Liceo "Regina Elena" - Acireale

Progetto PON C-1-FSE-2013-2006

Studio della complessità del mondo che ci circonda

Dinamica dei sistemi, spazio delle fasi, caos deterministico, frattali

Prof. Salvatore Lizzio

Dinamica dei sistemi complessi

- Lo stato del sistema = valori assunti dalle variabili di stato in un determinato momento.

- Le variabili di stato = grandezze misurabili (es. numero individui, prezzi, capitale, produttività, massa, energia, spazio, velocità, ecc.)

Dinamica dei sistemi complessi

Elevata complessità
del sistema

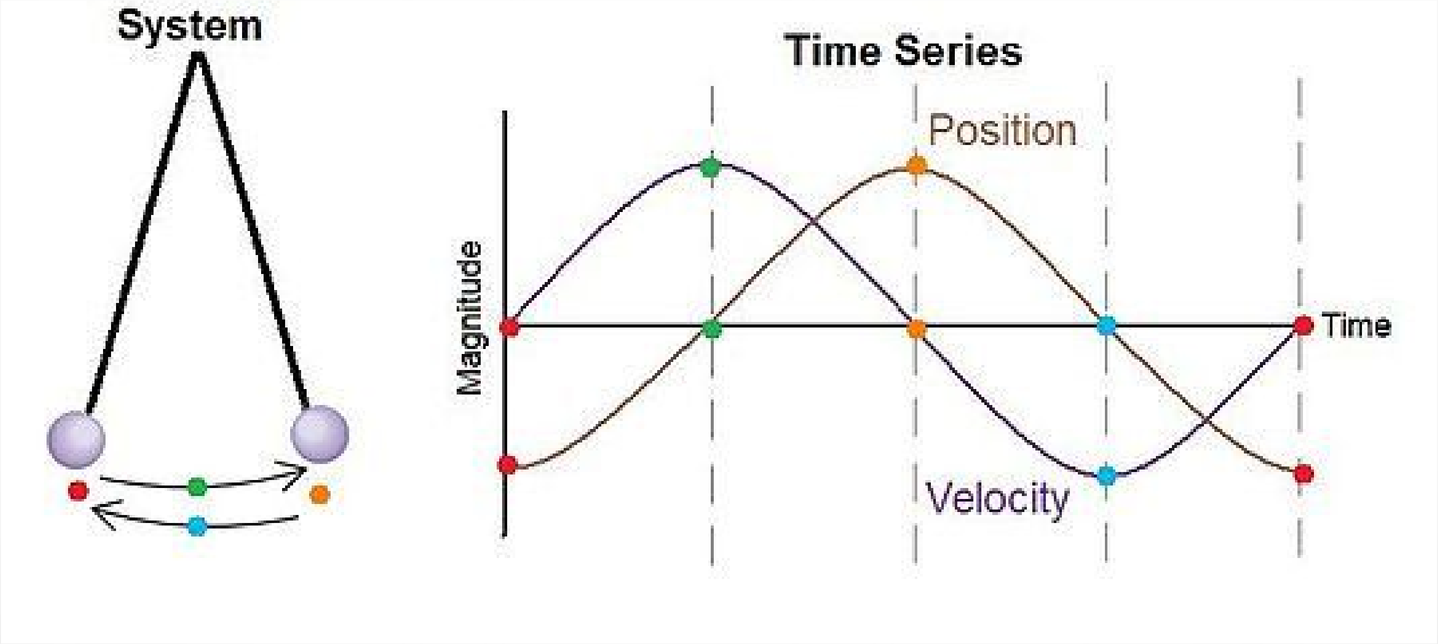
Elevato numero
variabili di stato

Scelta delle variabili per
