Forme indeterminate

Abbiamo detto che le espressioni

o $+\infty-\infty\,[-\infty+\infty]$
o $0\cdot\infty$; $[\infty\cdot 0]$
o $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$
o $0^0 ; \infty^0 ; 1^\infty$

Sono forme indeterminate

Alcune volte per risolvere le forme indeterminate (o per calcolare i limiti di alcune funzioni) occorrerà sfruttare proprietà delle funzioni, calcoli algebrici e ricorrere ad alcuni teoremi sui limiti (che noi non faremo, eccetto uno)

Esaminiamo alcuni casi (con particolare riferimento a funzioni polinomiali p(x), funzioni razionali fratte $\frac{p(x)}{q(x)}$ e alcune funzioni irrazionali $\sqrt{p(x)}$)

FORMA $+\infty-\infty\,[-\infty+\infty]$

- **f(x)=polinomio** esempio $\lim_{x\to+\infty} x^3-x^2=+\infty-\infty$ forma indeterminata
  mettiamo in evidenza la potenza di grado massimo
  $\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^3\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty\cdot 1=+\infty$
  Regola generale per il calcolo della soluzione: ***si raccoglie la potenza di grado massimo***
  Regola generale: $\lim_{x\to+\infty} a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=:\lim_{x\to+\infty} a_nx^n$
  $\lim_{x\to-\infty} a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=:\lim_{x\to-\infty} a_nx^n$ [1]

Intuitivamente: più che ricordare la regola pensiamo di sostituire alla *x* un valore molto grande (con segno positivo o negativo) e *vedere* cosa accade ricordando che tutti gli altri termini del polinomio non modificheranno il risultato del limite ([2])

- f(x)=$\sqrt{p(x)}-\sqrt{g(x)}$ esempio $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+1}=+\infty-\infty$ forma indeterminata
  razionalizziamo $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}(x^2-2-(x^2+1))\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}(-3)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+1}}=0$

  Regola generale per il calcolo della soluzione: ***si prova a razionalizzare***

FORMA $\frac{0}{0}$

- caso $\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}$. Esempio $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\frac{0}{0}$ forma indeterminata
  poiché numeratore e denominatore si annullano per x=2 possiamo scomporre il polinomio utilizzando il fattore (x-2) ([3]).
  $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\ \ (x-3)}=semplifichiamo=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x-3)}=-4$
  Regola generale per il calcolo della soluzione: ***si scompongono numeratore e denominatore sfruttando il fatto che c è soluzione di entrambi i polinomi***

---

[1] $\lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}-\infty & se\ n\ dispari\\ +\infty & se\ n\ pari\end{cases}$

[2] *proprio perché stiamo facendo un limite e non stiamo calcolando esattamente un valore*, pensiamo ad esempio al polinomio $x^{10}+100x^2$ e pensiamo di assegnare alla *x* un valore $=10^{10}$, ovvero 1 seguito da 10 zeri, otteniamo $10^{100}+10^{22}$, ovvero un numero costituito da 1 seguito da 87 zeri, poi 1 e poi ancora 22 zeri….Un numero molto grande e a noi poco cambia sapere se in un numero costituito da un 1 seguito da 100 zeri è sommato o tolto un numero che, in confronto, è piccolo

[3] In questo caso è semplice; altre volte dovremo usare Ruffini

- caso $\lim_{x\to c} \frac{\sqrt[m]{P(x)}}{\sqrt[n]{Q(x)}}$

  Regola generale per il calcolo della soluzione: analogamente a sopra *si scompongono numeratore e denominatore sfruttando il fatto che c è soluzione di entrambi i polinomi*

FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

- caso $\lim_{x\to(\pm)\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(\pm)\infty}{(\pm)\infty}$ forma indeterminata (attenzione: abbiamo indicato $(\pm)\infty$ solo per brevità, a significare o +∞ o -∞ ma non entrambi!)

