definizioni date](#), a:

$$K^N = K_1$$

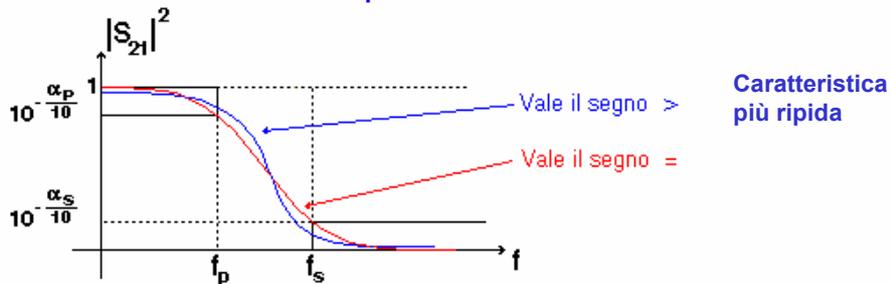
da cui ricavo l'ordine del filtro **N** :

$$N \geq \frac{\text{Log} [K_1]}{\text{Log} [K]}$$

poichè N dev'essere intero

In generale vale il **>**, si dice allora che il filtro è **sovraspecificato**.

Sovraspecificazione di un filtro



Solitamente, dovendo sovraspecificare, si impone:

$$\alpha = \alpha_p \quad \text{per} \quad f = f_p$$

Di conseguenza la sovraspecifica rimane in banda oscura, che è poi ciò che interessa.

La f_o che verifica questa condizione è:

$$\left(\frac{f_p}{f_o}\right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1 \quad \Rightarrow \quad f_o = \frac{f_p}{\sqrt[2N]{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}}$$

Analogamente si può sovraspecificare in banda passante, in tal caso la f_o vale:

$$f_o = \frac{f_s}{\sqrt[2N]{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}}$$

Si noti che tutte le f comprese tra f_o ed f'_o vanno bene, tuttavia **solitamente si sovraspecifica in una banda sola.**

Esempio

Progettare un filtro passa-basso che realizzi le seguenti specifiche:

$$\alpha_p = 1 \text{ dB} \quad f_p = 1 \text{ KHz}$$

$$a_s = 50 \text{ dB} \quad f_s = 10 \text{ KHz}$$

sovraspecificare in banda passante

$$k = \frac{f_p}{f_s} = 10^{-1}$$

$$K_1 \cong \frac{\sqrt{0.23}}{10^{\frac{5}{2}}} \cong 1.52 \cdot 10^{-3}$$

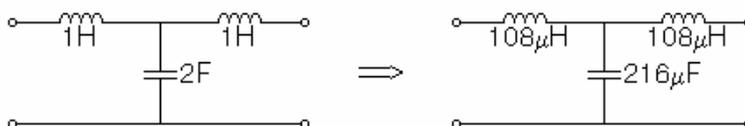
$$N \geq \frac{\text{Log } K_1}{\text{Log } k} \cong 2.82 \quad \Rightarrow \quad N=3$$

$$f_o = \frac{10 \text{ KHz}}{\sqrt[3]{10^5 - 1}} \cong 1.468 \text{ KHz} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega_o} \cong 1.08 \cdot 10^{-4}$$

Filtri passivi

47

Allora, dal filtro normalizzato di ordine 3, si passa al circuito effettivo:



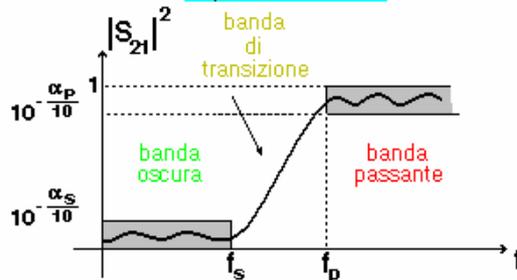
$$\begin{array}{l} C_n \\ L_n \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} C = \frac{C_n}{\omega_o} = \frac{C_n}{2\pi f_o} = 216 \mu F \\ L = \frac{L_n}{\omega_o} = \frac{L_n}{2\pi f_o} = 108 \mu H \end{array}$$

Filtri passivi

48

Filtri passa-alto

Il discorso è duale *al passa basso* :



Specifiche

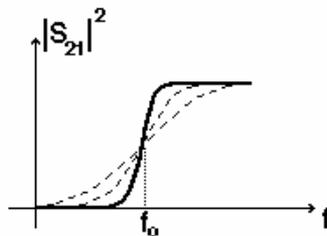
$$\alpha \leq \alpha_p \quad \text{per} \quad f \geq f_p$$

$$\alpha \geq \alpha_s \quad \text{per} \quad f \leq f_s$$

si definiscono selettività k e discriminazione K_1 come:

$$k = \frac{f_s}{f_p} < 1 \quad K_1 = \sqrt{\frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}} \ll 1$$

La caratteristica $|S_{21}|^2$ (monotona crescente) è:



$$|S_{21}|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f_0}{f}\right)^{2N}}$$

e l'attenuazione α è :

$$\alpha = 10 \text{Log}_{10} \left[1 + \left(\frac{f_0}{f}\right)^{2N} \right]$$

Allora, sempre in analogia col caso del passa-basso, si impongono le specifiche e si ricavano l'ordine del filtro e la frequenza f_0 :

$$\alpha = \alpha_p \quad \text{per} \quad f = f_p$$

$$\alpha = \alpha_s \quad \text{per} \quad f = f_s$$

$$\begin{cases} \alpha_p = 10 \text{Log} \left[1 + \left(\frac{f_o}{f_p} \right)^{2N} \right] \\ \alpha_s = 10 \text{Log} \left[1 + \left(\frac{f_o}{f_s} \right)^{2N} \right] \end{cases}$$

dividendo per 10 ed elevando alla 10:

$$\begin{cases} \left(\frac{f_o}{f_p} \right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1 \\ \left(\frac{f_o}{f_s} \right)^{2N} = 10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1 \end{cases}$$

il che, dividendo membro a membro ed estraendo la radice quadrata dà:

$$\left(\frac{f_p}{f_s} \right)^N = \sqrt{\frac{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}}$$

il che, dalle prime [formule viste](#), si può esprimere con:

$$K^N = K_1 \quad \text{e quindi} \quad N \geq \frac{\text{Log} [K_1]}{\text{Log} [K]}$$

sempre con **N** intero.