descrivere il sistema

Costruzione
del modello

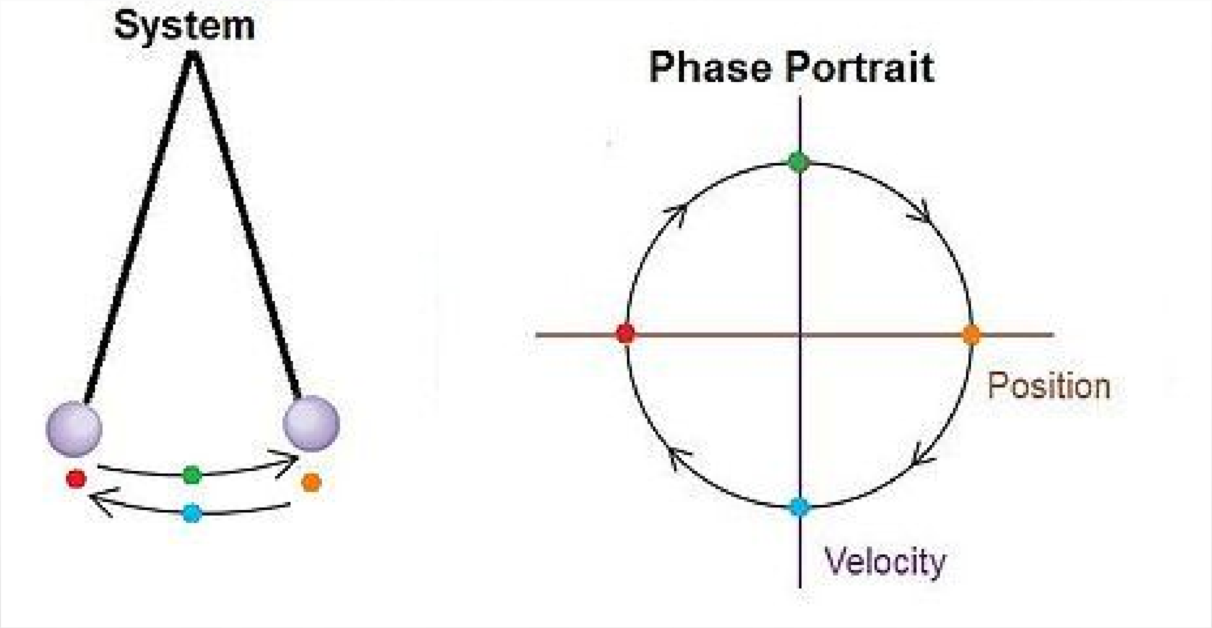
Dinamica dei sistemi complessi

- Variazione temporale di due varabili di stato di un sistema (es. pendolo semplice)



Spazio delle fasi o degli stati

- Per un sistema con *N* variabili di stato, lo spazio delle fasi è uno spazio matematico astratto a *N* dimensioni, in cui ogni asse rappresenta una variabile di stato.



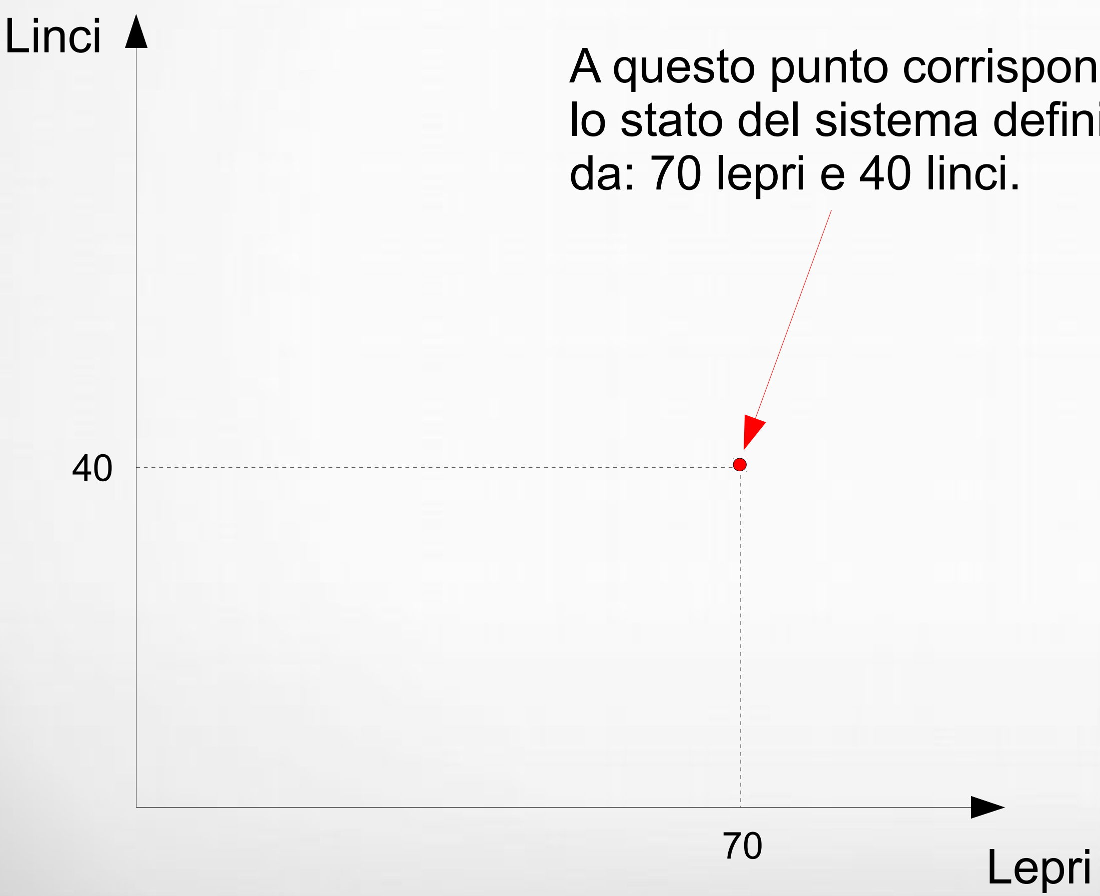
Spazio delle fasi

- Consideriamo un sistema definito da 2 variabili di stato, ad esempio numero di linci e numero di lepri.

- Lo spazio degli stati in questo caso è uno spazio a 2 dimensioni, cioè un piano.

