Actividad 4: Lectura Capítulo 1

Fecha de inicio	Fecha de Cierre
22/AGO/13 00:00	21/SEP/13 23:55

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita son de la forma ax + b = c, siendo a, b y c las constantes y x la variable. El valor de *a* puede ser entero, racional o real, pero nunca cero. Ejemplos de este tipo de ecuaciones: 3x - 5 = 0 que corresponde a una ecuación de coeficiente entero y expresión entera.

$\frac{1}{3}x - \frac{2}{5} = 0$, ecuación de coeficiente racional y expresión entera.

$\frac{3x-2}{5} = 8$, ecuación de coeficiente entero y expresión racional.

Las ecuaciones de primer grado se caracterizan porque a incógnita (variable) tiene como exponente la unidad; por lo cual, la solución es única, esto quiere decir que éste tipo de ecuaciones tienen "Una Sola solución".

Resolución: Las ecuaciones de primer grado con una incógnita, se pueden resolver por diversos métodos, se analizarán algunos, siendo el método axiomático el más recomendado.

MÉTODO EGIPCIO: Conocido también como la Regula Falsa. En algunos libros egipcios y chinos, se ha encontrado un método para resolver ecuaciones llamado Regula Falsa o Falsa Posición. El método consiste que a partir de la ecuación dada, se propone una solución tentativa inicial, la cual se va ajustando hasta obtener la solución más aproximada.

El principio es que dada la ecuación, $ax = b$ suponemos una solución tentativa x_o, reemplazando en la ecuación así: $ax_o = b$, como no se cumple esta solución, se hace un ajuste de la siguiente manera: $x_1 = \frac{b}{b_o} x_o$ la cual es una solución de la ecuación original, ya que: $a\left[\frac{b}{b_o} x_o\right] = b$ Siendo b_o el valor obtenido para x_0

MÉTODO AXIOMÁTICO: Es el método más utilizado en la actualizad, el cual utiliza las propiedades algebraicas y las leyes de uniformidad, todo esto derivado de los axiomas de cuerpo. Aclaremos que los axiomas epistemológicamente son "Verdades Evidentes" y a partir de éstas, se desarrolla todo el conocimiento. Algunos axiomas que son importantes para comprender la solución de ecuaciones.

Axiomas de Cuerpo: Sean *x, y, z*, valores definidos, dentro del conjunto de los Reales

Primer Axioma: x + y = y + x (Propiedad conmutativa)

Segundo Axioma: x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z) (Propiedad Asociativa)

Tercer Axioma: x (y + z) = x*y + x*z (Propiedad Distributiva)

Cuarto Axioma: x + 0 = x y x*1 = x (Propiedad Modulativa de la suma y producto)

Quinto Axioma: x + y = 0, y + x = 0 (Propiedad del inverso. Todo número real tiene un Inverso, excepto el cero). Para*x*, su inverso es puede escribir -*x,* igual para y.

Sexto Axioma: x*y = 1, y*x = 1 Para x ≠ 0. (Propiedad del recíproco, todo número real tiene un recíproco). Para *x*, su recíproco se puede escribir $x^{-1} = 1/x$, igual para y.

NOTA: El símbolo * indica multiplicación.

Con los argumentos anteriores, se puede comenzar el análisis del desarrollo de ecuaciones. Toda ecuación de primer grado con una incógnita se puede escribir de la forma, ax + b = c donde a, b, y c son constantes y además a ≠ 0.

Ecuaciones de primer grado con dos y tres incognitas

Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son una herramienta muy importante para resolver problemas que se presentan en todas las áreas del saber.En este apartado se analizarán dos casos. El primero es donde se tiene una ecuación con dos incógnitas y el segundo es cuando se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas.

PRIMER CASO: **Una Ecuación Con Dos Incógnitas**:

ECUACIONES DIOFÁNTICAS: Diofanto de Alejandría, del siglo III de nuestra era, desarrolló unas ecuaciones que trabajan sobre el *conjunto de los enteros* y son de primer grado con dos incógnitas. En honor a su nombre se les conoce como Ecuaciones Diofánticas.

