LIMITI

$\lim_{x \to c} f(x) = l$ $\forall$ intorno V di l $\exists$ un intorno U di c tale che $f(U) \subset V$ (ovvero $f(x) \in V$ per ogni $x \in U$ eccetto al più x=c)

$\lim_{x \to c^+} f(x) = l$ $\forall$ intorno V di l $\exists$ un intorno destro U di c tale che $f(U) \subset V$ (ovvero $f(x) \in V$ per ogni $x \in U$ eccetto al più x=c)

$\lim_{x \to c^-} f(x) = l$ $\forall$ intorno V di l $\exists$ un intorno sinistro U di c tale che $f(U) \subset V$ (ovvero $f(x) \in V$ per ogni $x \in U$ eccetto al più x=c)

Abbiamo poi osservato che il limite, sia nel caso che $x \to c$ sia nel caso che $x \to c^+$ o $x \to c^-$, può:

- essere un numero finito l
- non esistere
- essere infinito, e si indica con il simbolo ∞

Nell'ultimo caso definiamo

$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ $\forall$ M>0 $\exists$ un intorno U di c tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in U$ eccetto al più x=c

$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ $\forall$ M>0 $\exists$ un intorno U di c tale che $f(x) < -M$ per ogni $x \in U$ eccetto al più x=c

Attenzione: anche in quest'ultimo caso potremo avere limiti con $x \to c^+$ o $x \to c^-$ e parleremo di intorni U destri e sinistri.

COME CALCOLARE UN LIMITE

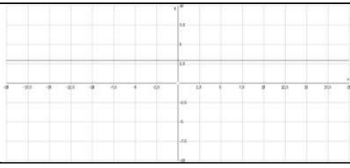
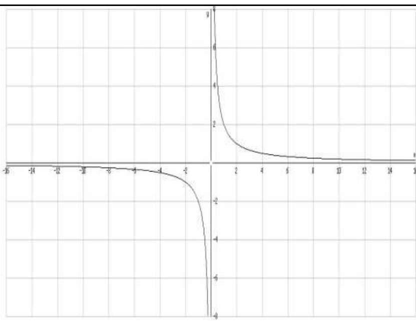
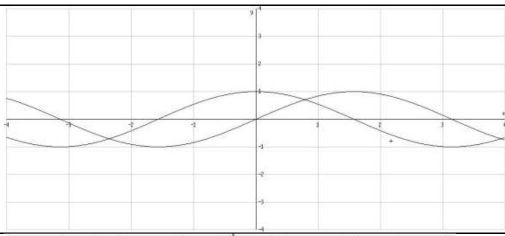
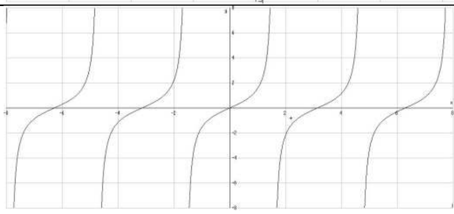
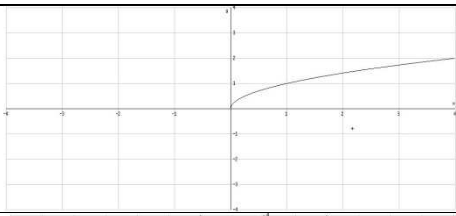
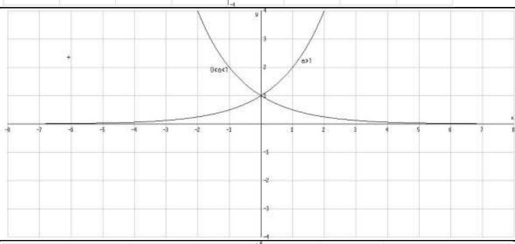
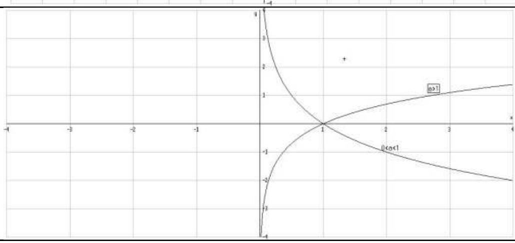
Per calcolare un limiti ci occorrono alcune informazioni:

1. limiti di funzioni elementari: che dovremo imparare e che possono essere calcolati con considerazioni sulle funzioni e la cui esattezza deve essere poi **verificata** algebricamente e/o graficamente;
2. operazioni sui limiti: in genere proposti sottoforma di teoremi, ci permettono di ricavare (quasi sempre) il limite di una funzione a partire dai limiti sulle funzioni elementari.
3. Teoremi su alcune caratteristiche del simbolo *lim* che, tra l'altro, ci permetteranno di calcolare i limiti che non riusciamo a calcolare in altri modi.

Punto 1 **LIMITI DI FUNZIONI ELEMENTARI**

Per ciascuna delle funzioni nell'elenco è possibile verificare il limite sia graficamente, sia algebricamente (quest'ultima verifica può presentare difficoltà di calcolo algebrico)

Funzione			

F(x)=k *costante*	$\lim_{x\to c} k = k$		
F(x)=x	$\lim_{x\to c} x = c$		
F(x)=$\frac{1}{x}$	$\lim_{x\to c}\frac{1}{x}=\frac{1}{c}$ se $c\neq 0$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=nonesiste$		
F(x)= sin x F(x)=cos x	$\lim_{x\to c}\sin x=\sin c$ $\lim_{x\to c}\cos x=\cos c$		
F(x)=tanx	$\lim_{x\to c}\tan x=\tan c$ se $c\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=\infty$		
F(x)=$\sqrt{x}$	$\lim_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}$ se c>0 $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$		
F(x)=a^x	$\lim_{x\to c}a^x=a^c$		
F(x)=$\log x$	$\lim_{x\to c}\log x=\log c$ se c>0 $\lim_{x\to 0^+}\log x=-\infty$		

Punto 2 OPERAZIONI CON I LIMITI

Ognuna delle affermazioni riportate può essere dimostrata (ma noi omettiamo le dimostrazioni)

Teorema Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$ **e** $\lim_{x\to c} g(x) = m$, con *l* e *m* numeri finiti, allora

1) $\lim_{x\to c} f(x) + g(x) = l + m$ ovvero $\lim_{x\to c} f(x) + g(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

2) $\lim_{x\to c} f(x) - g(x) = l - m$

3) $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$

4) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ con $m \neq 0$

Attenzione:

- $\lim_{x\to c} f(x) = l$ <u>non significa</u> che *f(c)=l* ma che al tendere di *x a c* , *f(x)* tende a *l*. Per questo motivo ad esempio $\lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x-1} =$ per il teo4= $\frac{\lim_{x\to 1} x-2}{\lim_{x\to 1} x-1} =$ il numeratore tende a –1 e il denominatore tende a 0; scrivere e leggere $= \frac{-1}{0}$ sarebbe sbagliato poiché è impossibile tale divisione. Ma al denominatore non ho 0, ma un numero molto piccolo (piccolo quanto voglio), ma diverso da zero; in questa ottica io posso fare la divisione e quello che otterrò sarà un numero molto grande. (Discuteremo poi sul segno). Dunque preferiamo, almeno inizialmente, mettere una freccia accanto al numero per dire che tende; ovvero $\frac{\lim_{x\to 1} x-2}{\lim_{x\to 1} x-1} = \frac{\to -1}{\to 0} = \infty$
- Dall'esempio appena visto possiamo dedurre che **occorrerà fare attenzione** ogni qualvolta appare nel calcolo dei limiti il valore *0* ; il segno del risultato del *limite* dovrà essere valutato con attenzione andando a considerare il limite destro (ovvero $x \to c^+$) e il limite sinistro (ovvero $x \to c^-$)
- Infine: i teoremi visti sopra valgono anche quando *l* e/o *m* non sono numeri finiti ma ∞. Ma proprio perché ∞ è un simbolo e non un numero occorre fare attenzione poiché possiamo trovarci davanti a situazioni che non *siamo in grado di determinare*. Tali situazioni le chiamiamo **forme indeterminate**. Vediamo brevemente due esempi e poi elenchiamo tali forme:
  - $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} =$ per teorema 4= $\frac{\lim_{x\to 1} x^2-1}{\lim_{x\to 1} x-1} = \frac{\to 0}{\to 0}$ *non possiamo determinare* cosa accade dividendo un numero piccolo per un altro numero piccolo (poiché non sappiamo "quanto piccoli sono"). *E' una forma indeterminata* che possiamo determinare facendo *alcuni calcoli*:

    $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$
  - $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} =$ per teorema 2= $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}$ - $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty - \infty$. Anche in questo caso *non possiamo determinare* cosa accade sottraendo da un numero grande un altro numero grande.