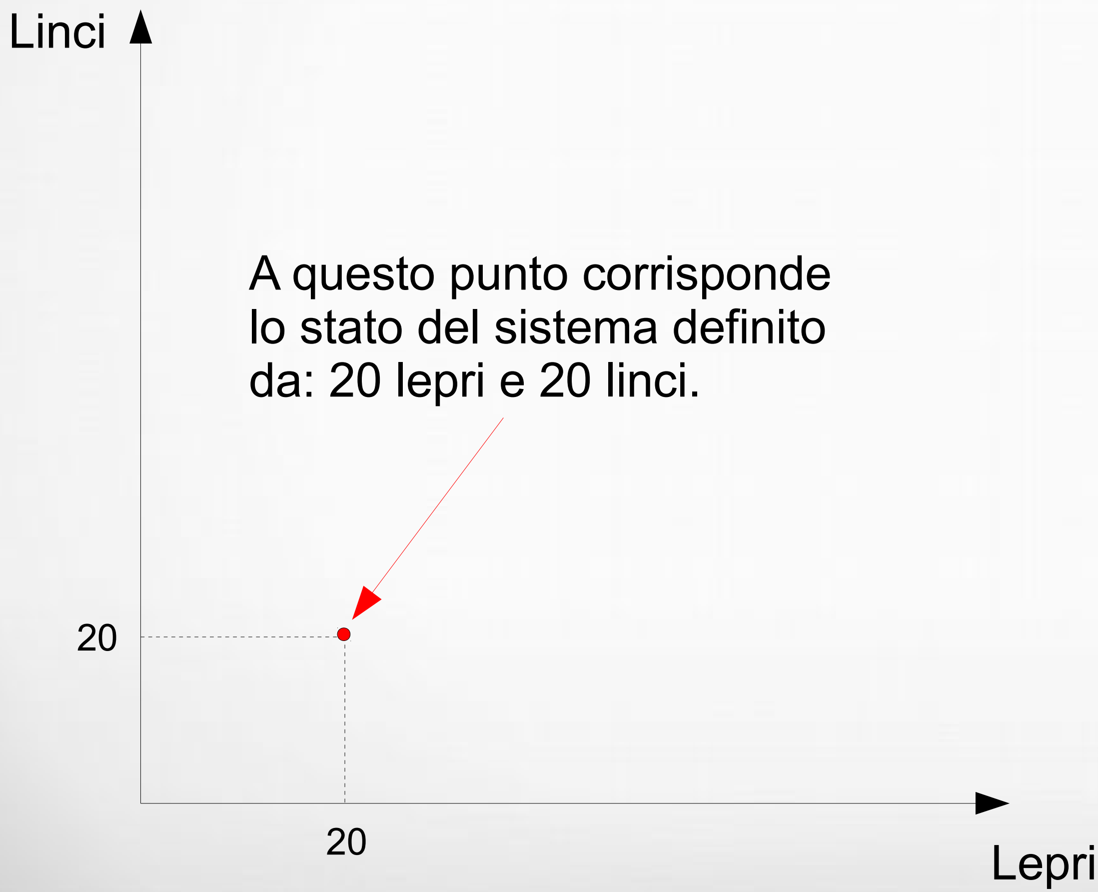
Spazio delle fasi

- Variabili di stato: n° linci, n° lepri



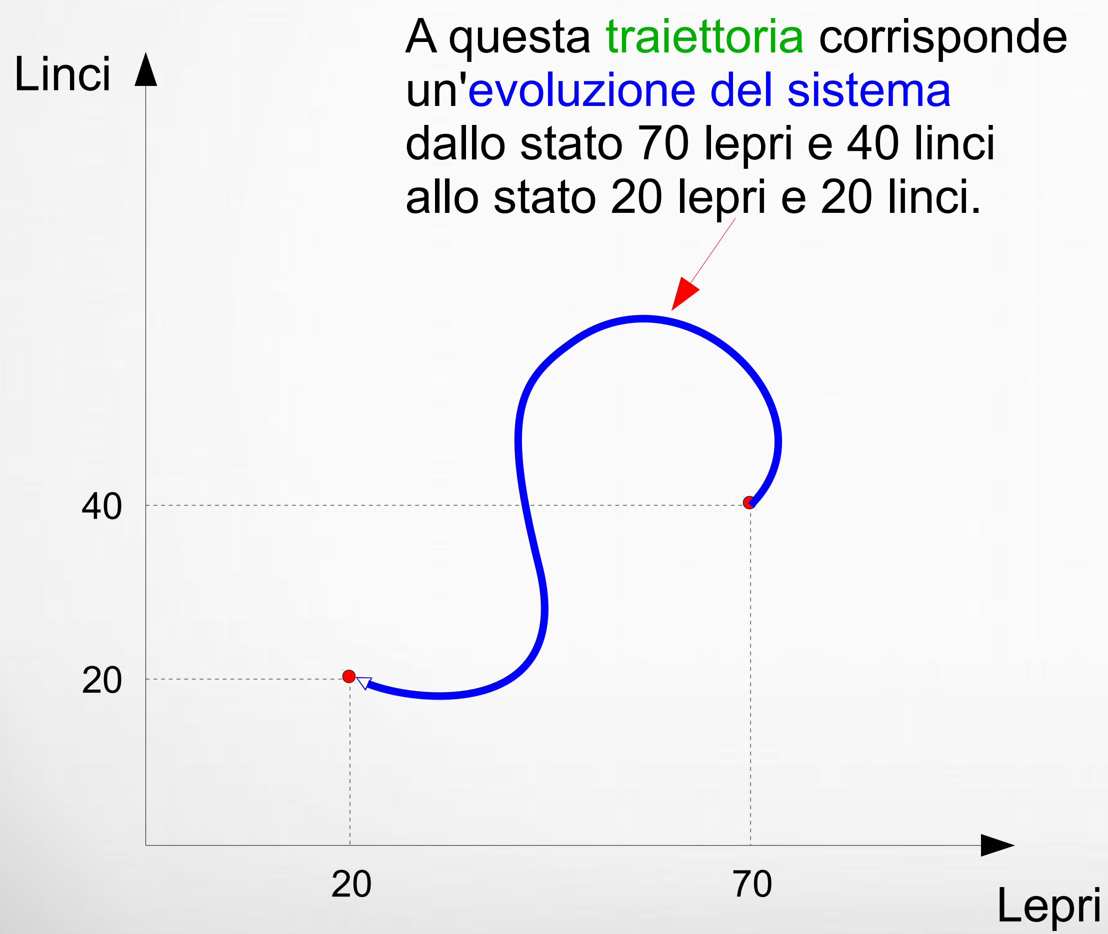
Spazio delle fasi

- Variabili di stato: n° linci, n° lepri



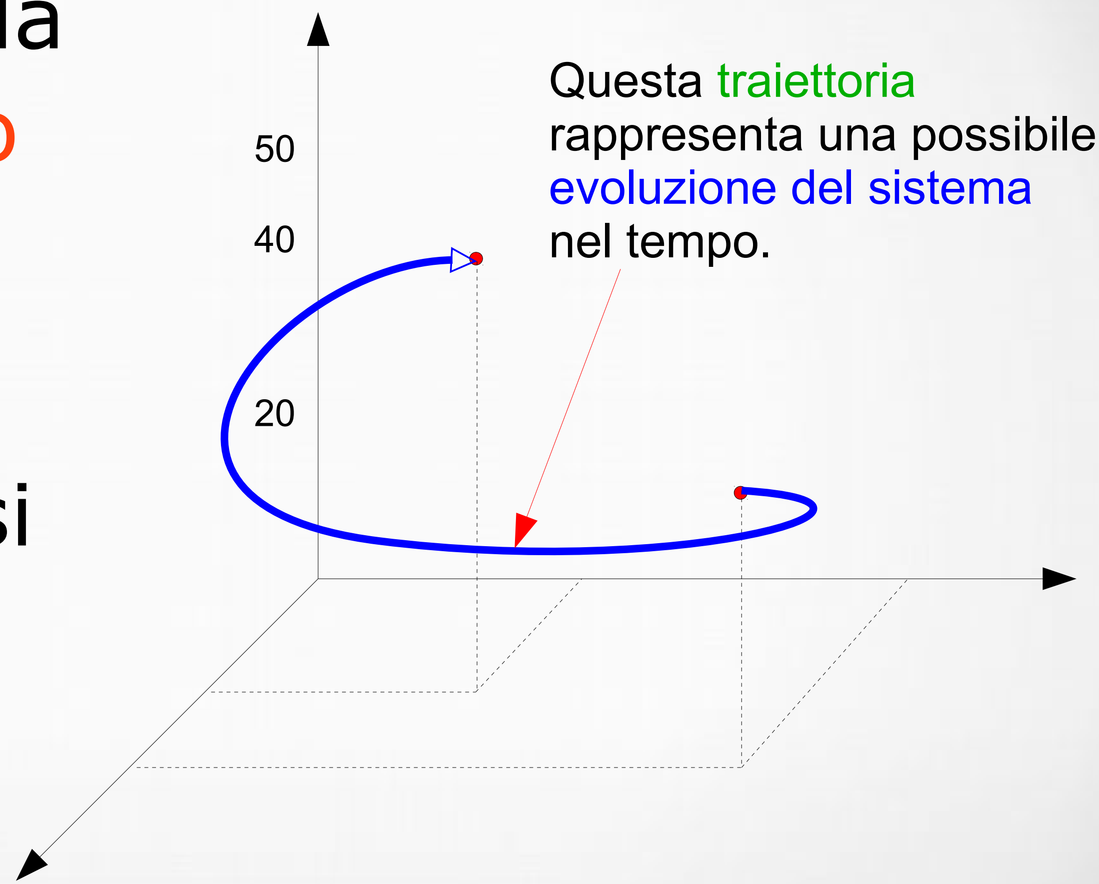
