Ejemplo de Diagonalización

Ejemplo 1 *Diagonaliza la matriz siguiente:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Paso 1: Cálculo del polinomio característico

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} \frac{5}{3}-\lambda & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} \underbrace{=}_{F_1-F_2} \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} \underbrace{=}_{C_2+C_1} (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} \underbrace{=}_{F_1+F_2} (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} \underbrace{=}_{C_2-C_1} (1-\lambda)(-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico es

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Paso 2: Resolución de la ecuación característica $p(\lambda)=0 \to \lambda=1$, ó $\lambda=-1$, es decir, el espectro del endomorfismo es $\sigma(A)=\{1,-1\}$

Paso 3: Cálculo de los subespacios propios Calcularemos ahora el subespacio propio asociado a $\lambda=1$:

$$S(1) = \{X \ / \ (A-I)X = [0]\}$$

Resolveremos el sistema homogéneo con matriz de coeficientes $A-I$:

$$A-I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cancel{F_2},\ \cancel{F_3}]{\frac{3}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

y unas ecuaciones paramétricas de $S(1)$ serían:

$$\left.\begin{array}{r} x = 2\alpha+\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array}\right\} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

por lo que una base sería

$$\mathscr{B}_{S(1)} = \{(2,1,0),(1,0,1)\}$$

Calcularemos ahora el subespacio propio asociado a $\lambda = -1$:

$$S(-1) = \{X \ / \ (A+I)X = [0]\}$$

Resolveremos el sistema homogéneo con matriz de coeficientes $A-I$:

$$A+I = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightleftarrows -F_2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_2]{F_2-4F_1} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2/(-4)]{F_1\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y unas ecuaciones paramétricas de $S(1)$ serían:

$$\left.\begin{array}{r} x = -\frac{1}{2}\delta \\ y = \frac{1}{2}\delta \\ z = \delta \end{array}\right\} \forall \delta \in \mathbb{R}$$

por lo que una base sería

$$\mathscr{B}_{S(-1)} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$$

Paso 4: Diagonalización Se construye la matriz de cambio de base:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ S(1) & S(1) & S(-1) \end{array}$$

y la diagonalización sería:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 *Diagonaliza la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 *Se considera la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule A^k para todo $k \in \mathbb{N}$ (Puede dejarse como producto de matrices siempre que estén todas perfectamente identificadas) ¿$\exists A^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$? Razone la respuesta. Sea $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^{1543} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ con ¿Cuánto vale el elemento y_2?

Ejercicio 3 *Diagonaliza la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & 4 \\ 1 & 1+i & -i \\ 1 & 2+i & -1-i \end{pmatrix}$$