DESCARTES (1596-1650) Filósofo y matemático francés. Durante su juventud fue soldado y recorrió Hungría, Suiza e Italia. Después de participar en el sitio de La Rochelle, se acogió a la vida estudiosa. La Reina Cristina de Suecia lo invita a su corte, para que le dé clases de matemáticas; Descartes va y allí muere. A Descartes se le considera el primer filósofo de la Edad Moderna, y es el que sistematiza el método científico. Fue el primero en aplicar el Algebra a la Geometría, creando así la Geometría Analítica.

CAPITULO XIX

DESIGUALDADES. INECUACIONES

243 Se dice que una cantidad a es **mayor** que otra cantidad b cuando la diferencia $a-b$ es positiva. Así, 4 es mayor que -2 porque la diferencia $4-(-2)=4+2=6$ es positiva; -1 es mayor que -3 porque $-1-(-3)=-1+3=2$ es una cantidad positiva.

Se dice que una cantidad a es **menor** que otra cantidad b cuando la diferencia $a-b$ es negativa. Así, -1 es menor que 1 porque la diferencia $-1-1=-2$ es negativa; -4 es menor que -3 porque la diferencia $-4-(-3)=-4+3=-1$ es negativa.

De acuerdo con lo anterior, **cero es mayor que cualquier cantidad negativa.**

Así, 0 es mayor que -1 porque $0-(-1)=0+1=1$, cantidad positiva.

244 **DESIGUALDAD** es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra.

Los **signos de desigualdad** son $>$, que se lee **mayor que**, y $<$ que se lee **menor que**. Así $5>3$ se lee 5 **mayor que** 3; $-4<-2$ se lee -4 menor que -2.

245 **MIEMBROS**

Se llama **primer miembro** de una desigualdad a la expresión que está a la izquierda y **segundo miembro** a la que está a la derecha del signo de desigualdad.

Así, en $a+b>c-d$ el primer miembro es $a+b$ y el segundo $c-d$.

246 **TERMINOS** de una desigualdad son las cantidades que están separadas de otras por el signo + o − o la cantidad que está sola en un miembro. En la desigualdad anterior los términos son a, b, c y $-d$.

247 Dos desigualdades son del **mismo signo** o **subsisten en el mismo sentido** cuando sus primeros miembros son mayores o menores, ambos, que los segundos.

Así, $a>b$ y $c>d$ son desigualdades del mismo sentido.

Dos desigualdades son de **signo contrario** o **no subsisten en el mismo sentido** cuando sus primeros miembros no son ambos mayores o menores que los segundos miembros. Así, $5>3$ y $1<2$ son desigualdades de sentido contrario.

248 **PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES**

1) **Si a los dos miembros de una desigualdad se suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía.**

Así, dada la desigualdad $a>b$, podemos escribir: $a+c>b+c$ y $a-c>b-c$.

CONSECUENCIA

Un término cualquiera de una desigualdad se puede pasar de un miembro al otro cambiándole el signo.

Así, en la desigualdad $a>b+c$ podemos pasar c al primer miembro con signo − y quedará $a-c>b$, porque equivale a restar c a los dos miembros.

En la desigualdad $a-b>c$ podemos pasar b con signo + al segundo miembro y quedará $a>b+c$, porque equivale a sumar b a los dos miembros.

2) **Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el signo de la desigualdad no varía.**

Así, dada la desigualdad $a>b$ y siendo c una cantidad positiva, podemos escribir: $ac>bc$ y $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

CONSECUENCIA

Se pueden suprimir denominadores en una desigualdad, sin que varíe el signo de la desigualdad, porque ello equivale a multiplicar todos los términos de la desigualdad, o sea sus dos miembros, por el m. c. m. de los denominadores.

3) **Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad negativa, el signo de la desigualdad varía.**

Así, si en la desigualdad $a > b$ multiplicamos ambos miembros por $-c$, tendremos: $-ac < -bc$.

y dividiéndolos por $-c$, o sea multiplicando por $-\frac{1}{c}$, tendremos: $-\frac{a}{c} < -\frac{b}{c}$.

CONSECUENCIA

Si se cambia el signo a todos los términos, o sea a los dos miembros de una desigualdad, el signo de la desigualdad varía porque equivale a multiplicar los dos miembros de la desigualdad por -1.

Así, si en la desigualdad $a - b > -c$ cambiamos el signo a todos los términos, tendremos: $b - a < c$.