Spazio delle fasi

- Variabili di stato: n° linci, n° lepri

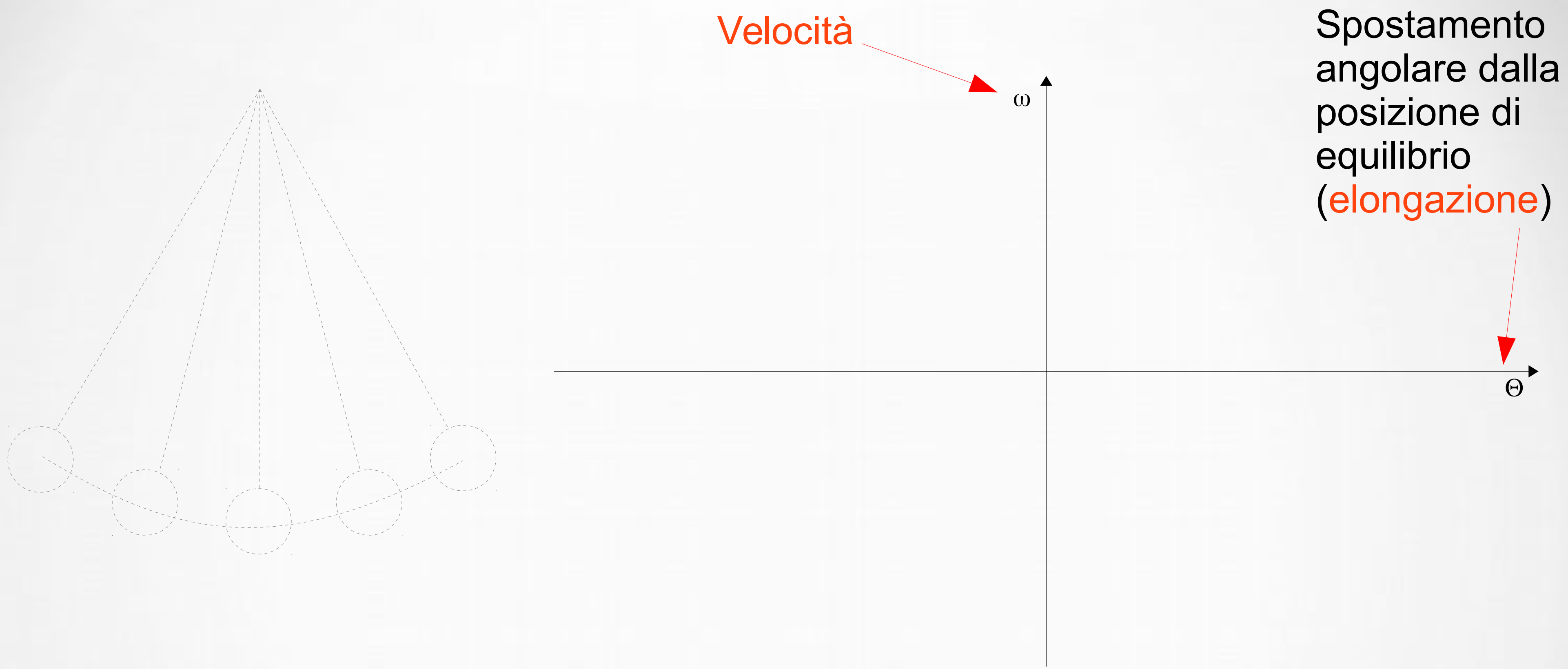


Spazio delle fasi

- Consideriamo un sistema definito da 3 variabili di stato
- In questo caso lo spazio delle fasi ha tre dimensioni