Per la f_o si può sovraspecificare in banda passante e/o in banda oscura ottenendo rispettivamente:

$$f_o = f_s \sqrt[2N]{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}$$

$$f_o' = f_p \sqrt[2N]{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}$$

ed ancora ogni **f** compresa fra **f_o** ed **f'_o** va bene.

In alternativa si trasformano le specifiche dal passa-alto al passa-basso, ponendo

$$f' = \frac{1}{f} \text{ e } \omega' = \frac{1}{\omega}$$

Le specifiche del passa-basso sono

$$\alpha \leq \alpha_p \text{ per } \frac{1}{f'} \geq f_p \rightarrow f' \leq \frac{1}{f_p} = f'_p$$

$$\alpha \geq \alpha_s \text{ per } \frac{1}{f'} \leq f_s \rightarrow f' \geq \frac{1}{f_s} = f'_s$$

Si calcolano N e f_0 per il passa-basso imponendo

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_p & \text{per } f' = f'_p \\ \alpha = \alpha_s & \text{per } f' = f'_s \end{cases}$$

Si realizza la rete e si effettuano le trasformazioni per tornare al passa-alto

$$s_n = \frac{\omega_0}{s} = \frac{2\pi f_0}{s} = \frac{2\pi}{f'_0 s}$$

$$L_n \rightarrow C = \frac{1}{2\pi f_0 L_n} = \frac{1}{\omega_0 L_n}$$

$$C_n \rightarrow L = \frac{1}{2\pi f_0 C_n} = \frac{1}{\omega_0 C_n}$$

Filtri passivi

53

Esempio

Progettare un filtro passa-alto che soddisfi le seguenti specifiche

$$\begin{cases} \alpha \leq 1dB & \text{per } f \geq 10\text{kHz} \\ \alpha \geq 50dB & \text{per } f \leq 1\text{kHz} \end{cases}$$

Le specifiche del passa-basso corrispondente

$$\begin{cases} \alpha \leq 1dB & \text{per } f \leq 10^{-4}\text{Hz} \\ \alpha \geq 50dB & \text{per } f \geq 10^{-3}\text{Hz} \end{cases}$$

$$k = \frac{f'_p}{f'_s} = \frac{f_s}{f_p} = \frac{10^{-4}}{10^{-3}} = 0.1$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_s/10} - 1}} \cong \frac{\sqrt{0.23}}{10^{5/2}} = 1.52 \cdot 10^{-3}$$

$$N \geq \frac{\log K_1}{\log k} = \frac{\log(1.52 \cdot 10^{-3})}{1} = 2.82 \Rightarrow N = 3$$

Filtri passivi

54

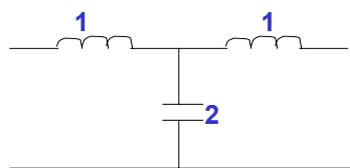
Sovraspecificando in banda passante, si impone

$$\alpha = \alpha_s \text{ per } f = f'_s$$

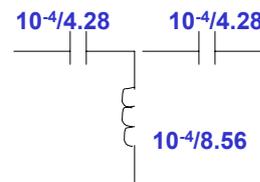
da cui

$$50 = 10 \log \left[1 + \left(\frac{f'_s}{f_0} \right)^6 \right] \rightarrow f'_0 = 1.468 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$$

$$f_0 = \frac{1}{f'_0} = 6.813 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}; \quad \omega_0 = 4.28 \cdot 10^{-4}$$



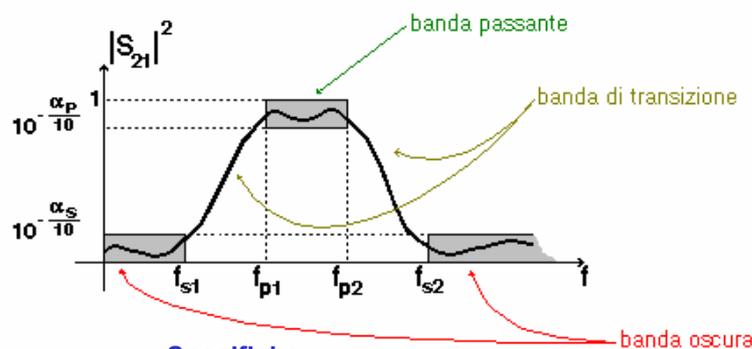
Passa-basso normalizzato



Passa-alto

Filtri passa-banda

Il discorso per il filtro passa-banda è più complicato, come si intuisce già dalla caratteristica che **non è più monotona**:



Specifiche

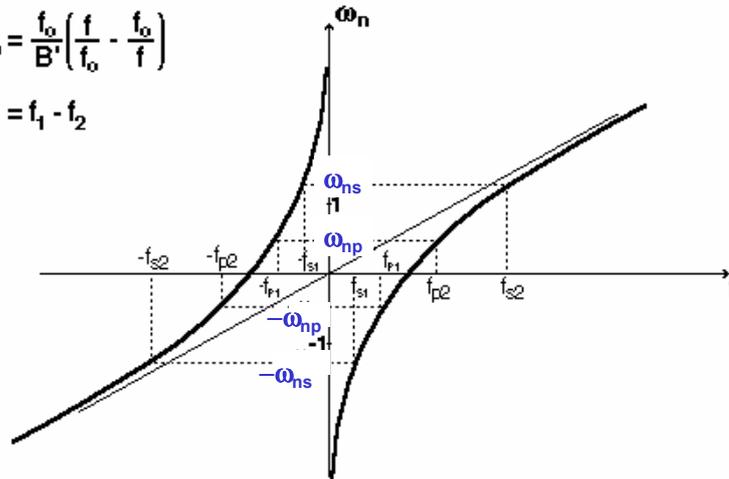
$$\alpha \leq \alpha_p \text{ per } f_{p1} \leq f \leq f_{p2}$$