4) **Si cambia el orden de los miembros, la desigualdad cambia de signo.**

Así, si $a > b$ es evidente que $b < a$.

5) **Si se invierten los dos miembros, la desigualdad cambia de signo.**

Así, siendo $a > b$ se tiene que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

6) **Si los miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a una misma potencia positiva, el signo de la desigualdad no cambia.**

Así, $5 > 3$. Elevando al cuadrado: $5^2 > 3^2$ o sea $25 > 9$.

7) **Si los dos miembros o uno de ellos es negativo y se elevan a una potencia impar positiva, el signo de la desigualdad no cambia.**

Así, $-3 > -5$. Elevando al cubo: $(-3)^3 > (-5)^3$ o sea $-27 > -125$.

$2 > -2$. Elevando al cubo: $2^3 > (-2)^3$ o sea $8 > -8$.

8) **Si los dos miembros son negativos y se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad cambia.**

Así, $-3 > -5$. Elevando al cuadrado: $(-3)^2 = 9$ y $(-5)^2 = 25$ y queda $9 < 25$.

9) **Si un miembro es positivo y otro negativo y ambos se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad puede cambiar.**

Así, $3 > -5$. Elevando al cuadrado: $3^2 = 9$ y $(-5)^2 = 25$ y queda $9 < 25$. **Cambia.**

$8 > -2$. Elevando al cuadrado: $8^2 = 64$ y $(-2)^2 = 4$ y queda $64 > 4$. **No cambia.**

10) **Si los dos miembros de una desigualdad son positivos y se les extrae una misma raíz positiva, el signo de la desigualdad no cambia.**

Así, si $a > b$ y n es positivo, tendremos: $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

11) **Si dos o más desigualdades del mismo signo se suman o multiplican miembro a miembro, resulta una desigualdad del mismo signo.**

Así, si $a > b$ y $c > d$, tendremos: $a + c > b + d$ y $ac > bd$.

12) **Si dos desigualdades del mismo signo se restan o dividen miembro a miembro, el resultado no es necesariamente una desigualdad del mismo signo, pudiendo ser una igualdad.**

Así, $10 > 8$ y $5 > 2$. Restando miembro a miembro: $10 - 5 = 5$ y $8 - 2 = 6$; luego queda $5 < 6$; cambia el signo.

Si dividimos miembro a miembro las desigualdades $10 > 8$ y $5 > 4$, tenemos $\frac{10}{5} = 2$ y $\frac{8}{4} = 2$; luego queda $2 = 2$, igualdad.

INECUACIONES

(249) **UNA INECUACION** es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas. Las inecuaciones se llaman también **desigualdades de condición.**

Así, la desigualdad $2x - 3 > x + 5$ es una inecuación porque tiene la incógnita x y sólo se verifica para cualquier valor de x mayor que 8.

En efecto: Para $x = 8$ se convertiría en igualdad y para $x < 8$ se convertiría en una desigualdad de signo contrario.

(250) **RESOLVER UNA INECUACION** es hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación.

(251) PRINCIPIOS EN QUE SE FUNDA LA RESOLUCION DE LAS INECUACIONES

La resolución de las inecuaciones se funda en las propiedades de las desigualdades, expuestas anteriormente, y en las **consecuencias** que de las mismas se derivan.

(252) RESOLUCION DE INECUACIONES

Ejemplos

(1) Resolver la inecuación $2x - 3 > x + 5$.

Pasando x al primer miembro y 3 al segundo:

$$2x - x > 5 + 3.$$

Reduciendo: $x > 8$. R.

8 es el *límite inferior* de x, es decir que la desigualdad dada sólo se verifica para los valores de x mayores que 8.

(2) Hallar el límite de x en $7-\frac{x}{2}>\frac{5x}{3}-6$.

Suprimiendo denominadores: $42-3x>10x-36$.

Transponiendo: $-3x-10x>-36-42$.

$-13x>-78$

Cambiando el signo a los dos miembros, lo cual *hace cambiar el signo* de la desigualdad, se tiene: $13x<78$.

Dividiendo por 13: $x<\frac{78}{13}$ o sea $x<6$. R.

6 es el *límite superior* de x, es decir, que la desigualdad dada sólo se verifica para los valores de x menores que 6.

(3) Hallar el límite de x en $(x+3)(x-1)<(x-1)^2+3x$.

Efectuando las operaciones indicadas: $x^2+2x-3<x^2-2x+1+3x$.

Suprimiendo x^2 en ambos miembros y transponiendo: $2x+2x-3x<1+3$

$x<4$. R.