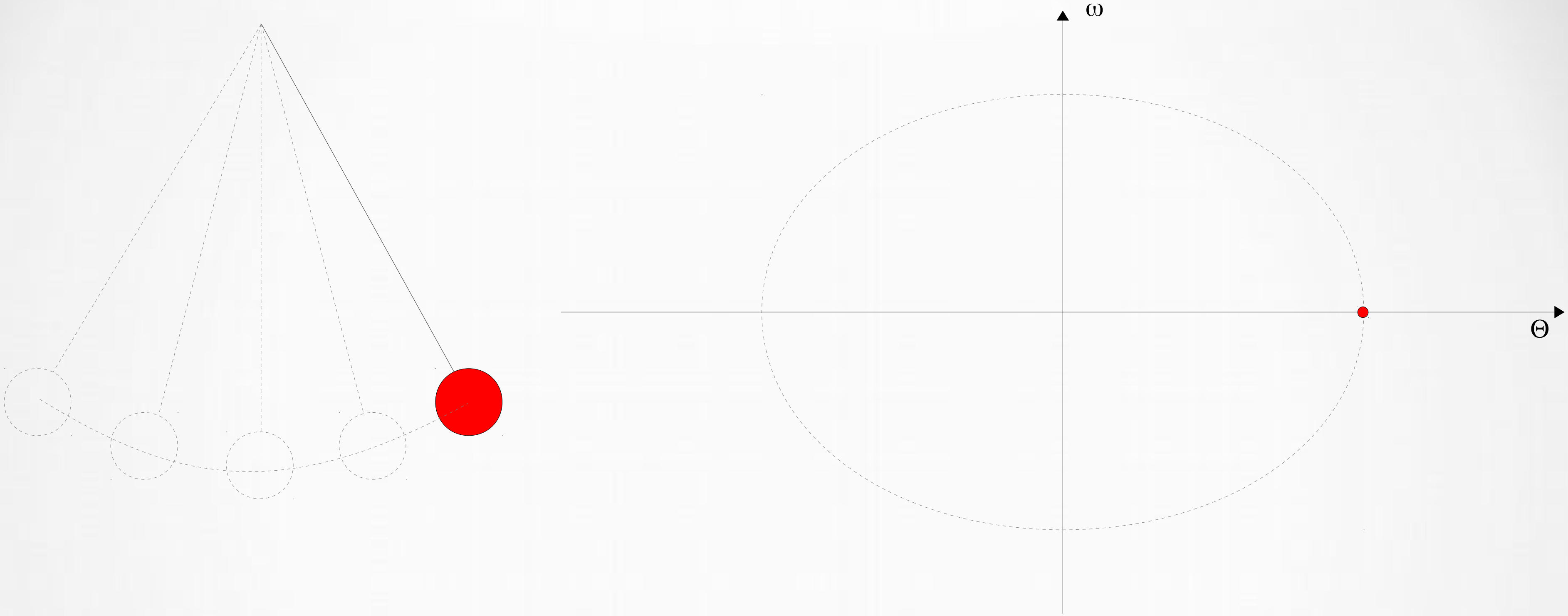


Spazio delle fasi e attrattori



- Le variabili di stato del sistema pendolo senza attrito (velocità ed elongazione) vengono associate a una coordinata nello spazio delle fasi

