

Definizione Una funzione $f(x)$ si dice **continua nel punto c** con $c \in$ Dominio di f (o di accumulazione per il dominio di f ¹) se il limite per x che tende a c esiste finito e se è uguale a $f(c)$.

Ovvero: 1) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$

2) $f(c) = l$

Intuitivamente: possiamo affermare (anche se non è rigoroso) che una funzione $f(x)$ è continua in $x=c$ se tracciando il grafico in un intorno, anche piccolo di c , *non stacco la penna*.

Ovvero se il grafico non presenta *un buco*

Risultati notevoli:

dalla teoria dei limiti, dalla definizione e dai teoremi sui limiti si ricava facilmente che:

- 1) le funzioni elementari sono continue
- 2) se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in c allora lo sono anche $f(x)+g(x)$; $f(x)-g(x)$; $f(x)g(x)$; $f(x)/g(x)$ (eccetto $g(c)=0$)

Teorema continuità funzione composta

Date due funzioni $y=f(z)$ e $z=g(x)$; con $f(z)$ continua in m e $g(x)$ continua per $x=c$ e tale che $m=g(c)$ allora la funzione composta $f(g(x))$ è continua in c .

Esempio Sia $f(x) = \sin(x)$ e $g(x)=(x+2)$. La funzione composta $f(g(x)) = \sin(x+2)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

Osserviamo

- 1) **se la funzione non è continua in c** allora diremo che **c è un punto di discontinuità per f**
- 2) rileggiamo la definizione di continuità e ricaviamo che affinché la funzione sia discontinua in c può accadere **una delle seguenti situazioni:**

a. non vale $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$ poiché $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$

b. non vale $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$ poiché o non esiste o vale infinito almeno uno dei limiti, ad esempio $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \text{non}\exists$

c. vale $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$ ma non vale $f(c) = l$

Approfondimento

Definizione Si dice che per $x=c$ e $y=f(x)$ **c è punto di discontinuità di I specie** se esistono finiti i limiti destro e sinistri ma sono diversi (e quindi non esiste il limite). Ovvero

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$

¹ Ricordo che affermare che c è di accumulazione per il dominio di f equivale a considerare anche il caso in cui c non appartiene al dominio di f , ma in ogni intorno di c esiste almeno un punto del dominio di f . Pensiamo ad $f(x) = \frac{1}{x}$, $x=0$ non appartiene al dominio di f , ma è di accumulazione.

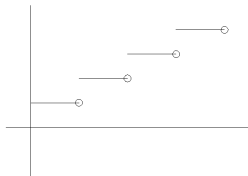
Esempio a) Consideriamo la funzione che associa ad ogni $x \in \mathfrak{R}$ -1 se $x < 0$; $+1$ se $x > 0$; 1 se $x = 0$.

Tale funzione si può esprimere $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ +1 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$ o anche $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ +1 & x = 0 \end{cases}$

Se procediamo nel calcolo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$.

Se rappresentiamo la funzione possiamo osservare che in $x=0$, presenta un "salto".

b) Consideriamo il costo di una telefonata in funzione della sua durata con una tariffazione di 0.10euro al minuto (calcolato all'inizio del minuto di conversazione indipendentemente dalla durata). Avrò un andamento come in figura:



E la funzione sarà discontinua in tutti valori interi di x . Con una discontinuità di I specie; ovvero un "salto".

Inoltre possiamo affermare che l'ampiezza di questo salto è 0,10

Definizione Se c è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione $f(x)$ si chiama **salto**

della funzione il valore ottenuto da $\left| \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \right|$

Definizione Si dice che per $x=c$ e $y=f(x)$ **c è punto di discontinuità di II specie** quando non esiste, o vale infinito, uno almeno dei due limiti destro o sinistro di $x=c$

Esempio:

1) $f(x) = \tan x$ in $x = \frac{\pi}{2}$ ha un punto di discontinuità di II specie poiché i limiti, da destra e da sinistra valgono rispettivamente $+\infty, -\infty$

2) $f(x) = \sqrt{x}$ in $x=0$ ha un punto di discontinuità di II specie poiché il limite sinistro non esiste.

Definizione Si dice che per $x=c$ e $y=f(x)$ **c è punto di discontinuità di III specie** quando esiste finito $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l$, ma $l \neq f(c)$ (o $f(c)$ non esiste)

Esempio:

1) Sia $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ per rappresentarla dobbiamo esaminare i tre "pezzi" separatamente e poi

comporli in un unico grafico. In $x=0$ il limite esiste e vale 0. Ma la funzione vale 2. Dunque ho discontinuità III specie.

Osserviamo: in generale, la discontinuità di III specie può essere *eliminata* ovvero può essere ridefinita la funzione in modo da "non staccare la penna" nell'intorno del punto di discontinuità. Per tale ragione si parla di **discontinuità eliminabile**.