La forma general de estas ecuaciones es ax + by = c, donde a, b, c son constantes y pertenecen al conjunto de los enteros; además, a ≠ 0 ó b ≠ 0. Cuando *a, b* y *c* son enteros positivos, la ecuación tiene solución entera si y, solo si, el máximo común divisor de a y b, divide a c. Este tipo de ecuaciones puede tener soluciones infinitas o no puede tener solución. Entonces la solución consiste en hallar ecuaciones generadoras (paramétrica) del par (x, y) que satisfagan la ecuación propuesta.

Solución General de Ecuaciones diofánticas:

Para resolver este tipo de ecuaciones, vamos a analizar dos procedimientos.

1. ***Método paramétrico:*** El principio es buscar ecuaciones para *x* al igual que para *y,* por medio de un parámetro, que generalmente se designa con ***t*,** así se obtiene dos ecuaciones,

x = a + bt

y = c + dt

Llamadas *solución general*, ésta se denomina así porque satisface para cualquier par (x, y). A partir de esta se pueden obtener *soluciones particulares*; es decir, para un valor t = k

El procedimiento para obtener la solución general no es tarea fácil, la intención es que se pueda a partir de la solución general, obtener soluciones particulares. Los curiosos pueden investigar en libros de Matemáticas Discretas ó en fuentes donde se trabaje las ecuaciones diofánticas.

2. ***Método Despeje:*** El método consiste en hallar la solución general, despejando una de las incógnitas y dejando la otra como parámetro; es decir, si despejamos *x*; *y* sería el parámetro y si despejamos *y*, entonces *x* sería el parámetro.

Para la ecuación: ax + by = c. Se pueden obtener dos ecuaciones particulares.

$x = \frac{c - by}{a}$. Dando valores a y, se obtiene el valor de x.

$y = \frac{c - ax}{b}$. Dando valores a x, se obtiene le valor de y.

SEGUNDO CASO: **Dos Ecuaciónes Con Dos Incógnitas**.

Cuando se tiene un sistema de la forma:

$$\begin{array}{ccccc} a_1x_1 & + & b_1y_1 & = & c_1 \\ a_2x_2 & + & b_2y_2 & = & c_2 \end{array}$$

Donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 son constantes; además $a_1 \neq 0$ ó $b_1 \neq 0$ Al igual que $a_2 \neq 0$ ó $b_2 \neq 0$

Se dice que estamos frente a un sistema de ecuaciones simultáneas, donde la solución obtenida para *x* e *y*, debe satisfacer simultáneamente las dos ecuaciones. Por consiguiente, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es hallar un par (x, y) tal que al reemplazarlo en cualquiera de las dos ecuaciones, la igualdad se cumpla.

Sistema Consistente: Un sistema de ecuaciones es consistente, cuando tiene al menos una solución para cada incógnita.

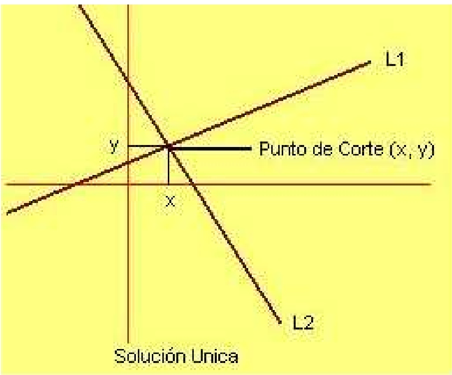
Sistema Inconsistente: ocurre cuando el sistema NO tiene solución alguna.

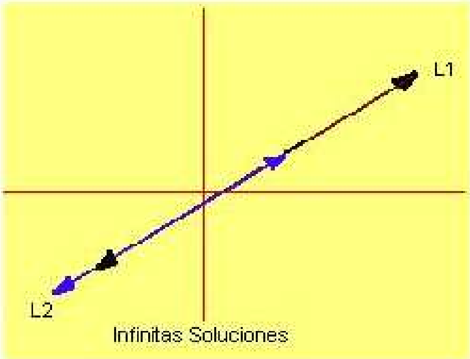
Es obvio que el trabajo es analizar sistemas consistentes.