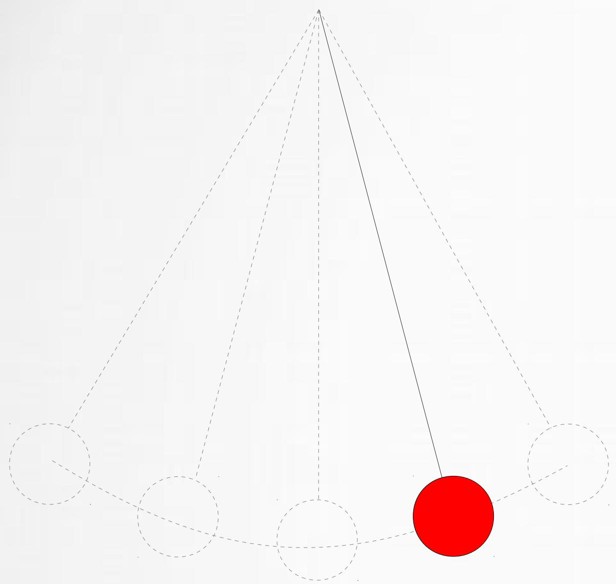
Spazio delle fasi e attrattori

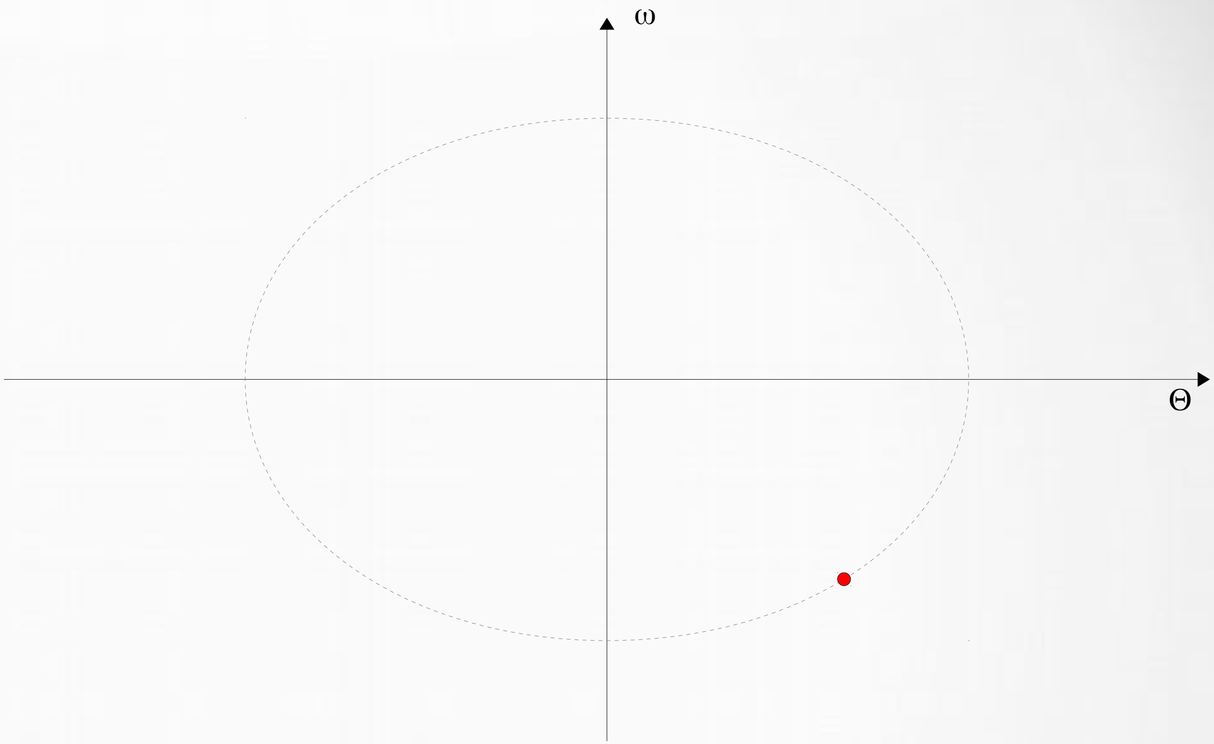


Elongazione = positiva max

Velocità = nulla

Spazio delle fasi e attrattori

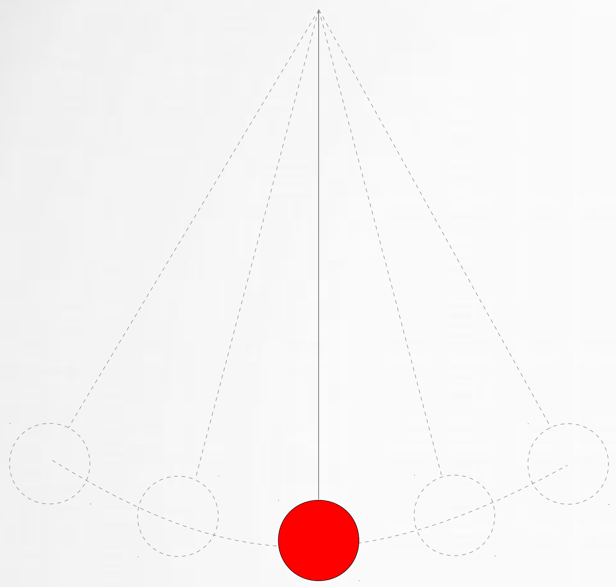