$$\alpha \geq \alpha_s \text{ per } f \leq f_{s1} ; f \geq f_{s2}$$

Il passaggio dal passa-basso normalizzato al passa-banda avviene mediante le formule:

$$\omega_n = \frac{f_0}{B'} \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)$$

$$B' = f_1 - f_2$$



Filtri passivi

57

dove le ω_n , f_s , f_p sono legate dal vincolo:

$$f_{s1} f_{s2} = f_{p1} f_{p2} = f_0^2$$

infatti, dalla [formula precedente](#), si ha che:

$$\omega_{ns} = \frac{1}{B'} \left(f_{s2} - \frac{f_0^2}{f_{s2}} \right)$$

$$\omega_{ns} = \frac{1}{B'} \left(-f_{s1} + \frac{f_0^2}{f_{s1}} \right)$$

ed eguagliando le due espressioni:

$$f_{s2} - \frac{f_0^2}{f_{s2}} = -f_{s1} + \frac{f_0^2}{f_{s1}} \implies f_{s1} f_{s2} = f_0^2$$

Il calcolo è del tutto analogo per le f_p .

Filtri passivi

58

Poichè dev'essere rispettato il **vincolo** appena visto, se le specifiche date non lo soddisfano, si può, anche in questo caso, **sovraspecificare**, agendo in 4 diversi modi:

Aumentare f'_{s1}

Diminuire f'_{p1}

Diminuire f'_{s2}

Aumentare f'_{p2}

dove le f' sono le specifiche date. In particolare:

Se $f'_{p1}f'_{p2} > f'_{s1}f'_{s2}$

$$f'_{p1} = \frac{f'_{s1}f'_{s2}}{f'_{p2}} \quad \text{Sovraspecifico in } \mathbf{banda\ passante}$$

$$f'_{s1} = \frac{f'_{p1}f'_{p2}}{f'_{s2}} \quad \text{Sovraspecifico in } \mathbf{banda\ oscura}$$

Se $f'_{p1}f'_{p2} < f'_{s1}f'_{s2}$

$$f'_{p2} = \frac{f'_{s1}f'_{s2}}{f'_{p1}} \quad \text{Sovraspecifico in } \mathbf{banda\ passante}$$

$$f'_{s2} = \frac{f'_{p1}f'_{p2}}{f'_{s1}} \quad \text{Sovraspecifico in } \mathbf{banda\ oscura}$$

Per quanto riguarda la sintesi, l'espressione della **discriminazione** resta invariata:

$$K_1 = \sqrt{\frac{10^{\alpha_p/10} - 1}{10^{\alpha_s/10} - 1}}$$

mentre la **selettività**, che nel passa-basso normalizzato era

$$k = \frac{\omega_{np}}{\omega_{ns}}$$

con la trasformazione

$$\omega_n = \frac{f_o}{B'} \left(\frac{f}{f_o} - \frac{f_o}{f} \right)$$

diventa:

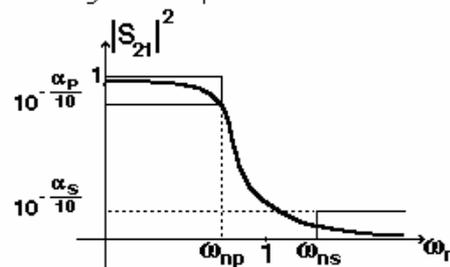
$$k = \frac{\omega_{np}}{\omega_{ns}} = \frac{\frac{f_o}{B'} \left(\frac{f}{f_o} - \frac{f_o}{f} \right)}{\frac{f_o}{B'} \left(\frac{f}{f_o} - \frac{f_o}{f} \right)} = \frac{f_{p2} - f_{p1}}{f_{s2} - f_{s1}}$$

Note quindi k e K_1 si calcola l'ordine N (intero) del filtro:

$$N \geq \frac{\text{Log}[K_1]}{\text{Log}[K]}$$

Calcolo di B'

Per il calcolo di B' si ragiona sul passa-basso normalizzato.



Sovraspecificando in banda oscura come mostrato si ha:

$$\alpha = \alpha_p \quad \text{per} \quad \omega = \omega_{np}$$

$$\alpha_p = 10 \text{Log} \left(1 + \omega_{np}^{2N} \right)$$

da cui:

$$\omega_{np} = \sqrt[2N]{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}$$

Sovraspecificando invece in banda passante si ha:

$$\omega_{ns} = \sqrt[2N]{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}$$

A questo punto dalla formula della [trasformazione](#) si ricava B' :

$$B' = \frac{f_{p2} - f_{p1}}{\sqrt[2N]{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}} \quad \text{oppure} \quad B' = \frac{f_{s2} - f_{s1}}{\sqrt[2N]{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}}$$

a seconda che si parta da ω_{np} oppure da ω_{ns} .

Naturalmente se si vogliono usare le pulsazioni al posto delle frequenze valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \omega_o &= 2\pi f_o \\ B &= 2\pi B' \end{aligned}$$

Esempio

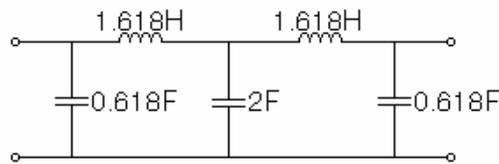
Specifiche:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 0.2 \text{ dB} && \text{per } 4.82 \text{ MHz} \leq f \leq 5.18 \text{ MHz} \\ \alpha &\geq 36 \text{ dB} && \text{per } f \leq 4.34 \text{ MHz} \quad f \geq 5.66 \text{ MHz} \end{aligned}$$

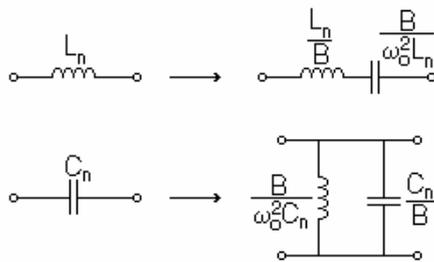
Applicando semplicemente le formule viste e sovraspecificando in banda passante si arriva a:

$$\begin{aligned} f_{p1} &= 4.742 \text{ MHz} \\ f_o &= 4.95 \text{ MHz} \\ K_1 &= 3.4 \cdot 10^{-3} \\ k &= 0.332 \\ N &= 5 \\ B &= 3.6210^6 \end{aligned}$$