Questa *forma indeterminata* la risolviamo sempre con qualche calcolo: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{x^4}=\frac{\to 1}{\to 0}=+\infty$ [1]

- dagli esempi sopra possiamo intuire che avremo le seguenti **forme indeterminate.**
  - $+\infty-\infty\,[-\infty+\infty]$
  - $0\cdot\infty$; $[\infty\cdot 0]$
  - $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$
  - $0^0;\infty^0;1^\infty$

  in tutti questi casi **non potremo determinare direttamente il limite;** Ma occorreranno altre considerazioni per risolvere i limiti.

Teorema (limite della funzione composta)

Siano date due funzioni *f(x) e g(x)*; se $\lim_{x\to c} g(x)=m$ e *x=m* è punto di accumulazione del dominio di *f(x)* (ovvero *un intorno di x=m è tutto contenuto nel dominio di f(x) eccetto al più x=m)* allora vale $\lim_{x\to c} f(g(x))=f(\lim_{x\to c} g(x))$

Dal teorema sopra seguono le seguenti regole sui limiti, da applicare con attenzione.
Teorema

a) $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}=\sqrt[n]{l}$ $\qquad \lim_{x\to c}(f(x))^n=(\lim_{x\to c}(f(x))^n$

b) $\lim_{x\to c} a^{f(x)}=a^{\lim_{x\to c} f(x)}$

c) $\lim_{x\to c}\log f(x)=\log(\lim_{x\to c} f(x))$

d) $\lim_{x\to c}\sin(f(x))=\sin\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$ e così per cos e per tang

e) $\lim_{x\to c}|f(x)|=\left|\lim_{x\to c} f(x)\right|$

Limite di una funzione per x che tende a più o meno infinito

Definizione Si dice che una funzione *f(x)* **ha per limite** $+\infty$ **per x che tende a** $+\infty$ e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ quando per ogni numero reale M>0 si può determinare un numero a>0 tale che risulti $f(x)>M$ per ogni $x>a$

Definizione Si dice che una funzione *f(x)* **ha per limite** $-\infty$ **per x che tende a** $+\infty$ e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ quando per ogni numero reale M>0 si può determinare un numero a>0 tale che risulti $f(x)<-M$ per ogni $x>a$

[1] Per quanto osservato poiché lavoriamo in un intorno di *x=0* avremmo dovuto considerare il limite destro e sinistro, ma poiché tutte le *x* che compaiono nella funzione sono elevate ad esponenti pari, avremo sempre segni positivi.

Definizione Si dice che una funzione *f(x)* **ha limite finito *l* per x che tende a** $+\infty$ e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ quando per ogni intorno V di *l* si può determinare un numero a>0 tale che risulti $f(x) \in V$ per ogni $x > a$

Osservazione:

1) l'ultima definizione è molto simile alla definizione di $\lim_{x \to c} f(x) = l$
2) occorrerebbe formulare poi le definizioni anche per i limiti di x che tende a *meno infinito*. Evitiamo di impararle a memoria (e di appesantire il nostro studio); se riflettiamo possiamo capire che le definizioni saranno identiche solo che occorre cambiare la parte finale ovvero *per ogni x<-a*

COME CALCOLARE UN LIMITE PER X CHE TENDE A PIU'/MENO INFINITO

Facendo molta cautela con i segni, valgono tutte le considerazioni (teoremi compresi) che valgono per x che tende a *c* (numero finito). Occorrerà solo fare **molta attenzione** poiché spesso potranno apparire **forme indeterminate** che dovremo risolvere con alcune tecniche (trucchi) che vedremo nelle prossime pagine.