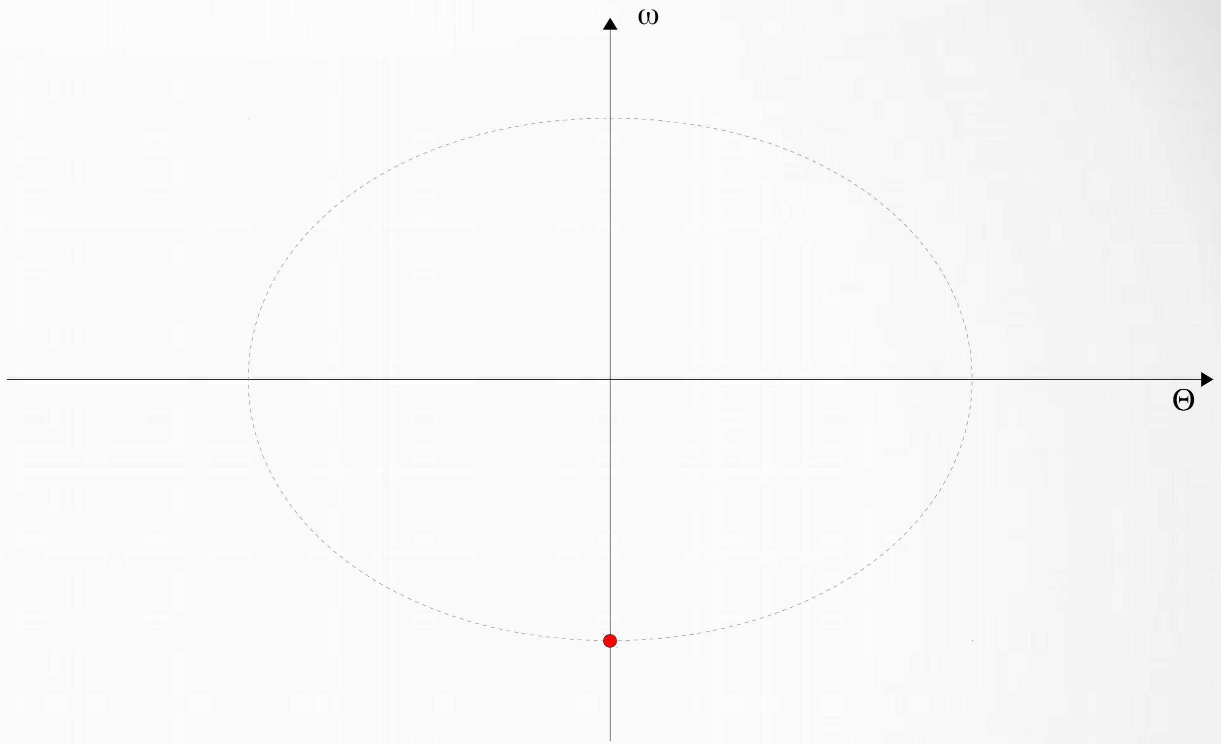


Elongazione = positiva med

Velocità = negativa med

Spazio delle fasi e attrattori

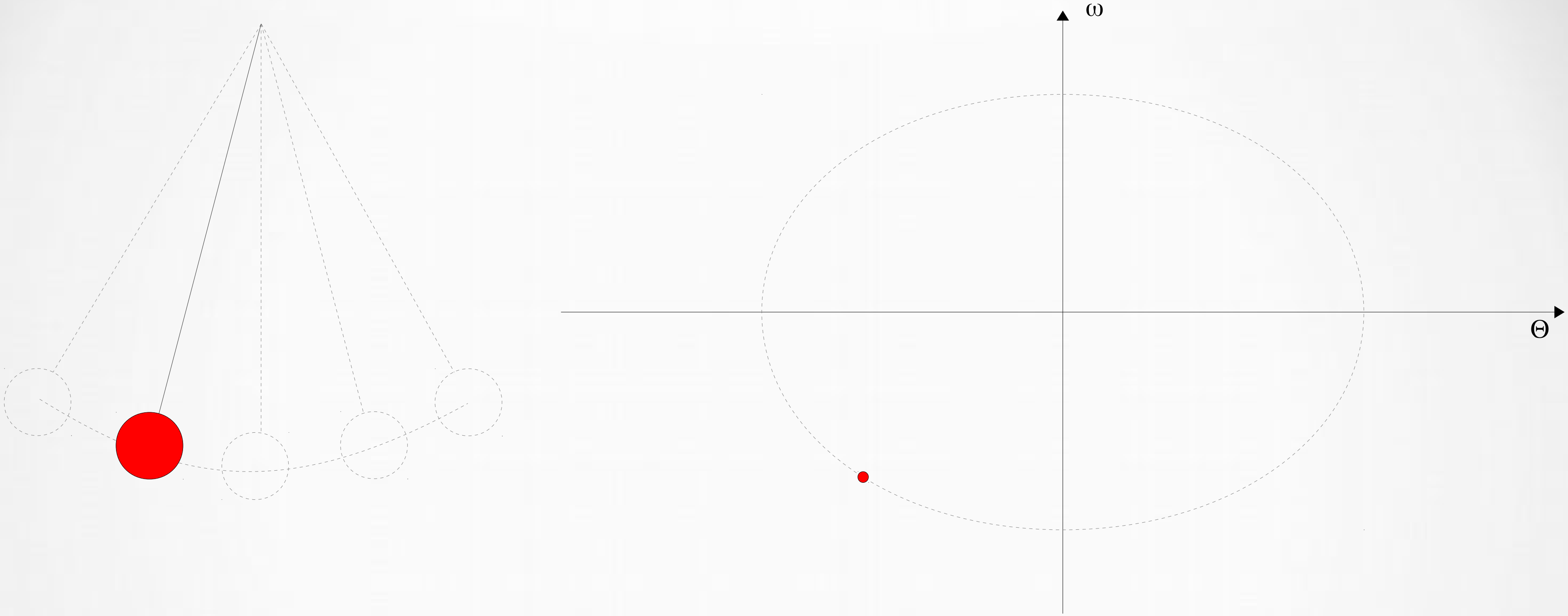




Elongazione = nulla

Velocità = negativa max