  Esempio: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4}{x^2-5x+6} = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminata. Si procede raccogliendo al numeratore e al denominatore la potenza di grado massimo

  $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1-\frac{4}{x^3})}{x^2(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(1-\frac{4}{x^3})}{(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} x \cdot 1 = \infty$

  Regola generale per il calcolo della soluzione: ***si raccoglie la potenza di grado massimo al numeratore e al denominatore, si semplificano e si procede con il calcolo del limite***

  Regola generale: $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0} = \begin{cases} \infty & se\ n > m \\ 0 & se\ n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & se\ n = m \end{cases}$

  Attenzione: ***per determinare il segno dell'∞ occorrerà o considerare il segno della funzione, oppure ragionare immaginando di sostituire nel limite iniziale alla x valori grandi e vedere cosa accade in termini di segno***

  Ad esempio $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4}{x^2-5x+6}$ possiamo procedere come sopra o sfruttare la regola generale e otteniamo $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4}{x^2-5x+6} = \infty$, poi *immaginiamo* di sostituire un valore grande e negativo: al numeratore, essendo una potenza dispari, otteniamo un numero negativo, al denominatore essendo una potenza pari, otteniamo un positivo. Dunque -/+ =- e il risultato sarà $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4}{x^2-5x+6} = -\infty$

Limiti notevoli
Esaminiamo ora altri limiti che conducono a forme indeterminate. Tali limiti vengono dimostrati con considerazioni di varia natura (algebriche, geometriche,…) sulle quali ci soffermeremo solo in rari casi.
Questi limiti vengono detti **notevoli** poiché (una volta dimostrato il loro risultato) vengono utilizzati nel calcolo di numerosi altri limiti.

Tabella riassuntiva dei limiti notevoli

esponenziali e logaritmici

goniometrici

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx}=e^{na}$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\frac{1}{e}$

6) $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^{a}$

7) $\lim_{x\to0}\lg_{a}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\lg_{e}a}$

8) $\lim_{x\to0}\frac{\lg_{a}(1+x)}{x}=\lg_{a}e=\frac{1}{\ln a}$

9) $\lim_{x\to0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$

10) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x}=a$

11) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{a}-1}{ax}=1$

12) $\lim_{x\to0}x^{r}\lg_{a}x=0\quad\forall a\in R^{+}-\{1\},\forall r\in R^{+}$

13) $\lim_{x\to0}\frac{\lg_{a}x}{x^{r}}=0\quad\forall a\in R^{+}-\{1\},\forall r\in R^{+}$

14) $\lim_{x\to+\infty}x^{r}a^{x}=\lim_{x\to+\infty}a^{x}\qquad\forall a\in R^{+}-\{1\},\forall r\in R^{+}$

15) $\lim_{x\to-\infty}|x|^{r}a^{x}=\lim_{x\to-\infty}a^{x}\quad\forall a\in R^{+}-\{1\},\forall r\in R^{+}$

16) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{r}}=\lim_{x\to+\infty}a^{x}\qquad\forall r\in R^{+}$

17) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{r}}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}a^{x}\qquad\forall r\in R^{+}$

18) $\lim_{x\to-\infty}e^{x}x^{r}=0\qquad\forall r\in R^{+}$

1) $\lim_{x\to0}\frac{sen\ x}{x}=1$

2) $\lim_{x\to0}\frac{sen\ ax}{bx}=\frac{a}{b}$

3) $\lim_{x\to0}\frac{tg\ x}{x}=1$

4) $\lim_{x\to0}\frac{tg\ ax}{bx}=\frac{a}{b}$

5) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

6) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\frac{1}{2}$

7) $\lim_{x\to0}\frac{arcsen\ x}{x}=1$

8) $\lim_{x\to0}\frac{arcsen\ ax}{bx}=\frac{a}{b}$

9) $\lim_{x\to0}\frac{arctg\ x}{x}=1$

10) $\lim_{x\to0}\frac{arctg\ ax}{bx}=\frac{a}{b}$

11) $\lim_{x\to0}\frac{senh\ x}{x}=1$

12) $\lim_{x\to0}\frac{settsenh\ x}{x}=1$

13) $\lim_{x\to0}\frac{tgh\ x}{x}=1$

14) $\lim_{x\to0}\frac{settgh\ x}{x}=1$

15) $\lim_{x\to0}\frac{x-sen\ x}{x^{3}}=\frac{1}{6}$

16) $\lim_{x\to0}\frac{x-arctg\ x}{x^{3}}=\frac{1}{3}$