Dalle [apposite tabelle](#) si ricava il circuito del passa-basso normalizzato di ordine 5 che è:



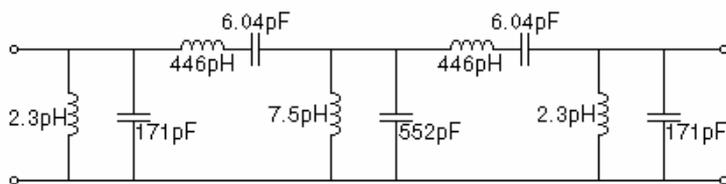
e poichè dalla trasformazione già vista i componenti diventano:



Filtri passivi

65

e quindi il circuito finale del nostro passa-banda è:



Notare che per ordini superiori a 10 la realizzabilità è solo teorica: in pratica diventa problematica.

Per quanto riguarda i filtri elimina-banda l'approccio è lo stesso che per i passa-banda.

Filtri passivi

66

Progetto filtri di Chebyshev

Polinomi di Chebyshev

Funzione di Trasferimento

Sintesi

Progetto

Filtri Passa Basso

Filtri Passa Alto

Filtri Passa Banda

Filtri di Chebyshev Inversi

Filtri passivi

67

Polinomi di Chebyshev

Le funzioni di Chebyshev sono definite come:

$$T_N(x) = \cos[N \cdot \arccos(x)]$$

ove N è l'ordine.

Si vede chiaramente come sono fatte le prime due funzioni:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

Cerchiamo una formula ricorsiva per determinare le funzioni di ordine superiore:

$$\begin{cases} T_{N+1}(x) = \cos[(N+1)\arccos(x)] = \cos(N\Phi + \Phi) = \\ T_{N-1}(x) = \cos[(N-1)\arccos(x)] = \cos(N\Phi - \Phi) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \cos(N\Phi)\cos(\Phi) - \sin(N\Phi)\sin(\Phi) = x \cdot T_N(x) - \sin(N\Phi)\sin(\Phi) \\ = \cos(N\Phi)\cos(\Phi) + \sin(N\Phi)\sin(\Phi) = x \cdot T_N(x) + \sin(N\Phi)\sin(\Phi) \end{cases}$$

Filtri passivi

68

dove F è definito come:

$$\Phi = \arccos(x)$$

Sommando membro a membro si ottiene la formula ricorsiva:

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x)$$

Allora, poichè T_0 e T_1 sono polinomi, tutte le T_N sono polinomi:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Si noti che il polinomio di Chebyshev di ordine N è pari(dispari) se N è pari(dispari).

Filtri passivi

69

inoltre

$$T_N(1) = 1 \quad \forall N$$

$$T_N(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } N \text{ è pari e } \frac{N}{2} \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } N \text{ è pari e } \frac{N}{2} \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$T_N(x) = \cos[N \cdot \arccos(x)]$$

Nota:

Le funzioni di Chebyshev, *come sono state definite*, valgono solo per $|x| \leq 1$. Estendendo a tutto il piano complesso si ha:

$$T_N(x) = \cosh[N \cdot \operatorname{arccosh}(x)]$$

essendo $\cos(jx) = \cosh(x) \geq 1$

Per $|x| > 1$, $\arccos(x) \in \mathbb{C}$, da cui

Filtri passivi

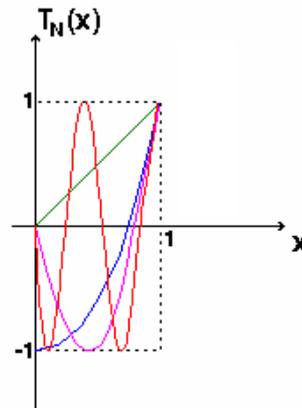
70

$T_N(x) = \cos[N \arccos(x)] = \cos(a + jb) = \cosh(p) \in \mathfrak{R}$, con $a, b, p \in \mathfrak{R}$

Quest'ultima è definita fuori dal cerchio unitario.

Si dimostra che la formula ricorsiva non cambia e che i polinomi rimangono gli stessi, quindi i $T_N(x)$ valgono per ogni x .

Vediamo ora l'andamento grafico dei polinomi:

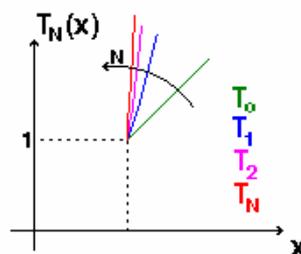


Filtri passivi

71

Si noti che per $|x| \leq 1$ i polinomi hanno andamento oscillatorio che aumenta con l'ordine N e sono limitati tra -1 ed 1 .

Per $|x| > 1$ invece vale la seconda formula vista ed il comportamento è del tipo:



Per $|x| > 1$ la funzione è monotona, crescente per $x > 1$, crescente (decescente) per $x < -1$ se N è pari (dispari).

L'andamento è di tipo polinomiale.

Filtri passivi

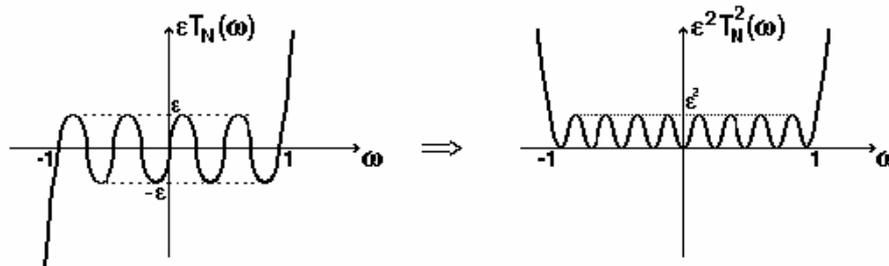
72

Funzione di trasferimento

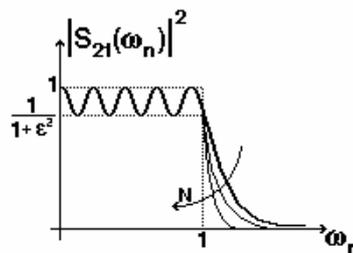
La **funzione di trasferimento** del filtro di Chebyshev di ordine **N** è:

$$|S_{21}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\omega)}$$

che graficamente si presenta come:



e quindi la funzione di trasferimento del filtro è:



Nei filtri di Chebyshev l'attenuazione in banda passante dipende da ϵ mentre all'aumentare di **N** migliora il comportamento in banda oscura ed aumenta il numero di oscillazioni in banda passante.

