EL SIGLO DE LA GEOMETRÍA

Martín Gildardo García Alvarado

Durante el Siglo XIX, al que nos referimos aquí como ``El Siglo de la Geometría", las matemáticas en general vieron una de las épocas más productivas y fructíferas; una rama particularmente enriquecida durante este período fue la geometría. Comentaremos aquí sobre algunos de los tópicos que fueron generados y/o impulsados durante este siglo: Iniciamos con una breve descripción del problema de las paralelas (Secciones 1 y 2), después nos detendremos a revisar algunas cuestiones de geometría no euclidiana (Secciones 3, 4, 5 y 6) y terminaremos haciendo un breve apunte sobre otras ramas de la geometría (Sección 7).

1. LOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES.

La geometría es un área de fundamental importancia en las matemáticas. Sus inicios se remontan seguramente hasta las primeras etapas de la civilización humana. Los *Elementos* de Euclides de Alejandría es una obra escrita alrededor del año 300 a. de C. que recopila, en 13 libros, los conocimientos matemáticos que se habían generado en más de 2000 años. Una parte sustancial de esta obra es de naturaleza geométrica. Los libros del I al VI tratan con geometría plana. En los libros del VII al IX se hace una exposición de la teoría de números. El libro X es un estudio sobre números irracionales y los libros de XI al XIII son un tratado de geometría tridimensional.

La importancia que los *Elementos* de Euclides han tenido en el desarrollo matemático y científico en general, puede apreciarse con el comentario que B. L. Van der Waerden hace en la *Encyclopaedia Britannica*: "Casi desde que fueron escritos y hasta nuestros días, los *Elementos* han ejercido una influencia continua y creciente sobre el pensamiento científico. Fueron la primera fuente de razonamiento, teoremas y métodos geométricos, por lo menos hasta el siglo XIX, en que aparecieron las geometrías no euclidianas. A veces se afirma que, después de la Biblia, es posible que los *Elementos* sean la obra más traducida, publicada y estudiada de la civilización occidental."

Los *Elementos* empiezan con una serie de definiciones y cinco postulados en los que se basan todas las demostraciones de los teoremas presentados por Euclides. Los primeros tres postulados se refieren a construcciones geométricas (por ejemplo, el primer postulado establece que es posible trazar una única línea recta que pase por dos puntos diferentes). Los postulados cuarto y quinto son de naturaleza diferente. El cuarto establece que todos los ángulos rectos son iguales. Esta idea implica que las propiedades geométricas de una figura son independientes de la posición en que se coloque en el espacio. El famoso quinto postulado, llamado "postulado de las paralelas" dice (más o menos):

Si una recta que intersecta a dos rectas hace que los ángulos interiores de un mismo lado sumen menos de dos rectos, entonces, si las dos rectas se prolongan indefinidamente, se intersectarán en el lado en que la suma de los ángulos interiores es menor de dos rectos.

La decisión de Euclides de tomar esta idea como un postulado dio origen a la geometría euclidiana. Es claro que el quinto postulado es, digamos, de naturaleza diferente que los otros cuatro. Aparentemente, este postulado no satisfacía del todo a Euclides y trató de evitar usarlo tanto como le fue posible. De hecho, las primeras 28 proposiciones de los *Elementos* se demuestran sin recurrir al quinto postulado.

2. EL QUINTO POSTULADO.

Es inmensa la lista de personas que, a lo largo de muchos siglos, dedicaron considerables esfuerzos a intentar probar, sin lograrlo, que el quinto postulado es consecuencia de los primeros cuatro. Muchas de estas "pruebas" se aceptaban como válidas durante largos períodos de tiempo, hasta que alguien terminaba por encontrar el error. Uno de los registros más antiguos en este sentido es el de Próculo (411-485) quien escribe un comentario sobre sus intentos, y, además, señala que una supuesta demostración de Ptolomeo es falsa, y procede a dar su propia "demostración", que resulta también ser falsa. Sin embargo, Próculo propone el siguiente postulado, equivalente al quinto de Euclides:

Dados una recta y un punto no contenido en la recta, existe una y sólo una paralela a la recta dada que pasa por el punto dado.