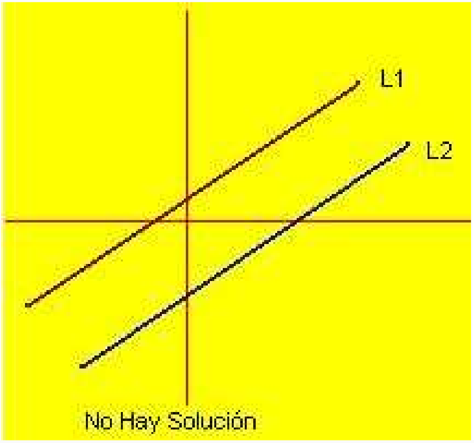
Existen diversos métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, en este caso vamos a analizar tres.

1. METODO GRAFICO.

El método se basa en que en el plano de coordenadas rectangulares, una ecuación de la forma *ax +by = c*, esta representada por una recta cuyos puntos son parejas ordenadas de números reales, donde la primera componente corresponde a *x* y la segunda componente a *y*. Como se tiene dos ecuaciones, entonces se deben tener graficadas dos rectas. De esta manera se pueden tener tres situaciones: *Primero*, que las rectas se corten en un punto, lo que indica que la solución es única y será el punto de corte. *Segundo*, que las dos rectas coincidan, luego hay infinitas soluciones. *Tercero*, que las rectas sean paralelas, lo que indica es que NO hay solución.







L_1 y L_2, corresponden a las ecuaciones uno y dos del sistema.

El método es adecuado cuando hay soluciones enteras, ya que los puntos de corte son bien definidos. El procedimiento básico consisten en despejar *y* en las dos ecuaciones y, darle valores a *x* para obtener parejas (x, y), como se realizo en las ecuaciones diofánticas, de tal manera que con dos parejas, que corresponde a dos puntos en el plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se puede graficar una recta (Axioma Euclidiano).

2. MÉTODO POR ELIMINACIÓN.

Es un método algebraico, cuyo principio es eliminar una incógnita, para obtener el valor de la otra, posteriormente con el valor obtenido, se busca el valor de la primera.

Este método se puede desarrollar por tres técnicas, a continuación analizamos cada una.

REDUCCIÓN: Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la técnica consiste en igualar coeficientes de una de las dos incógnitas y que presenten signos contrarios, así se puede eliminar dicha incógnita, obteniendo una ecuación con una incógnita, cuya resolución ya hemos estudiado. Con el valor de la incógnita obtenida, se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones, para obtener el valor de la otra incógnita.

IGUALACIÓN: Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la técnica consiste en despajar en las dos ecuaciones la misma incógnita, quedando el sistema en términos de la otra, seguido se igualan las expresiones obtenidas. En dichas expresiones, a través de procesos matemáticos se busca el valor de la incógnita presente, el cual; como en el caso de la reducción, se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales para hallar el valor de la otra incógnita.

SUSTITUCIÓN: Para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación. Dicho de otra manera, si despejamos la incógnita *x* en la primera ecuación, se debe sustituir en la segunda ecuación ó viceversa, igual si fuera la otra incógnita.

3. MÉTODO POR DETERMINANTES

Determinante: Un determinante es un arreglo rectangular de filas y columnas, donde los elementos de éste son los coeficientes de las ecuaciones que conforman el sistema.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Las filas son: (a_1 b_1) y (a_2 b_2)

Las columnas: (a_1 a_2) y (b_1 b_2)

El tamaño del determinante lo da el número de filas y de columnas. Así pueden haber determinantes de 2x2, 3x3, 4x4, etc.

Resolver un determinante es hallar el valor del mismo, para el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, se requiere trabajar con determinantes de 2x2.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 * b_2 - a_2 * b_1$$

Donde **D** es el valor del determinante.

Ecuaciones por Determinante

Para resolver dos ecuaciones con dos incógnitas, **KRAMER** propuso una técnica que podemos resumir así:

Sea el sistema:

$$\begin{matrix} a_1x_1 & + & b_1y_1 & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y_2 & = & c_2 \end{matrix}$$

Se despeja cada incógnita de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

El determinante del denominador, se le llama *determinante de coeficientes*, que es común para todas las incógnitas.
La solución será el cociente de los dos determinantes, para cada incógnita.

