Schema ripasso disequazioni

Disequazioni algebriche (ovvero polinomi e/o frazioni algebriche)

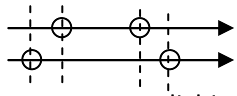
- Portiamo tutto a un membro (I°principio – regola trasporto)
- Sommiamo termini simili (o se frazioni, denominatore comune poi sommiamo termini simili)

Casi possibili:

- **P(x)>0**
  - Grado P(x)=1 $ax+b>0$ soluzione $se\ a>0\quad x>-\frac{b}{a};\quad se\ a<0\quad x<-\frac{b}{a}$
  - Grado P(x)=2 $ax^2+bx+c>0$:
    - Cerchiamo la soluzione dell'equazione $ax^2+bx+c=0$
    - Se $\Delta>0$ otteniamo due soluzioni distinte $x_1;\ x_2$ (supponiamo $x_1<x_2$); le soluzioni della <u>disequazione saranno</u>: $se\ a>0\quad x<x_1\quad x>x_2;$ se $a<0\quad x_1<x<x_2$
    - Se $\Delta=0$ otteniamo due soluzioni coincidenti $x_1=x_2$; le soluzioni della <u>disequazione saranno</u>: $se\ a>0\quad ogni\ x\neq x_1\ (o\ con\ altra\ scrittura\ \forall x\in R\ t.c.\ x\neq x_1;$ se $a<0\quad nessuna\ soluzione$
    - Se $\Delta<0$ non esistono soluzioni reali; le soluzioni della <u>disequazione saranno</u>: $se\ a>0\quad ogni\ x\ (o\ con\ altra\ scrittura\ \forall x\in R\ )$ se $a<0\quad nessuna\ soluzione$

  Attenzione: se la disequazione è del tipo $ax^2+bx+c\geq 0$ tra le soluzioni della disequazioni compariranno anche $x_1;\ x_2$; se la disequazione è del tipo $ax^2+bx+c<0$ ci possiamo ricondurre ai precedenti casi moltiplicando *tutto* per -1

- $P(x)\cdot Q(x)>0\quad o\quad \frac{P(x)}{Q(x)}>0$: studiamo il segno di ogni fattore. Ovvero poniamo
  - P(x)>0 e risolviamo; rappresentiamo su una retta i segni
  - Q(x)>0 e risolviamo; rappresentiamo su una retta i segni
  - Individuiamo sulla retta tutti gli intervalli in cui P e Q cambiano segno e applichiamo la regola dei segni.



- **Sistemi di disequazioni**: ci riportiamo a espressioni >0 o <0 ad ottenere ad esempio $\begin{cases}\boldsymbol{f(x)}>0\\ \boldsymbol{g(x)}>0\end{cases}$:
  - Risolviamo ciascuna disequazioni e rappresentiamo le soluzioni su una retta
  - Le <u>soluzioni del sistema</u> saranno gli intervalli <u>comuni</u> alle due soluzioni

  Attenzione: in questo caso **non dobbiamo fare i segni** ma solo le soluzioni comuni

- **Valore assoluto:** ricordiamo che $|f(x)|=\begin{cases}f(x)\ \ se\ f(x)\geq 0\\ -f(x)\ se\ f(x)<0\end{cases}$
  - $|\boldsymbol{f(x)}|<r$ le soluzioni sono date da $-r<f(x)<+r$ ovvero $\begin{cases}f(x)>-r\\ f(x)<+r\end{cases}$
  - $|\mathrm{f(x)}|>r$ le soluzioni sono date da $\begin{cases}f(x)<-r\\ f(x)>r\end{cases}$
  - Per disequazioni "più complicate " del tipo $|f(x)|<|g(x)|$ può tornare utile il metodo grafico (vedi oltre)