(Este enunciado es llamado, a veces *Axioma de Playfair*. Y es que, en 1756, R. Simson, de la Universidad de Glasgow, Escocia, publicó una edición de los *Elementos* en la que se dio una "demostración" del quinto postulado basándose en otra suposición. En 1795 John Playfair demostró que la "demostración" de Simson era falsa usando el postulado de Próculo. A partir de entonces, al postulado de Próculo se le llamó "Axioma de Playfair." Es decir, resulta que el axioma de Playfair … no es de Playfair. Bueno, en fin, …)

En 1697, el Jesuita Girolamo Saccheri produjo uno de los más notables intentos de demostración del quinto postulado. La importancia del trabajo de Saccheri reside en el hecho de que supuso que el quinto postulado es falso e intentó obtener una contradicción. Ocurrió que no sólo no obtuvo contradicción alguna sino que obtuvo, sin darse cuenta del alcance que podría tener lo que estaba haciendo, varios teoremas pertenecientes a lo que hoy conocemos como *geometrías no euclidianas.*

Legendre (1752-1833) pasó 40 años trabajando en el problema de las paralelas. Su trabajo aparece en el apéndice de su libro *Éléments de Géométrie.* Legendre demostró que el quinto postulado es equivalente a la afirmación:

La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.

Durante los siglos XVII y XVIII la geometría elemental estuvo tan avocada al problema del postulado de las paralelas que D'Alembert, en 1767, lo llamó *el escándalo de la geometría.*

3. GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS.

La primera persona que entendió lo que estaba ocurriendo con el problema de las paralelas fue J. K. F. Gauss (1777-1855) quien, en 1792 (cuando tenía sólo 15 años de edad) empezó a trabajar sobre el problema de demostrar el postulado de las paralelas a partir de los otros cuatro. En 1813 (es decir, después de 21 años), había tan poco progreso que escribió: "en la cuestión de las paralelas no estamos ahora más adelantados que Euclides; ésta es una parte vergonzosa de las matemáticas…" Para 1817 Gauss estaba convencido de que el quinto postulado era independiente de los otros cuatro y empezó a trabajar sobre las consecuencias geométricas que tendría el suponer que es posible trazar más de una paralela a una recta dada por un punto dado. Gauss discutió sobre el problema de las paralelas con su amigo el matemático Farkas Bolyai, quien escribió varias pruebas falsas del postulado. Farkas Bolyai enseñó matemáticas a su hijo, Janos Bolyai, pero a pesar de haberle aconsejado que "no gastara ni una hora de su tiempo en ese problema", Janos trabajó intensamente en él.

En 1823 Bolyai escribió a su padre diciéndole: "he descubierto cosas tan maravillosas que estoy sorprendido… Partiendo de la nada he creado un mundo nuevo y extraño." Bolyai publicó sus descubrimientos en un apéndice de 24 páginas en un libro de su padre. Después de leer el trabajo de Bolyai, Gauss se mostró muy impresionado ("Yo considero que este joven geómetra Bolyai es un genio de primer nivel…", le escribió a un amigo). En cierto sentido, Bolyai sólo supuso que era posible la existencia de una nueva geometría, pero es precisamente el reconocimiento de esta posibilidad lo que constituye una significativa aportación por parte de Bolyai. Gauss manifestó que él había llegado, varios años antes, a las mismas conclusiones de Bolyai, pero que había decidido no publicarlas. Aunque esta afirmación de Gauss es, sin lugar a dudas, cierta, no representa demérito alguno al logro de Bolyai, así como tampoco lo representa el hecho de que Lobachevski publicara, en 1829, sus trabajos sobre geometría no euclidiana. Ni Bolyai ni Gauss tenían noticias sobre los trabajos de Lobachevski debido, principalmente, a que fueron publicados en ruso en la revista *El Mensajero de Kazán,* editada de manera local por una universidad (El intento de Lobachevski por alcanzar una audiencia más grande no tuvo éxito cuando su trabajo fue rechazado por Ostrogradski.). La exposición más completa del trabajo de Lobachevski se publicó bajo el título *Investigaciones Geométricas Sobre el Problema de las Paralelas.* La publicación de una versión de este trabajo en francés en la revista *Crelle,* en 1837, permitió que las revolucionarias ideas de Lobachevski fueran conocidas por una amplia audiencia.