Solución: $x = \dfrac{c_1 * b_2 - c_2 * b_1}{a_1 * b_2 - a_2 * b_1}$ $\quad y = \dfrac{a_1 * c_2 - a_2 * c_1}{a_1 * b_2 - a_2 * b_1}$

Ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

Con los conocimientos adquiridos en el apartado anterior, será más sencillo abordar el que sigue, ya que los principios son similares, solo que para este caso se trata de más ecuaciones y más incógnitas. Para los sistemas de éste tipo, se van a analizar dos métodos.

PRIMER MÉTODO: **SOLUCIÓN POR ELIMINACIÓN.**

Cuando se tiene un sistema de la forma:

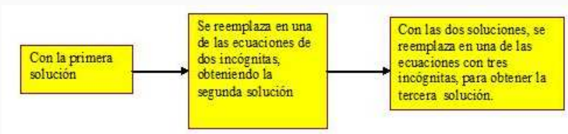
$$\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}$$

Donde a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 son constantes.
Se dice que estamos frente a un sistema de ecuaciones simultáneas, donde la solución obtenida para *x, y*, *z* debe satisfacer simultáneamente las tres ecuaciones. Por consiguiente, resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, es hallar valores específicos para (x, y, z) tal que al reemplazarlo en cualquiera de las tres ecuaciones, la igualdad se cumpla.

Un esquema sencillo que nos ayuda a comprender el método.

Primero:

Segundo:



La mejor forma de comprender el método es con ejemplos modelos.

SEGUNDO MÉTODO: **SOLUCIÓN POR DETERMINANTES.**

Cuando se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se presentan determinantes de 3x3, conocidos como determinantes de tercer orden. Esto nos induce a analizar dichos determinantes, antes de su respectiva aplicación.

Determinantes de tercer orden: Son arreglos de 3 filas y 3 columnas.

$$A=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Para resolver un determinante de tercer orden hay tres formas diferentes, veamos:

1. *Productos Cruzados*: Se puede ver esquemáticamente el procedimiento.

Sea el determinante:

$$A=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Solución

$$A=[a]-[b]$$

Donde:

$$a=(x_1y_2z_3)+(y_1z_2x_3)+(x_2y_3z_1)$$

$$b=(x_3y_2z_1)+(x_2y_1z_3)+(y_3z_2x_1)$$

2. *Método de Sarrus*: Consiste en aumentar las dos primeras filas a continuación del determinante original y hacer productos cruzados. Para el determinante A definido anteriormente, el nuevo determinante, propuesto por sarrus es:

$$A'=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Solución del determinante:

$$A'=[\alpha]-[\beta]$$

Solución del determinante:

$$\alpha=(x_1y_2z_3)+(x_2y_3z_1)+(x_3y_1z_2)$$
$$\beta=(x_3y_2z_1)+(x_1y_3z_2)+(x_2y_1z_3)$$

3. *Método de Cofactor*: La siguiente ilustración explica el procedimiento.

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

La última parte se resuelve como determinante de 2x2:

$$A = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - y_1(x_2 z_3 - x_3 z_2) + z_1(x_2 z_3 - x_3 y_2)$$

Solución de Ecuaciones por Determinantes: Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por determinantes, ***KRAMER***, propuso una metodología que ilustramos a continuación.
Sea el sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 x & + & b_1 y & + & c_1 z & = & d_1 \\ a_2 x & + & b_2 y & + & c_2 z & = & d_2 \\ a_3 x & + & b_3 y & + & c_3 z & = & d_3 \end{array}$$

Primero se calcula el determinante de coeficientes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Aclarando que $\Delta \neq 0$

En seguida se calculan los determinantes para cada incógnita.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Finalmente la solución para cada incógnita

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Ecuación general de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado han sido motivadas desde tiempos inmemorables, inicialmente la necesidad de resolver problemas de área y volumen, condujeron a manipular ecuaciones de este tipo. Como los números negativos se formalizaron tarde en la historia de las Matemáticas, en sus inicios el manejo de las ecuaciones de segundo grado fue con números positivos.

Se reconocen 5 tipos de ecuaciones de segundo grado.

$x^2 = bx$, $x^2 = c$, $x^2 + c = bx$, $x^2 = bx + c$, $x^2 + bx = c$

La ecuación de tipo $x^2 = bx$, tiene una única solución $x = b$, ya que no se acepta a cero como solución.

