Limiti agli estremi del dominio.

Calcolo i limiti in tutti i punti estremi del dominio.

Attenzione: a) è necessario sempre riflettere, per limiti per $x \to c$, cosa accade al tendere da destra e da sinistra.

b) se la funzione è pari o dispari o periodica, è possibile limitare il calcolo dei limiti al solo intervallo in cui ho deciso di studiare la funzione

Data una funzione f(x), una volta determinato il suo **dominio** e, se possibile, il suo **segno** possiamo procedere a calcolare i limiti della funzione per x che tende ai punti di frontiera del dominio (purchè questi non siano isolati). Ovvero ci chiediamo cosa accade alla funzione quando ci avviciniamo agli "estremi" del dominio. Possiamo schematizzare la situazione:

- Il dominio è tutto R, $Domf(x) =]-\infty; +\infty[$
- Il dominio è tutto R eccetto un numero finito di punti $x \neq x_1; x_2; \dots; x_n$, $Domf(x) =]-\infty; x_1[\cup]x_1; x_2[\cup \dots \cup]x_n; +\infty[$
- Il dominio è un insieme illimitato chiuso a destra o a sinistra, ad esempio $Domf(x) =]-\infty; a]$
- Il dominio è un insieme illimitato aperto a destra o a sinistra, ad esempio $Domf(x) = [a; +\infty[$
- Il domino è un insieme limitato (aperto o chiuso, o in parte aperto e in parte chiuso) ad esempio $Domf(x) = [a; b[$

Poiché esaminare ogni caso sarebbe faticoso e inutile, vediamo di trovare una regola generale: *calcoleremo i limiti per ogni punto di frontiera del dominio; se il punto di frontiera è interno al dominio* (cioè se è compreso) *potremo anziché calcolare il limite, calcolare il valore assunto dalla funzione.*

- **Se nel dominio compare** $-\infty$ **o** $+\infty$ o entrambi, calcoleremo i limiti per $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$ o entrambi; **ricordiamo** che ∞ non è un numero né si comporta come tale; intuitivamente significa andare a sostituire alla funzione f(x) valori sempre più grandi (in valore assoluto) alla x e vedere cosa accade all'immagine. Cosa può accadere?
  - $\lim_{x\to(\pm)\infty} f(x) = (\pm)\infty$ (indichiamo tra parentesi $\pm$ per dire che può accadere o una o l'altra cosa, ma non entrambe contemporaneamente!!). In questo caso le immagini della funzione aumentano, in valore assoluto, all'aumentare dei valori di x (ovvero superano qualsiasi retta y=M che io posso disegnare)
  - $\lim_{x\to(\pm)\infty} f(x) = l$; ovvero all'aumentare, in valore assoluto, della x, la funzione tende ad un valore *l* (**che però non raggiungerà!**). In questo caso parleremo di **asintoto orizzontale** e l'**equazione** dell'**asintoto** risulterà esser y=l.

    Osserviamo che:

    1) y=l è asintoto se, al tendere di x a $(\pm)\infty$, le distanze tra le f(x) e *l* diminuiscono ma non si annullano mai.
    2) Può accadere però che per un certo $x = x_0$; $f(x_0) = l$. Questo non è in contrasto con il fatto che y=l è asintoto poiché **essere asintoto orizzontale** è una proprietà che vale per $x \to (\pm)\infty$ e non per valori "finiti" di x.
    3) Possono esserci due asintoti orizzontali uno per $x \to -\infty$ ed uno per $x \to +\infty$
  - $\lim_{x\to(\pm)\infty} f(x) =$ non esiste. In tal caso non potremo dire niente sulla funzione f(x) per x che tende $(\pm)\infty$ a meno che, con ulteriori considerazioni, non possiamo concludere che oscilla.
- **Se nel dominio compare un intervallo aperto (o aperto a destra o aperto a sinistra)**: ad esempio $]x_0; x_1[\cup]x_1; x_2[\dots$

Calcoleremo il limite per x che tende a questi valori che non appartengono al dominio, ma che sono punti di accumulazione del dominio. Occorrerà distinguere:

- Se il punto, ad esempio x_0, è di accumulazione destro (o sinistro), ovvero per ogni intorno circolare di x_0 trovo punti del dominio solo a destra (o solo a sinistra), dovrò calcolare il $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o il $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$
- Se il punto, ad esempio x_1, è di accumulazione ovvero per ogni intorno circolare di x_1 trovo punti del dominio a destra e sinistra), potrò provare a calcolare il $\lim_{x \to x_1} f(x)$

Cosa può accadere? (esaminiamo l'ultimo caso e poi il destro e sinistro verrà di conseguenza)

- $\lim_{x \to x_1} f(x) = l$ con *l* finito, allora potrò affermare che *in* x_1 *la funzione* ***non è definita ma*** *è possibile* ***eliminare*** *questo problema definendo una nuova funzione, ad esempio, F(x)=*$\begin{cases} f(x) & x \neq x_1 \\ l & x = x_1 \end{cases}$ (torneremo in seguito su questo punto)
- $\lim_{x \to x_1} f(x) = (\pm)\infty$ (ricordo nuovamente o + o - non entrambi!) in tal caso la funzione all'avvicinarsi di x a x_1 assume immagini, in valore assoluto, sempre più grandi; graficamente possiamo affermare che fissata una retta y=M la f(x) la supera per valori vicini a x_1. In questo caso diremo che **la funzione** ha un **asintoto verticale** di equazione **x=**x_1.
- $\lim_{x \to x_1} f(x) = non\ esiste$. Allora dovremo **esaminare separatamente** cosa accade per $x \to {x_1}^+$ e per $x \to {x_1}^-$.
  Cosa può accadere?
  - $\lim_{x \to x_1^+} f(x) = l$ la funzione tende ad un valore *l* (ma non lo assume, ovvero non esiste $f(x_1) = l$);
  - $\lim_{x \to x_1^+} f(x) = (\pm)\infty$ diremo allora che la funzione ha un **asintoto verticale destro** di equazione **x=**x_1
  - $\lim_{x \to x_1^-} f(x)$ =non esiste, non possiamo dire niente su f(x)

Riassumendo:

- $\lim_{x \to (\pm)\infty} f(x) = l;$ la funzione ha un **asintoto orizzontale** e l'**equazione** dell'**asintoto** risulterà esser y=l.
- $\lim_{x \to x_1} f(x) = (\pm)\infty$ (ricordo nuovamente o + o - non entrambi!) **la funzione** ha un **asintoto verticale** di equazione **x=**x_1.
- $\lim_{x \to x_1^+} f(x) = (\pm)\infty$ diremo allora che la funzione ha un **asintoto verticale destro** di equazione **x=**x_1
- $\lim_{x \to x_1^-} f(x) = (\pm)\infty$ diremo allora che la funzione ha un **asintoto verticale sinistro** di equazione **x=**x_1
- $\lim_{x \to x_1} f(x) = l$ con *l* finito, *in* x_1 *la funzione* ***non è definita ma*** *è possibile* ***eliminare*** *questo problema definendo una nuova funzione, ad esempio, F(x)=*$\begin{cases} f(x) & x \neq x_1 \\ l & x = x_1 \end{cases}$
  (torneremo in seguito su questo punto)