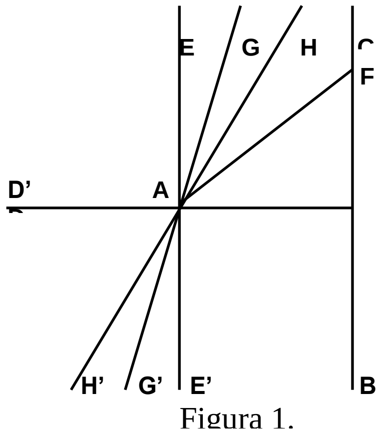


Figura 1.

Lobachevski hace la siguiente descripción del diagrama que aparece a la izquierda.
AD es perpendicular a **BC**. **AE** es perpendicular a **AD**. Dentro del ángulo **EAD** algunas rectas (como **AF**) intersectarán a **BC**. Supongamos que **AE** no es la única recta que no intersecta a **BC** y sea **AG** otra de tales rectas. **AF** es una recta cortante y **AG** es una recta no cortante. Debe haber una frontera entre las rectas cortantes y las no cortantes. Podemos toma a **AH** como esta frontera

Un elemento básico en la teoría geométrica desarrollada por Lobachevski es la noción de rectas paralelas, que definió de la manera siguiente:

El conjunto de rectas que, en un plano, pasan por un punto, puede se dividido, con referencia a una recta dada en el mismo plano, en dos clases: cortantes y no cortantes. Las rectas que constituyen la frontera de estas dos clases serán llamadas *paralelas* a la recta dada**.** (Figura 1.)

Después, Lobachevski reemplaza el quinto postulado de Euclides por el siguiente:

Postulado de las paralelas: Por cada punto exterior a una recta dada pasan dos paralelas.

Es importante señalar que, hasta donde sabemos, no se ha probado que las descrip- ciones de Bolyai o la de Lobachevski de la nueva geometría sean consistentes. De hecho, en este sentido no hay mucha diferencia con lo que ocurre con la geometría de Euclides, aunque los ya muchos siglos de trabajo con la geometría euclidiana son suficientes para tener la esperanza de que nunca aparecerá una contradicción.

En 1868 Eugenio Beltrami (1835-1900) escribió un *Ensayo sobre la Interpretación de la Geometría no Euclidiana* en el que se presentaba un modelo de geometría no euclidiana bidimensional dentro de la geometría euclidiana tridimensional. La base del modelo es la superficie de revolución que se genera al rotar una tractriz sobre su asíntota. Esta superficie es llamada *pseudoesfera*. En este modelo se satisfacen los primeros cuatro postulados de Euclides pero no el quinto. El modelo de Beltrami fue completado por Félix Klein (1849-1925) en 1871.

LA GEOMETRÍA ELÍPTICA DE RIEMANN

G. F. B. Riemann (1826-1866) escribió su tesis doctoral bajo la dirección de Gauss y dio una conferencia inaugural el 10 de junio de 1854 en la que presentó una reformulación de la geometría que él consideró como un espacio equipado con una estructura que permite hacer mediciones de cantidades como longitudes, áreas y ángulos. Esta conferencia se publicó hasta 1868, es decir, dos años después de su muerte, pero tuvo una profunda influencia sobre el desarrollo de la geometría. Riemann también expuso una geometría "esférica." El modelo para esta geometría es una esfera en la que los círculos máximos son considerados como las líneas rectas. En esta geometría, cada recta a través de un punto *P* no contenido en la recta *AB* intersecta a la recta *AB*. En esta geometría es posible la no existencia de paralelas.

3. MODELOS DE GEOMETRÍA HIPERBÓLICA.

Vamos a presentar tres modelos de geometría hiperbólica: el de Poincaré, el del semi- plano superior y el de Klein-Beltrami. Estas son estructuras inmersas en el espacio euclidiano de dimensión dos. Los modelos de Klein-Beltrami y de Poincaré son modelos finitos y el del semiplano superior es infinito.

EL MODELO DE POINCARÉ

El modelo de Poincaré consiste en un disco abierto *D* en el que las líneas rectas se representan mediante arcos euclidianos que intersectan perpendicularmente a la frontera de *D*. La Figura 2 muestra algunas rectas en el modelo de Poincaré; en esta figura: ***l*, *m*** y ***n*** intersectan ortogonalmente a la frontera de *D*. Las rectas ***m*** y ***n*** no son paralelas pues tienen un punto en común. ***l*** y ***n*** son *divergentemente paralelas*, lo que significa que estas rectas no tienen puntos en común ni en *D* ni en la frontera de *D*. ***l*** y ***m*** son rectas *asintóticamente paralelas*, lo que significa que tienen un punto en común que no está contenido en el modelo.