La ecuación $x^2 = c$ equivale a hallar la raíz cuadrada de un número, para lo cual existen diversos métodos, como el de tanteo, el de Heron y el de Euclides.

METODO DE HERON: Heron de Alejandría en el siglo I, propuso una forma de hallar la raíz cuadrada de n número positivo así: Si se tiene por ejemplo $x^2 = 2$, se parte de una solución supuesta, por ejemplo 3/2, para hallar una nueva aproximación se aplica la siguiente regla.

$$\frac{3/2+\frac{2/3}{2}}{2}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}$$

La siguiente aproximación:

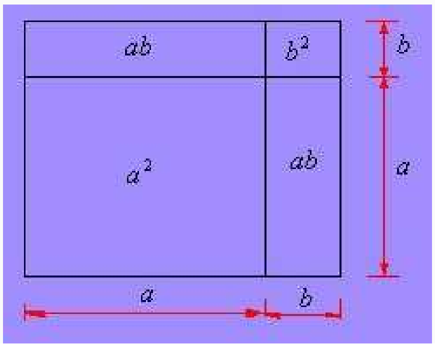
$$\frac{17/12+\frac{12/17}{2}}{2}=\frac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2}=\frac{577}{408}\cong 1{,}41422156862\_$$

Este valor es una buena aproximación a $\sqrt{2}$

El método se repite tantas veces como se requiera una buena aproximación.

MÉTODO EUCLIDES: El colapso de la Aritmética pitagórica provoco una crisis que motivo a los griegos para dar más esfuerzo a la Geometría. Las cantidades fijas (constantes) las representaban con segmentos de recta con longitud relativa a una unidad fija. El producto de dos cantidades lo representaban como el área de un rectángulo y el producto de tres cantidades como el volumen de un prisma rectangular recto. De aquí el origen de la denominación de cuadrado y cubo para las potencias de dos y tres.

A manera de ejemplo.



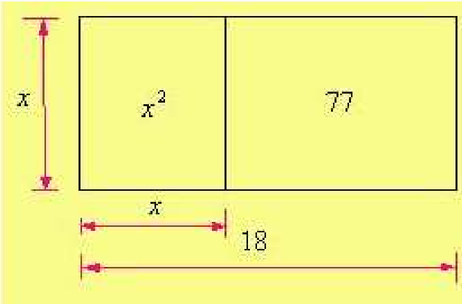
La gráfica representa la expresión muy conocida.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

La ecuación de tipo $x^2 + c = bx$, fue resuelta geométricamente por los griegos y aritméticamente por los babilonios.

MÉTODO GRIEGO: Inicialmente los griegos y posteriormente los Árabes utilizaron un método geométrico para resolver éste tipo de ecuaciones.

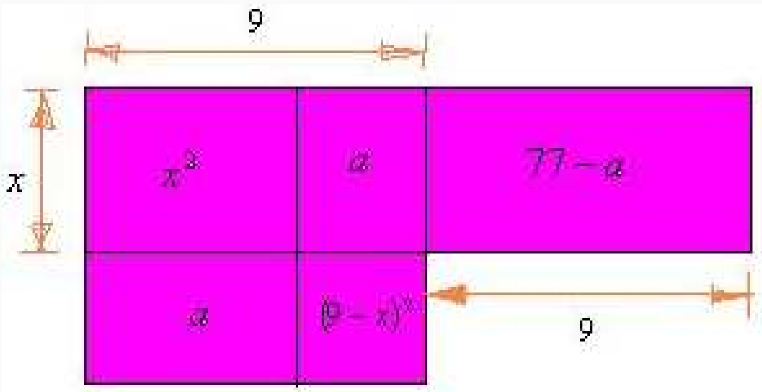
Por ejemplo. Se a la ecuación $x^2 + 77 = 18x$



En la grafica se observa que la suma de las áreas es igual al área total del rectángulo.

Para encontrar el valor de x, se debe completar un cuadrado de lado 9 que incluya el cuadrado de lado x.