4 es el límite superior de x.

EJERCICIO 164

Hallar el límite de x en las inecuaciones siguientes:

1. $x-5<2x-6$.
2. $5x-12>3x-4$.
3. $x-6>21-8x$.
4. $3x-14<7x-2$.
5. $2x-\frac{5}{3}>\frac{x}{3}+10$.
6. $3x-4+\frac{x}{4}<\frac{5x}{2}+2$.
7. $(x-1)^2-7>(x-2)^2$.
8. $(x+2)(x-1)+26<(x+4)(x+5)$.
9. $3(x-2)+2x(x+3)>(2x-1)(x+4)$.
10. $6(x^2+1)-(2x-4)(3x+2)<3(5x+21)$.
11. $(x-4)(x+5)<(x-3)(x-2)$.
12. $(2x-3)^2+4x^2(x-7)<4(x-2)^3$.
13. $\frac{2x+1}{3x-1}>\frac{2x+5}{3x+2}$.
14. $\frac{x+3}{3}-\frac{4}{x+2}>\frac{x^2}{3}$.
15. $\frac{5}{3x+1}-\frac{20}{9x^2-1}<\frac{2}{3x-1}$.
16. $\frac{1}{x^2+x}>\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-1}$.
17. Hallar los números enteros cuyo tercio aumentado en 15 sea mayor que su mitad aumentada en 1.

INECUACIONES SIMULTANEAS

253 **INECUACIONES SIMULTANEAS** son inecuaciones que tienen soluciones comunes.

Ejemplos

(1) Hallar qué valores de x satisfacen las inecuaciones:

$$2x-4>6$$
$$3x+5>14$$

Resolviendo la primera: $2x>6+4$

$2x>10$

$x>5$.

Resolviendo la segunda: $3x>14-5$

$3x>9$

$x>3$.

La primera inecuación se satisface para $x>5$ y la segunda para $x>3$, luego tomamos como solución general de ambas $x>5$, ya que cualquier valor de x mayor que 5 será mayor que 3.

Luego el *límite inferior* de las soluciones comunes es 5. R.

(2) Hallar el límite de las soluciones comunes a las inecuaciones:

$$3x+4<16$$
$$-6-x>-8$$

Resolviendo la primera: $3x<16-4$

$3x<12$

$x<4$.

Resolviendo la segunda: $-x>-8+6$

$-x>-2$

$x<2$.

La solución común es $x<2$, ya que todo valor de x menor que 2 evidentemente es menor que 4.

Luego 2 es el *límite superior* de las soluciones comunes. R.

(3) Hallar el límite superior e inferior de los valores de x que satisfacen las inecuaciones:

$$5x-10>3x-2$$
$$3x+1<2x+6$$

Resolviendo la primera: $5x-3x>-2+10$

$2x>8$

$x>4$.

Resolviendo la segunda: $3x-2x<6-1$

$x<5$.

La primera se satisface para $x>4$ y la segunda para $x<5$, luego todos los valores de x que sean a la vez mayores que 4 y menores que 5, satisfacen ambas inecuaciones.

Luego 4 es el límite inferior y 5 el límite superior de las soluciones comunes lo que se expresa $4<x<5$. R.

EJERCICIO 165

Hallar el límite de las soluciones comunes a:

1. $x-3>5$ y $2x+5>17$.
2. $5-x>-6$ y $2x+9>3x$.
3. $6x+5>4x+11$ y $4-2x>10-5x$.
4. $5x-4>7x-16$ y $8-7x<16-15x$.
5. $\frac{x}{2}-3>\frac{x}{4}+2$ y $2x+\frac{3}{5}<6x-23\frac{2}{5}$.

Hallar el límite superior e inferior de las soluciones comunes a:

6. $2x-3<x+10$ y $6x-4>5x+6$.
7. $\frac{x}{4}-1>\frac{x}{3}-1\frac{1}{2}$ y $2x-3\frac{3}{5}>x+\frac{2}{5}$.
8. $(x-1)(x+2)<(x+2)(x-3)$ y $(x+3)(x+5)>(x+4)(x+3)$.
9. $\frac{x+2}{x+8}>\frac{x-2}{x+3}$ y $\frac{x-1}{x+4}<\frac{x-5}{x-1}$.
10. Hallar los números enteros cuyo triplo menos 6 sea mayor que su mitad más 4 y cuyo cuádruplo aumentado en 8 sea menor que su triplo aumentado en 15.