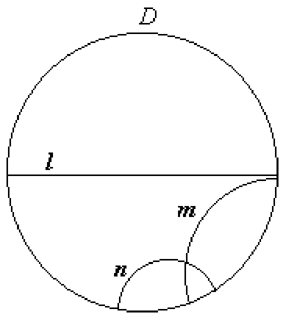


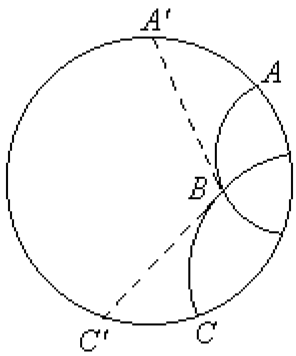
Figura 2

En este modelo el ángulo entre dos rectas que se intersectan es el ángulo (euclidiano) entre las tangentes a los correspondientes arcos euclidianos. Por ejemplo, para determi- nar el ángulo entre las rectas no euclidianas *AB* y *BC* (véase la Figura 3), trazamos las tangentes euclidianas *BA'* y *BC'* a los arcos en el punto de intersección y medimos el ángulo *A'BC'*. El ángulo entre las rectas no euclidianas *AB* y *BC* es, por definición, el ángulo euclidiano *A´BC´*. Esta definición de ángulo tiene sentido pues este modelo se obtiene mediante una transformación conforme del plano euclidiano.

El elemento de arco en el modelo de Poincaré es

$$ds = \frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

La distancia entre puntos en el modelo de Poincaré se calcula de la siguiente manera. Sean *P* y *Q* dos puntos en D (véase la Figura 4). Estos dos puntos determinan una única recta no euclidiana en *D* que se aproxima a la frontera de *D* en los dos puntos euclidianos *A* y *B*.



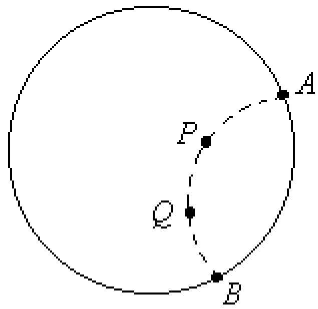


Figura 3

Figura 4

Nótese que A y B no son puntos en D pues están en la frontera de D. Si $|PA|$, $|PB|$, $|QA|$ y $|QB|$ denotan las distancias euclidianas de P a A, etcétera, entonces, la distancia (no euclidiana) de P a Q se calcula mediante

$$d(P,Q) = \left| \ln \frac{|PA|/|PB|}{|QA|/|QB|} \right|.$$

EL MODELO DEL SEMIPLANO SUPERIOR

El modelo del semiplano superior es atribuido a H. Poincaré. Este modelo consiste de todos los puntos en el semiplano superior del plano de coordenadas cartesianas XY sin incluir los puntos del eje X. Las *rectas* en este modelo son semicírculos euclidianos cuyos centros están sobre el eje X y las semirrectas euclidianas verticales, a las que podemos considerar como arcos de círculos de radio infinito. En la Figura 5, ***k*** es un ejemplo de tales rectas.

En el modelo representado en la Figura 5, las rectas ***l*** y ***n*** se intersectan, así que no son paralelas. Las rectas ***k***, ***n*** y ***m*** son *divergentemente paralelas*, pues no se intersectan ni en el semiplano ni en su frontera. Las rectas ***k*** y ***l*** son *asintóticamente paralelas*, pues se intersectan en la frontera, que, por construcción, no está incluida en el modelo.

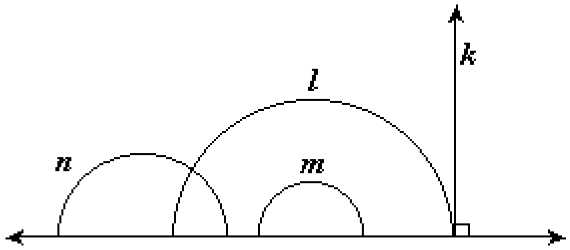


Figura 5

Este modelo también se obtiene mediante una transformación conforme del plano. Por esta razón el ángulo entre dos rectas no euclidianas es el ángulo que forman las correspondientes rectas euclidianas tangentes en el punto de intersección.