El cuadrado lo componen dos rectángulos de igual área y por los cuadrados de área x^2 y $(9 - x)^2$



De la gráfica se infiere:

$$x^2 + a = 77 - a \Rightarrow (x^2 + a) + a = 77$$

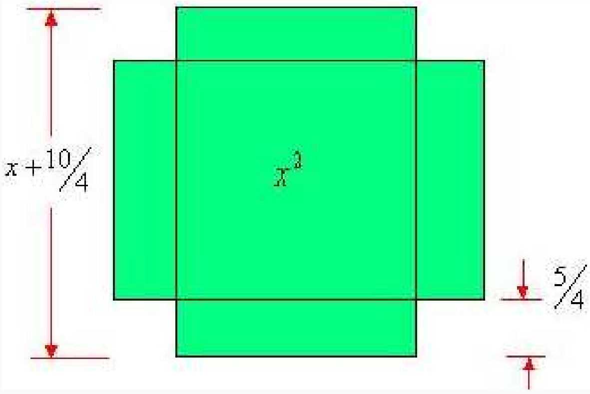
También por medio de la gráfica:

$$(9-x)^2 + 77 = (9$$

Resolviendo: x = 7

MÉTODO ARABE: Para el tipo de ecuación propuesta, los árabes utilizaron áreas de cuadrados y de rectángulos. Por ejemplo $x^2 + 5x = 36$

Para resolver esta ecuación, Al-Khowarizmi, dibujo un cuadrado de área x^2 y sobre cada lado dibujo 4 rectángulos de dimensiones x y 5/4, la figura tendrá de área 36



El lado del cuadrado es evidentemente x + 10/4

El área 36 + 25/4, luego el lado del cuadrado debe ser: x + 10/4 = 13/2

Por consiguiente x = 4.

Es pertinente que se analice detenidamente esta metodología, es muy interesante.

Hasta aquí se ha trabajado métodos con fundamentos geométricos para valores positivos de la incógnita, pero en muchos casos sabemos que las soluciones involucran valores negativos en ecuaciones de segundo grado.

La resolución de ecuaciones de segundo grado donde se presentan coeficientes negativos fueron trabajados inicialmente por Carlyle (1.775-1.881) y Von Staudt (1.798-1.867), Ambos se basaron en principios geométricos, utilizando círculos; dichos métodos son muy largos, por lo cual no se detallan, pero se consideró pertinente hacer la referencia a estos inquietos de las Matemáticas.En general se ha visto que los métodos utilizados por las civilizaciones antiguas son eminentemente geométricos, en la edad media y posteriormente la matemática ha desarrollado metodologías para el trabajo con ecuaciones que son más dinámicas y con principios matemáticos bien fundamentados.

MÉTODO AXIOMÁTICO: Es el método más utilizado; por no decir que el único, en la actualidad, se soporta en los axiomas, propiedades y definiciones, establecidos a través de toda la historia de las matemáticas.

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c constantes y a ≠ 0. Este tipo de ecuaciones se puede resolver de las siguientes maneras:

1. **FACTORIZACIÓN:**

Se sabe que toda ecuación de segundo grado se puede expresar como producto de dos factores.

$$ax^2 + bx + c = (x+\delta)(x+\beta) = 0$$

A los factores obtenidos se les aplica la "Regla del Producto Nulo" la cual dice:

Si $$(x+\delta)(x+\beta) = 0 \Rightarrow\Rightarrow (x+\delta) = 0, v, (x+\beta) = 0$$

De esta manera se puede despejar la incógnita y obtener las soluciones respectivas. Se debe aclarar que las ecuación de tipo $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos soluciones, las cuales pueden ser: Reales iguales, Reales diferentes ó Imaginarias.

2. **FÓRMULA CUADRÁTICA**: En muchas ocasiones el trinomio propuesto en la ecuación no se puede resolver directamente por factorización o extracción de raíz, entonces lo que se hace para resolver la ecuación propuesta es utilizar la fórmula cuadrática, es un camino más rápido para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sea la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b, c, reales y a ≠ 0.

La solución para la incógnita es:

Demostración:

Para demostrar la fórmula cuadrática, aplicamos el principio de completar cuadrados. Veamos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = -c$$

Se debe hacer que el coeficiente de la incógnita al cuadrado sea uno, para esto se divide todo por a.