I filtri di Chebyshev, a parità di ordine, sono più efficienti dei **filtri di Butterworth**, ma in certe applicazioni il **comportamento oscillante in banda passante** non è accettabile.

Sintesi dei filtri di Chebyshev

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(j\omega)}$$

Si definisce:

$$R_N(\omega^2) \triangleq T_N^2(j\omega)$$

da cui:

$$|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_N(\omega^2)}$$

A questo punto, passando da ω^2 a $-s^2$ si fa la **sintesi di Darlington**:

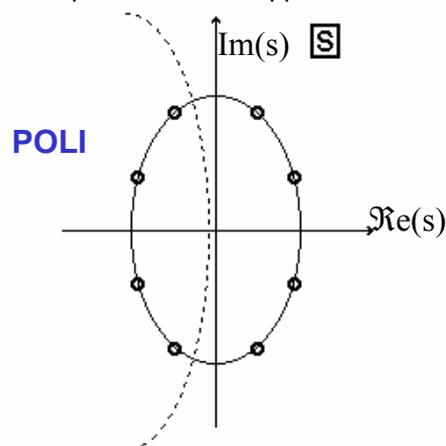
$$S_{21}(s)S_{21}(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_N(-s^2)}$$

Filtri passivi

75

I filtri di Butterworth hanno radici in **simmetria quadrante** disposte sul cerchio unitario.

I filtri di Chebyshev hanno radici in **simmetria quadrante disposte su un'ellisse** il cui numero dipende da N. Il rapporto tra i 2 assi dipende da ϵ .



Filtri passivi

76

Se $\epsilon < 1$, come del resto deve essere, l'asse principale dell'ellisse coincide con l'asse immaginario.

Procediamo ora con la sintesi di Darlington:

$$S_{21}(s) = \frac{1}{P_{N,\epsilon}(s)}$$

$P_{N,\epsilon}$ è un polinomio con le radici nel semipiano sinistro

Dal teorema di Feoldtkeller si ha che:

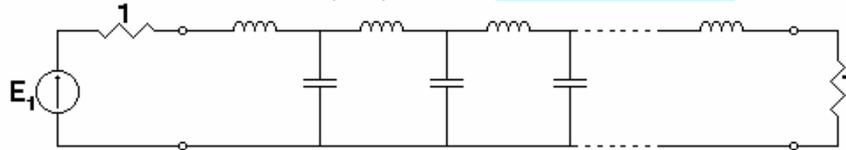
$$S_{11}(s)S_{11}(-s) = \frac{-\epsilon^2 R_N(-s^2)}{1 + \epsilon^2 R_N(-s^2)}$$

⇓

$$S_{11}(s) = \frac{\pm \epsilon R_N(-s)}{P_{N,\epsilon}(s)}$$

da cui calcolo la Z_1 .

La rete a scala risultante è tipo quella dei filtri di Butterworth :



Notare che se i resistori terminali sono uguali i filtri di ordine pari non sono realizzabili poichè hanno $S_{21}(0)$ diverso da 1. [Per N pari, $s_{21}(0) = 1/(1+\epsilon^2)$]

Ci limitiamo a trattare quelli di ordine dispari, per i quali esistono tabelle di valori tabulati:

N	C_1 L_1	C_2 L_2	C_3 L_3	C_4 L_4
1	1.0177	—	—	—
3	2.0236	0.9941	2.0236	—
5	2.1349	1.0911	3.0009	1.0911
7	2.1666	1.1115	3.0936	1.1735

Valori per $\alpha_p = 1 \text{ dB}$

.....

.....

N	C ₁ L ₁	C ₂ L ₂	C ₃ L ₃	C ₄ L ₄		
1	0.3052	—	—	—	Valori per $\alpha_p=0.1\text{dB}$	
3	1.0316	1.1474	—		
5	1.1468	1.3712	1.9750
7	1.1812	1.4228	2.0967	1.5739	

Come per i **filtri di Butterworth** esistono anche le tabelle con i coefficienti dei polinomi .

Progetto dei filtri di Chebyshev

Analogamente a quanto fatto per i **filtri di Butterworth**, ricorderemo prima alcune definizioni di carattere generale, per poi vedere in dettaglio come adattare il filtro passa basso normalizzato per progettare filtri **passa-basso**, **passa-alto** e **passa-banda**

Infatti, prima di affrontare il progetto di un filtro, dobbiamo sapere che è:

- N** ordine del filtro
- ω_0** pulsazione di taglio
- $B=\omega_2-\omega_1$** banda di transizione

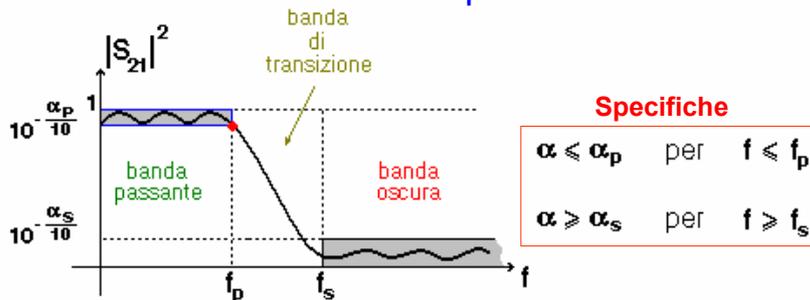
L'**attenuazione** è definita come:

$$\alpha = -20\text{Log}_{10}(|S_{21}(f)|) = -20\text{Log}_{10}(|S_{21}(\omega)|) \quad \text{con } \omega=2\pi f$$