El elemento de arco para el modelo del semiplano superior es

$$ds = \frac{|dz|}{\mathrm{Im}[z]}.$$

La distancia entre dos puntos en el modelo se calcula de la siguiente manera. Consideremos una recta euclidiana fija ST en un plano euclidiano. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ST es el eje X del plano euclidiano. Sean P y Q dos puntos en el semiplano superior (véase la Figura 6).

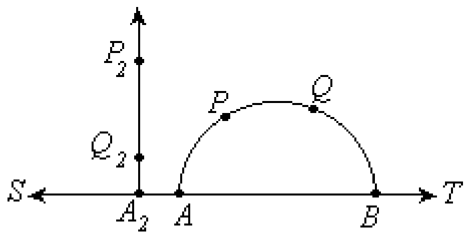


Figura 6

Si la única recta no euclidiana que pasa por *P* y *Q* es un semicírculo, entonces intersectará a la recta *ST* en dos puntos euclidianos A y *B*. En este caso, la distancia no euclidiana entre los puntos *P* y *Q* está dada por

$$d(P,Q) = \left| \ln \frac{|PA| / |PB|}{|QA| / |QB|} \right|.$$

Si la única recta no euclidiana es una semirrecta euclidiana vertical, entonces intersectará a *ST* en un punto A_2. En este caso la distancia no euclidiana será

$$d(P,Q) = \left| \ln \frac{|PA|}{|QA|} \right|.$$

EL MODELO DE KLEIN-BELTRAMI

El modelo de Klein-Beltrami para una geometría hiperbólica consiste en un disco abierto *D* en el que las "rectas" son cuerdas euclidianas cuyos extremos están en la frontera de *D*.

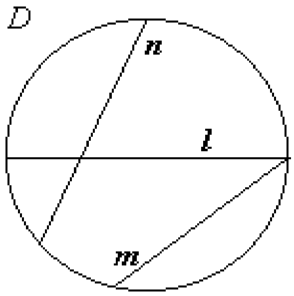


Figura 7

En la Figura 7, ***l*** y ***n*** son rectas no paralelas (se intersectan); ***m*** y ***n*** son rectas *divergentemente paralelas*, es decir, no tienen punto alguno en común. Las rectas ***l*** y ***m*** son *asintóticamente paralelas*, lo que significa que las cuerdas se intersectan en la frontera del disco que, por construcción, no está incluida en el modelo. De manera que las rectas ***l*** y ***m*** no se intersectan en el espacio hiperbólico, es decir, son paralelas. La medición de ángulos en el modelo de Klein-Beltrami es muy complicada. Este modelo es conforme sólo en el origen. Es decir, sólo en el origen es posible medir ángulos usando un transportador. Existe un isomorfismo entre los modelos de Poincaré y de Klein-Beltrami (véase la sección siguiente) que permite hacer mediciones de ángulos con relativa facilidad. El isomorfismo en cuestión transforma ángulos en el modelo de Klein-Beltrami en ángulos congruentes en el disco de Poincaré, de manera que para medir ángulos en el modelo de Klein-Beltrami transformamos, usando el isomorfismo, las dos rectas involucradas en el modelo de Poincaré y tomamos la medida euclidiana del ángulo de intersección de las tangentes en el disco de Poincaré.

Si *P* y *Q* son los dos extremos de la cuerda que pasa por los puntos *X* y *Y* en el disco de Klein-Beltrami, la distancia no euclidiana entre *X* y *Y* se calcula mediante

$$d(X,Y) = \frac{1}{2} \left| \ln \frac{(\overline{XP})(\overline{YQ})}{(\overline{YP})(\overline{XQ})} \right|$$

donde, por ejemplo, $(\overline{XP})$ es la distancia euclidiana entre los puntos X y P.

5. ISOMORFISMOS ENTRE LOS MODELOS.

Los diferentes modelos de geometrías hiperbólicas (los que hemos presentado aquí, así como otros que hemos omitido; por ejemplo, el modelo de Minkowski) son equivalentes, en el sentido de que existen funciones que transforman un modelo en el otro, de manera que las nociones de objetos geométricos como puntos, rectas, ángulos y distancias se preservan. En la Figura 8 presentamos esquemáticamente algunas de estas transformaciones.