- **Irrazionali:** $\sqrt[n]{\boldsymbol{P(x)}} > Q(x)$; $\sqrt[n]{\boldsymbol{P(x)}} < Q(\boldsymbol{x})$
  - **Se n è dispari** $\sqrt[n]{P(x)} > Q(x)$ le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo $P(x) > Q^n(x)$; $\sqrt[n]{P(x)} < Q(x)$ le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo $P(x) < Q^n(x)$;
  - **Se n è pari:**
    - $\sqrt[n]{P(x)} < Q(x)$ le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} P(x) < Q^n(x) \\ P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \end{cases}$
    - $\sqrt[n]{P(x)} > Q(x)$ le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo i sistemi $\begin{cases} Q(x) < 0 \\ P(x) \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) > Q^n(x) \end{cases}$ e facendo l'unione delle soluzioni trovate

Disequazioni trascendenti (esponenziali, logaritmiche, goniometriche)

- **Esponenziali** del tipo $a^{f(x)} < k$:
  - **Se $\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{0}$** impossibile;
  - **Se $\boldsymbol{k}$** > 0 si applica il logaritmo: $\ln(a^{f(x)}) < \ln(k)$ le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo $f(x) \cdot \ln(a) < \ln(k)$
- **Esponenziali** in forma canonica $a^{f(x)} < a^{g(x)}$
  - **Se a>1** le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo $f(x) < g(x)$
  - **Se 0<a<1** le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo $f(x) > g(x)$
- **Esponenziali** nella forma $a^{f(x)} < b^{g(x)}$; si applica il logaritmo (meglio il naturale o Briggs): $\ln(a^{f(x)}) < \ln(b^{g(x)})$ le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo $f(x) \cdot \ln(a) < g(x) \cdot \ln(b)$.
  Attenzione: quando possibile sempre meglio portare tutto a un membro $f(x) \cdot \ln(a) - g(x) \cdot \ln(b) < 0$.

- **Logaritmiche** della forma $\log_a f(x) < k$**:** occorre **sempre** considerare il CE (ovvero $f(x) > 0$) poi:
  - **r**appresentiamo graficamente l'andamento di $\log_a$x (distinguendo se a>1 o 0<a<1)
  - rappresentiamo graficamente y=k
  - risolviamo $\log_a f(x) = k$ utilizzando la definizione di logaritmo $f(x) = a^k$
  - le soluzioni della disequazione si ottengono dal grafico.
- **Logaritmiche** in forma canonica $\log_a f(x) < \log_a g(x)$: occorre **sempre** considerare il CE (ovvero $f(x) > 0, g(x) > 0$) poi:
  - **Se a>1** le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo $f(x) < g(x)$ e considerando le soluzioni che cadono nel CE
  - **Se 0<a<1** le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo $f(x) > g(x)$ e considerando le soluzioni che cadono nel CE
- **Logaritmiche** in forma $\log_a f(x) < \log_b g(x)$: occorre **sempre** considerare il CE (ovvero $f(x) > 0, g(x) > 0$) poi si riportano alla stessa base con un cambio di base

- **Goniometriche elementari** della forma $sinx \leq a$; $cosx \leq b$;$\tan(x) \leq c$

- Rappresentiamo graficamente la funzione goniometrica e la retta y=a o y=b o y=c
- Si individuano le soluzioni delle equazioni elementari del tipo $sinx = a$; $cosx = b$;$\tan(x) = c$ (considerando un solo periodo T)
- le soluzioni della disequazione si ottengono dal grafico. Considerando anche la periodicità della funzione goniometrica.

- **Goniometriche** della forma $\sin(f(x)) \leq a$; $\cos(f(x)) \leq b$;$\tan(\mathrm{f}(x)) \leq c$
  - Tramite una sostituzione del tipo t=f(x)ci si riconduce a risolvere le equazioni goniometriche elementari (vedi sopra)
  - Trovate le soluzioni in t, si sostituisce nuovamente f(x) e si risolvono le nuove disequazioni in x

- **Metodo grafico:** è spesso utile rappresentare graficamente gli elementi che costituiscono la disequazione, ottenere così una informazione di tipo quantitativo. In genere le soluzioni della disequazione si ottengono risolvendo dei sistemi di equazioni che permettono di individuare i punti di intersezione tra le curve.