Ricordando poi il valore di $|S_{21}(\omega)|^2$ avremo che:

$$\alpha = 10\text{Log}_{10}[1+\epsilon^2 T_n^2(\omega)]$$

Filtri passa-basso



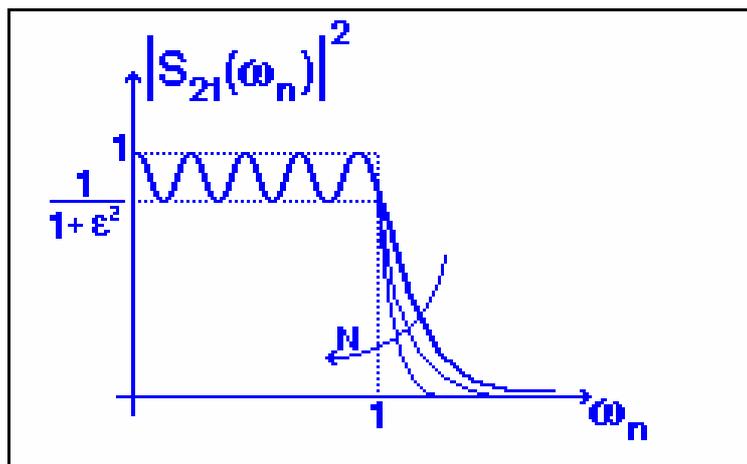
Per capire la trattazione del passa-basso non normalizzato è necessario rifarsi all' andamento di $|S_{21}(\omega)|^2$ del passa-basso normalizzato, e osservare come:

- 1 Il valore minimo raggiunto da $|S_{21}(\omega)|^2$ in banda passante dipende esclusivamente da ϵ (ovvero da α_p come vedremo).
- 2 Se $w_n=1$ allora $|S_{21}(\omega)|^2$ raggiunge sicuramente detto valore minimo.

independente dal valore di N , in quanto, come visto nell' introduzione , per $w_n=1$ i polinomi di Chebyshev di qualsiasi ordine valgono 1, e quindi $|S_{21}(\omega)|^2$ assume il valore specificato

81

Passa-basso normalizzato



Si nota che in tutta la banda passante $|s_{21}(\omega)|^2 \geq |s_{21}(1)|^2$

Filtri passivi

82

Quindi se la specifica sull' attenuazione in banda passante viene rispettata per $\omega_n=1$, allora viene sicuramente rispettata lungo tutta la banda passante, in quanto, per $\omega_n=1$, si ha, come visto, il caso peggiore. Abbiamo dunque che il valore minimo di $|S_{21}(\omega)|^2$ in banda passante viene assunto alla pulsazione limite della banda passante

Il problema consiste quindi nel far si che, nella trasformazione da passa-basso normalizzato a passa-basso non normalizzato, a $f=f_p$ corrisponda $\omega_n=1$. Tenendo conto che si ha

$$\omega_n = \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{f}{f_o}$$

allora $\omega_n=1$ in $f=f_p$ se e solo se noi scegliamo $f_o=f_p$. Con questa scelta si ha nel punto (f_p, α_p)

$$10^{-\frac{\alpha_p}{10}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

Dim.

$$\alpha_p = \alpha(\omega_p^o = 1) = 10 \log(1 + \varepsilon^2 T_n^2(1)) = 10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$-\frac{\alpha_p}{10} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

Filtri passivi

83

Risolvendo questa equazione per ε abbiamo che:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}$$

Prima di continuare il discorso definiamo la selettività del filtro:

$$k = \frac{f_p}{f_s} < 1$$

Questo parametro è importante non solo perchè tanto più k è prossimo ad 1 tanto più la banda di transizione è stretta, ma anche perchè

$$\alpha_s = 10 \log \left[1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{f_s}{f_o} \right) \right] = 10 \log \left[1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{1}{k} \right) \right]$$

Ora facciamo l' antilogaritmo di entrambi i membri e sostituiamo a T_n il suo valore e otteniamo:

$$10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1 = \varepsilon^2 \cosh^2 \left[N \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{k} \right) \right]$$

Filtri passivi

84

Dividiamo ora per ε^2 ed estraiamo la radice di entrambi i membri:

$$\frac{\sqrt{\frac{\alpha_s}{10^{10}} - 1}}{\varepsilon} = \cosh \left[N \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{k} \right) \right]$$

Definiamo ora la **discriminazione k_1** .

$$K_1 = \sqrt{\frac{\frac{\alpha_p}{10^{10}} - 1}{\frac{\alpha_s}{10^{10}} - 1}}$$

Utilizzando questa ultima definizione otteniamo:

$$N \geq \frac{\operatorname{arccosh} \frac{1}{k_1}}{\operatorname{arccosh} \frac{1}{k}}$$

Se N non è intero il filtro è sovraspecificato. Dobbiamo notare che i **filtri di Chebyshev sono sovraspecificati solo in banda oscura**

Questo fatto appare chiaro se noi ricordiamo che, *nell'introduzione*, abbiamo fatto in modo che **il valore limite dell'attenuazione in banda passante α_p venisse assunto** alla frequenza limite della banda passante f_p

Ma fare questo significa sovraspecificare in banda oscura

Una volta **stabilito l'ordine del filtro** dobbiamo denormalizzare i valori dei componenti. Con considerazioni analoghe a quelle fatte *a proposito dei filtri di Butterworth* otteniamo che:

$$L = R_0 \frac{L_n}{\omega_0}$$

$$C = \frac{C_n}{\omega_0 R_0}$$

Esempio

Progettare un filtro passa basso tale che:

$$\alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\alpha_s = 40 \text{ dB}$$

$$\omega_p = 1.2$$

$$\omega_s = 5$$

Stiamo realizzando un passa basso, quindi deve essere $\omega_0 = \omega_p = 1.2$