6. GEOMETRÍA RIEMANNIANA.

En 1854, en una conferencia titulada "Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde Liegen " (Sobre las Hipótesis que Forman los Fundamentos de la Geometría), Bernhard Riemann presentó una visión comprensiva de la geometría. Conciente de las limitaciones que presentaba la geometría euclidiana, formuló una geometría no euclidiana que hoy conocemos como *geometría elíptica*. Al parecer, Riemann no sabía que Lobachevski y Bolyai habían demostrado la posibilidad de construir una geometría consistente sin tomar en consideración el quinto postulado de Euclides. De hecho, el trabajo de Riemann constituye una alternativa a los sistemas de geometría no euclidiana de Lobachevski y Bolyai. Por ejemplo, en geometría euclidiana, dos rectas son paralelas sí son

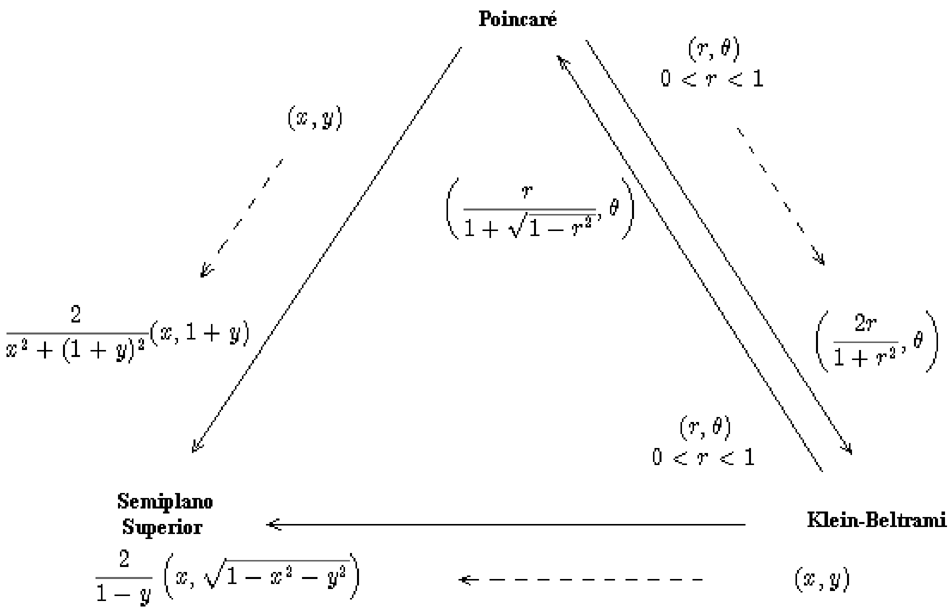


Figura 8

equidistantes; en geometría elíptica las paralelas no existen. En la euclidiana, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos; en la elíptica, la suma es mayor que dos rectos. En la euclidiana es posible tener polígonos similares con diferentes áreas; en la elíptica no existen dos polígonos similares con diferentes áreas. Básicamente, la geometría riemanniana estudia las propiedades de un espacio de dimensión *n* equipado con un sistema de coordenadas $x^i = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ en el que está definida una forma cuadrática diferencial, llamada *métrica* (o *elemento de arco*), mediante

$$ds = \left[\sum_{1 \le i,k \le n} g_{ik}(x^j)dx^i dx^k \right]^{1/2}$$

Los n^2 coeficientes g_{ik} son las componentes de un campo tensorial simétrico covariante de orden dos, llamado *tensor fundamental*.