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Se completa cuadrados en la parte izquierda de la ecuación

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se le extrae raíz cuadrado al la última ecuación.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Desarrollando la raíz del denominador y operando las dos fracciones:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las soluciones por medio de la fórmula cuadrática serán:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se le conoce como el discriminarte, debido a que su signo indica el tipo de solución obtenida.

Si $\Delta > 0$: Hay dos soluciones reales diferentes.

Si $\Delta = 0$: Hay dos soluciones reales iguales

Si $\Delta <$: Hay dos soluciones imaginarias

Ecuaciones polinomicas

Las ecuaciones que presenten un grado mayor o igual a tres, se les llama polinómicas, se han estudiado por separado las ecuaciones de primero, segundo y tercer grado, ahora se pretende hacer un análisis general a las ecuaciones polinómicas.

Una ecuación de la forma $ax^n + bx^{n-1} + ... + k = 0$con $a \neq 0$ y n entero positivo, se le conoce como ecuación Polinómica.

Haciendo algo de historia, en la resolución de ecuaciones, los Babilonios formularon problemas que condujeron a ecuaciones de cuarto grado, donde la incógnita era un cuadrado, por lo que se les llamaron ecuaciones bicuadradas. Ferrari desarrolló el método de solución de ecuaciones de cuarto grado, lo que fue publicado en *Ars Magna de Cardano*. En trabajos encontrados de Cardano, Tartaglia y Ferrari, se detecto que deseaban establecer un forma general para resolver ecuaciones de cuarto grado.

La metodología actual propone para resolver ecuaciones de cuarto grado, buscar los factores lineales por división sintética, como se hizo para las deterger grado.

Respecto a las ecuaciones de quinto grado, el gran famoso matemático noruego ***Niels HenrikAbelEvariste Galois***, dedujo bajo que condiciones una ecuación se puede resolver por radicales. Galois desarrollo la teoría de grupos para analizar métodos generales de solución de ecuaciones, basado únicamente en las operaciones fundamentales y extracción de raíces, llegando a la demostración de que NO hay un método general para resolver ecuaciones de quinto grado o mayor. demostró que no es posible resolver ecuaciones de quinto grado por medio de un número finito de operaciones algebraicas, allá por los años 1.824 Para fortalecer esta teoría un prestigioso matemático de tan solo 20 años de edad y de nacionalidad francesa

Los avances en los inicios de la edad moderna dieron buenos resultados y a partir de allí, se establecieron ciertas consideraciones para el desarrollo de ecuaciones polinómicas.

REGLA DE SIGNOS DE DESCARTES:

El Matemático francés René Descartes, padre de la Geometría Analítica, en 1.636 propone una técnica para identificar el número de soluciones reales positiva y negativas para un polinomio de grado n, con $n \in Z^+$. El teorema cuya prueba esta fuera del alcance de este curso dice:

TEOREMA: Sea P(x) un polinomio con coeficientes reales cuyo término independiente es diferente de cero, tendrá un número de soluciones reales positivas de P(x) = 0, igual al número de variaciones de signo en P(x) ó es menor que el número de variaciones en cantidad par. El número de variaciones negativas de la ecuación P(x), es igual al número de variaciones de signo en P(-x) = 0, ó es menor que el número de variaciones en cantidad par.

En resumen, el teorema permite saber cuántas soluciones reales positivas y negativas tiene el polinomio, basado en la variación de signos. Algunos ejemplos nos ilustran la aplicación del teorema.

Ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales son de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

Donde P(x) y Q(x) son polinomios y Q(x) ≠ 0.

En los casos de ecuaciones racionales, se pueden presentar dos caso:

-) El grado de P(x) ≤ Que el grado de Q(x)

-) El grado de P(X) > Que el grado de Q(x)

Resolver ecuaciones de este tipo, sigue los principios matemáticos aplicados a los aplicados para fracciones, principalmente fracciones equivalentes.

Ecuaciones con radicales

$$\boxed{\sqrt{ax^2 + bx} + c = 0}$$

Cuando se tiene ecuaciones con radicales, el primer paso es buscar la forma de reducir el radical por medio de operaciones opuestas y obtener una ecuación cuadrática, siempre y cuando el índice de la raíz sea par. Aquí se va a analizar fundamentalmente las raíces cuadradas, pero se puede hacer extensivo a otros índices.