Si ricavano immediatamente i valori dei parametri e dei componenti, relativi però al filtro filtro normalizzato

$$\epsilon \cong 5088$$

$$k_1 \cong 0.005088$$

$$k \cong .24$$

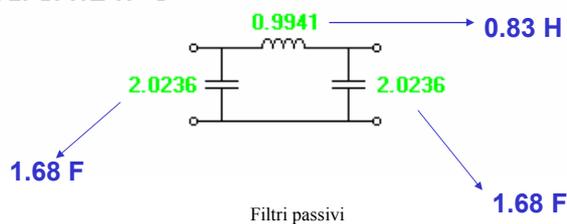
$$N \cong 2.08 \text{ da cui si ha } N=3$$

Tali valori si ricavano dalle tabelle e vanno poi denormalizzati tramite le

$$L = R_0 \frac{L_n}{\omega_0} \quad C = \frac{C_n}{\omega_0 R_0}$$

relazioni:

Si noti che in questo caso, non avendo dato alcuna specifica su R_0 , rimane $R_0 = 1 \Omega$



87

Prima di concludere è bene osservare che, essendo:

$$\alpha = 10 \log \left[1 + \epsilon^2 T_n^2 \left(\frac{f}{f_0} \right) \right]$$

se è $f > f_0$ allora il valore di α è dato da:

Essendo $T_n \left(\frac{f}{f_0} \right) \cong 2^{n-1} \left(\frac{f}{f_0} \right)^n$

$$\alpha \cong 10 \log \left[\epsilon^2 2^{2n-2} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{2n} \right]$$

Applicando poi le proprietà del logaritmo si ha infine:

$$\alpha = 20 \log \epsilon + 20 \log 2 (n - 1) + 20n \log \frac{f}{f_0}$$

$$< 0 \quad \cong 6(N - 1)$$

Svolgendo calcoli simili sull' attenuazione dei filtri di Butterworth, si ottiene

$$\alpha = 20n \log \frac{f}{f_0}$$

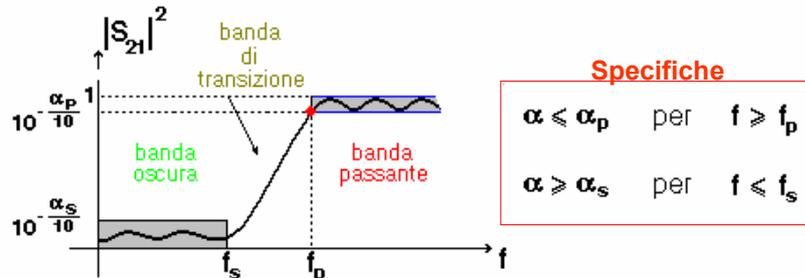
Chebyshev funziona quindi meglio di Butterworth, nel senso che le stesse prestazioni sono ottenute con meno componenti (N minore)

Filtri passivi

88

Filtri passa-alto

Come è noto un filtro si dice passa alto se realizza le specifiche sotto riportate



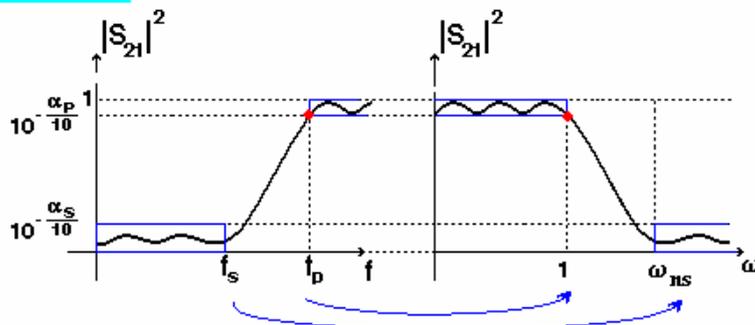
Come abbiamo fatto con i **filtri di Butterworth**, realizzeremo questa funzione a partire dal **passa basso normalizzato**.
Si pone ora:

$$\omega_n = \frac{f_0}{f}$$

Filtri passivi

89

Se poi poniamo $f_0 = f_p$ allora si ha che $\omega_n = 1$ quando $f = f_p = f_0$.
Questo permette di definire la corrispondenza sotto riportata e, soprattutto, di far valere le considerazioni fatte nell'introduzione al **passa-basso**.



A questo punto possiamo ancora definire **la selettività k**:

$$k = \frac{f_s}{f_p} \quad \begin{array}{l} \text{per il passa-basso era} \\ k = f_p / f_s \end{array}$$

Filtri passivi

90

Rimangono analoghi al passa basso i valori di k_1 e N

$$K_1 = \sqrt{\frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}}$$

$$N \geq \frac{\operatorname{arcosh} \frac{1}{k_1}}{\operatorname{arcosh} \frac{1}{k}}$$

Nel caso N non sia un intero il filtro è **sopraspecificato** e, come accade per il passa-basso, **la sovraspecifica avviene solo in banda oscura**, essendo che, **come visto nell'introduzione**, il valore limite di α_p viene assunto alla frequenza limite della banda passante f_p , ossia $\alpha = \alpha_p$ per $f=f_p$.
Per la funzione di trasferimento è sufficiente dire che, data quella del passa basso:

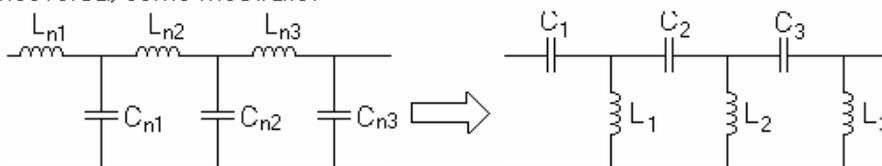
sono apici, non esponenti

$$S_{21}(s_n) = \frac{1}{a_N s_n^N + a_{N-1} s_n^{N-1} + a_{N-2} s_n^{N-2} + \dots + a_0}$$

si ha

$$S_{21}(s) = \frac{s^N}{a_N \omega_0^N + a_{N-1} \omega_0^{N-1} s + \dots + a_1 \omega_0 s^{N-1} + a_0 s^N}$$

L'ultimo problema da risolvere riguarda la corrispondenza tra **i valori dei componenti del passa basso normalizzato** e quelli del passa alto non normalizzato, che si ottiene cambiando induttori con condensatori e viceversa, come mostrato.