Esta geometría se reduce a la geometría euclidiana si $ds = \left[(dx^1)^2 + \cdots (dx^n)^2\right]^{1/2}$. Si $x(t) = x^j(t), a \le t \le b$ es una curva en este espacio, la *longitud de arco* se calcula mediante

$$s = \int_a^b \sqrt{\left| \sum_{i,k} g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right|}\, dt \, .$$

A las curvas que son la conexión más corta entre dos puntos se les llama *geodésicas*.
La longitud de un vector A^j se calcula mediante

$$|A| = \sqrt{\left| \sum_{i,k} g_{ik} A^i A^k \right|} \, ,$$

y el ángulo θ entre dos vectores A^i y B^k (de longitudes no nulas) está dado por

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i,k} g_{ik} A^i B^k}{|A||B|} \, .$$

Es muy complicado presentar de manera informal y breve, con las limitaciones naturales de escrito como el presente, un panorama medianamente completo de una teoría tan extensa y rica como lo es la geometría riemanniana. En esta sección hemos tratado de indicar cómo se define ésta y cómo se realizan las mediciones de las principales magnitudes (longitud de arco, norma, ángulo entre vectores). Para dejar este tema queremos comentar que un indicador del nivel de importancia de la geometría riemanniana está en el hecho de que jugó un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de la relatividad en la que el espacio riemanniano es el universo físico (de dimensión 4) equipado con la métrica $ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2$ ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ formas diferenciales lineales). Las componentes g_{ik} del tensor fundamental están determinados por el potencial gravitacional. En este espacio las trayectorias seguidas por los rayos de luz son *curvas nulas*, definidas por la ecuación diferencial $ds^2=0$, mientras que las trayectorias de partículas, sin la acción de fuerzas externas, son las *geodésicas*. En este sentido, la geometría del espacio no está definida a priori sino que está determinada por la distribución de materia en el universo. Se han hecho muchos intentos, alguno por el mismo Einstein en sus últimos años, para desarrollar una teoría del *campo unificado* en la que tanto el campo gravitacional como el electromagnético se puedan explicar a partir de una misma base. Esto lleva a una generalización de la geometría riemanniana a geometrías como la de Weyl, la *métrica de dimensión cinco*, de Kaluza y la *teoría de la relatividad proyectiva* de Oswald Veblen. Sin embargo, no se han obtenido resultados conclusivos en este sentido.

Para cerrar esta sección diremos que Félix Klein demostró que las únicas geometrías no euclidianas posibles son la hiperbólica, la de Lobachevski, y la elíptica, de Riemann.

7. OTRAS GEOMETRÍAS.

Durante el siglo XIX se desarrollaron otras geometrías, entre las que se pueden apuntar las siguientes. La **geometría descriptiva**, desarrollada inicialmente por Gaspard Monge (1746-1818) en la memoria *Géométrie Descriptive*, publicada en 1799. Monge es también considerado el padre de la **geometría diferencial** debido a su obra *Application de l'analyse à la géométie*, en la que introduce el concepto de *líneas de curvatura* de una superficie en el espacio euclidiano tridimensional. En 1822, Jean Victor Poncelet (1788-1867) publicó *Traité des propriétés projectives des figures*, que es un estudio de aquellas propiedades geométricas que permanecen invariantes ante proyecciones. Este trabajo contiene las ideas fundamentales de la **geometría proyectiva**, tales como los conceptos de *razón cruzada*, *involución* y *puntos circulares al infinito*. En el siglo XVII los matemáticos franceses René Descartes y Pierre de Fermat estudiaron las secciones cónicas y determinaron que éstas satisfacían ecuaciones algebraicas de orden dos en dos variables. Posteriormente Isaac Newton estudió ecuaciones polinomiales de orden tres y clasificó los lugares geométricos correspondientes, las *cúbicas*, en 72 clases. De modo que Descartes, Fermat y Newton pueden considerarse como los iniciadores del estudio de curvas algebraicas planas, un tópico básico en **geometría algebraica**. Esta disciplina se enriqueció durante el siglo XIX con los trabajos de H. G. Zeuthen (1839-1920) y P. E. Appell (1835-1930), entre muchos otros.

REFERENCIAS:

[1] Boyer, Carl B. (1991). *A History of Mathematics.* Dover, Second Edition.

[2] Haines, G. K., Heat, T. L. (Editors) (1956). *Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover.

[3] Struik, D. J. (1987). *A Concise History of Mathematics.*Dover, 4th edition (revised).

[4] Valencia Arvizu, Marco Antonio. *Geometría Diferencial I*. Universidad de Sonora, 1996.

SITIOS EN RED:

[5] http://www-history.mcs.st-and-ac.uk/~history/BiogIndex.html

[6] http://www.math.uncc.edu/~droyster/math3181/notes/hyprgeom/node55.html