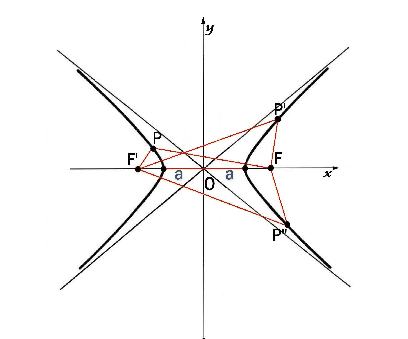
**Dimostrazione** **dell’equazione canonica dell’iperbole con fuochi sull’asse x.**



Denotiamo con F ed F' rispettivamente, i due fuochi. Fissiamo un sistema cartesiano (OXY) tale che l'asse x passi per i punti F' ed F e l'origine sia il punto medio del segmento FF'. Allora i due fuochi avranno coordinate (±c,0). Il punto P(x,y) verifica la condizione d(P,F)-d(P,F')=2° se e solo se

$\displaystyle\sqrt{(x+c)^{2}+y^{2}}-\sqrt{(x-c)^{2}+y^{2}}=2a$

da cui segue

\begin{displaymath}
\sqrt{(x-c)^{2}+y^{2}}=2a+ \sqrt{(x+c)^{2}+y^{2}}
\end{displaymath}

elevando al quadrato entrambi i membri dell’uguaglianza

\begin{displaymath}
(x-c)^{2}-(x+c)^{2}=4a^{2}+4a\sqrt{(x+c)^{2}+y^{2}}
\end{displaymath}

sviluppando i quadrati di binomio e semplificando

\begin{displaymath}
-4xc=4a^{2}+4a\sqrt{(x+c)^{2}+y^{2}}
\end{displaymath}

isolando ancora la radice

\begin{displaymath}
-a^{2}-xc=a\sqrt{(x+c)^{2}+y^{2}}
\end{displaymath}

elevando di nuovo al quadrato entrambi i membri dell’uguaglianza

\begin{displaymath}
x^{2}c^{2}+a^{4}+2a^{2}xc=a^{2}(x^{2}+c^{2}+2xc+y^{2})
\end{displaymath}

raccogliendo parzialmente

\begin{displaymath}
x^{2}(c^{2}-a^{2})-a^{2}y^{2}=a^{2}(c^{2}-a^{2})
\end{displaymath}

si arriva infine all'identità

|  |  |
| --- | --- |
| \begin{displaymath} \frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{(c^{2}-a^{2})}=1. \end{displaymath} | (1) |

Adesso consideriamo il triangolo FF'P (con F ed F' i fuochi e P il punto sull'iperbole).   
Poiché in un triangolo la differenza, in valore assoluto, tra due lati è minore del terzo abbiamo

$\displaystyle\overline{FF'}>\vert\overline{PF}-\overline{PF'}\vert$

cioè 2c>2a da cui c>a . Possiamo allora porre b2=c2-a2, e la (1) rappresenta l'equazione canonica dell'iperbole.