Le dimensioni dei componenti sono date da:

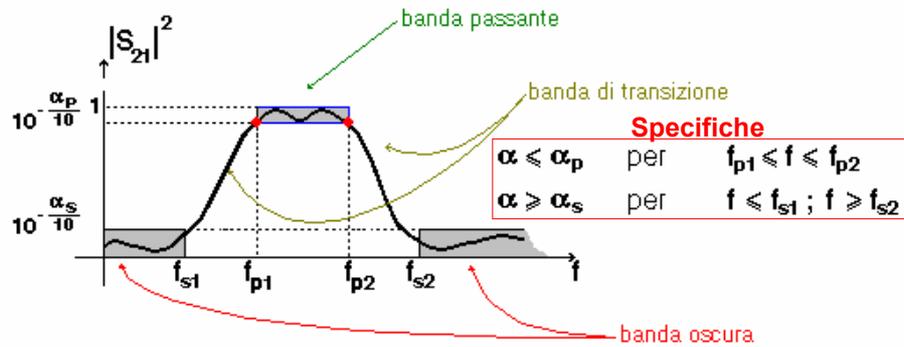
$$C_i = \frac{1}{L_{ni} \omega_0}$$

$$L_i = \frac{1}{C_{ni} \omega_0}$$

Questi valori vanno poi eventualmente denormalizzati rispetto a R_0 secondo **le note relazioni**.

Filtri passa-banda

Come è noto un filtro si dice passa banda se realizza le specifiche sotto riportate.

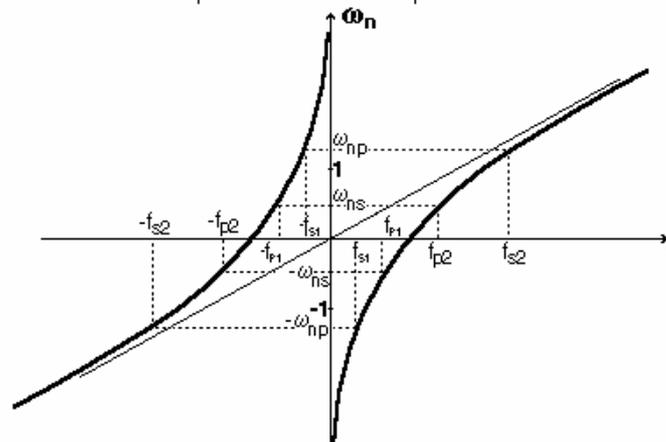


Come abbiamo fatto con i **filtri di Butterworth**, realizzeremo questa funzione a partire dal **passa basso normalizzato**

Questa volta poniamo

$$\omega_n = \frac{f_o}{B'} \left(\frac{f}{f_o} \cdot \frac{f_o}{f} \right)$$

realizzando così la corrispondenza sotto riportata



La prima cosa da osservare è che le specifiche sulla frequenza sono diventate 4 e quindi dovremo trovare un vincolo tra queste grandezze, che sarà, come *nel caso dei filtri di Butterworth*,

$$f_{s1} f_{s2} = f_{p1} f_{p2} = f_0^2$$

Nel caso molto probabile in cui le specifiche non fossero rispettate dovremo sovraspecificare il filtro, in maniera del tutto analoga a quella vista *nel caso dei filtri di Butterworth*

Rimangono analoghi al passa basso i valori di k_1 e N

$$K_1 = \sqrt{\frac{10^{\frac{\alpha_p}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha_s}{10}} - 1}} \quad N \geq \frac{\operatorname{arcosh} \frac{1}{k_1}}{\operatorname{arcosh} \frac{1}{k}}$$

Filtri passivi

95

La *selettività* invece vale:

$$k = \frac{\omega_{np}}{\omega_{ns}} = \frac{f_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}{f_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} = \frac{f_{p2} - f_{p1}}{f_{s2} - f_{s1}}$$

Nel caso molto probabile in cui N non sia un intero dovremo ancora una volta sovraspecificare il filtro. Volendo ancora, per *la ragione vista nella introduzione al passa-basso*, far sì che a $\omega_n = \pm 1$ corrispondano sempre $\pm f_{p1}$ e $\pm f_{p2}$ ne deriva che:

1 Il filtro viene sempre sovraspecificato in banda oscura (per una giustificazione si vedano anche le conclusioni del filtro passa-basso e passa-alto).

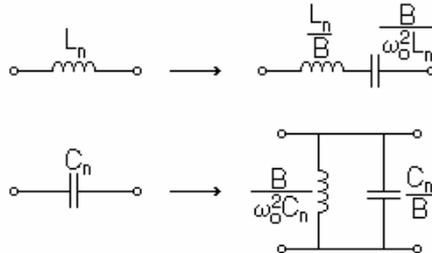
2 $B^1 = f_{p2} - f_{p1}$, come conseguenza diretta della *formula di trasformazione* del fatto che:

$$f_{s1} f_{s2} = f_{p1} f_{p2} = f_0^2$$

Filtri passivi

96

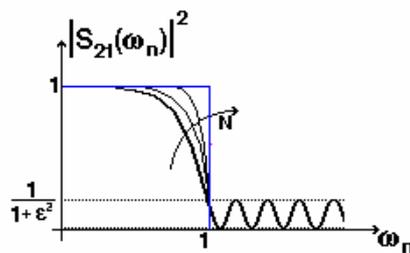
Una volta determinato l'ordine del filtro **si determinano** ai valori dei componenti del passa basso normalizzato da cui si arriva ai valori del passa banda **denormalizzato in frequenza** grazie alla corrispondenza sotto riportata.



Questi valori vanno poi eventualmente denormalizzati rispetto a R_0 secondo **le note relazioni**.

Cenno ai Filtri di Chebyshev Inversi

Hanno un comportamento duale e contrario ai quelli visti, come si puo' facilmente capire dal grafico sottostante.



Tale grafico si deduce dal fatto che:

$$|S_{21}(\omega_n)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon^2}{T_n^2\left(\frac{1}{\omega_n}\right)}}$$

Utilizzando un Chebyshev ed un Chebyshev inverso si hanno i FILTRI ELLITTICI. Essi permettono di ottenere la massima ripidità nella transizione tra le 2 bande, col n. minore di componenti.