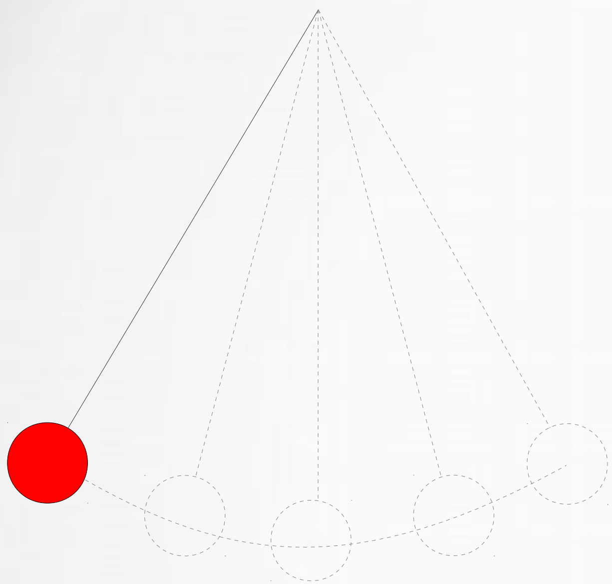
Spazio delle fasi e attrattori

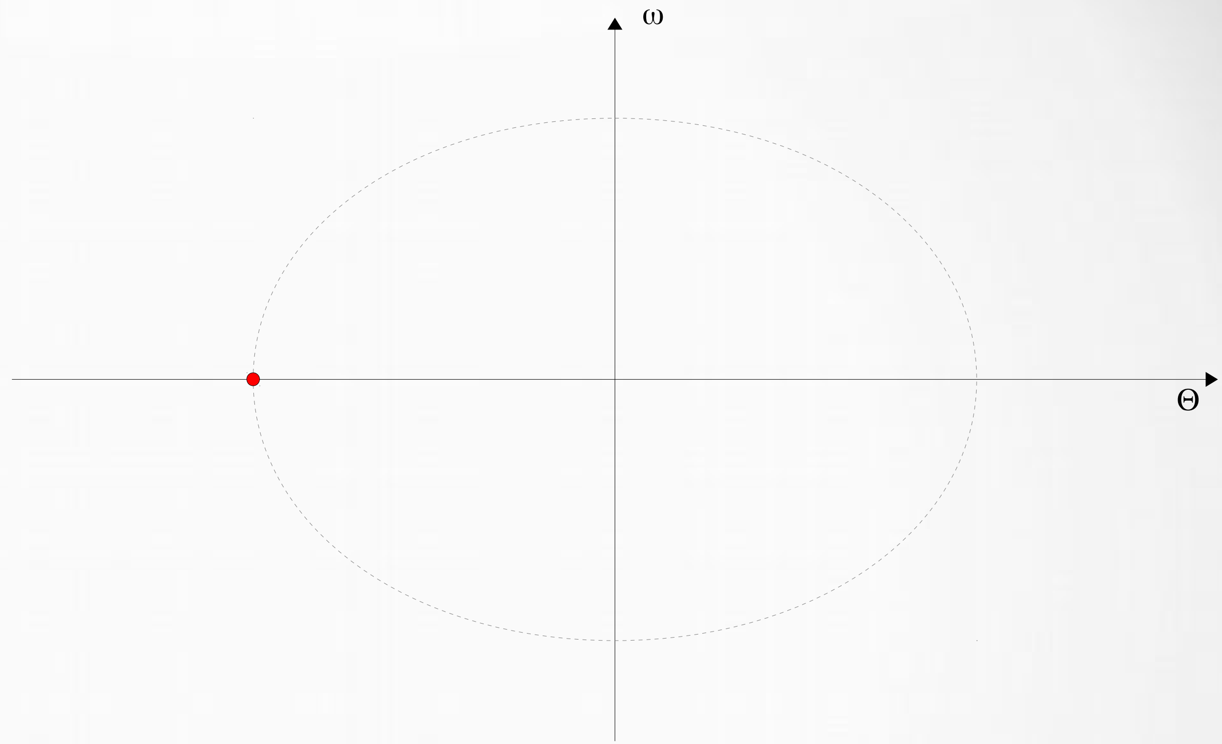


Elongazione = negativa med

Velocità = negativa med

Spazio delle fasi e attrattori

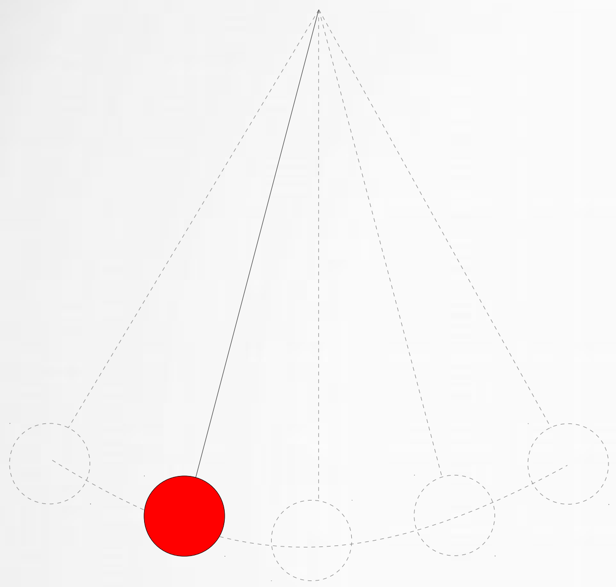


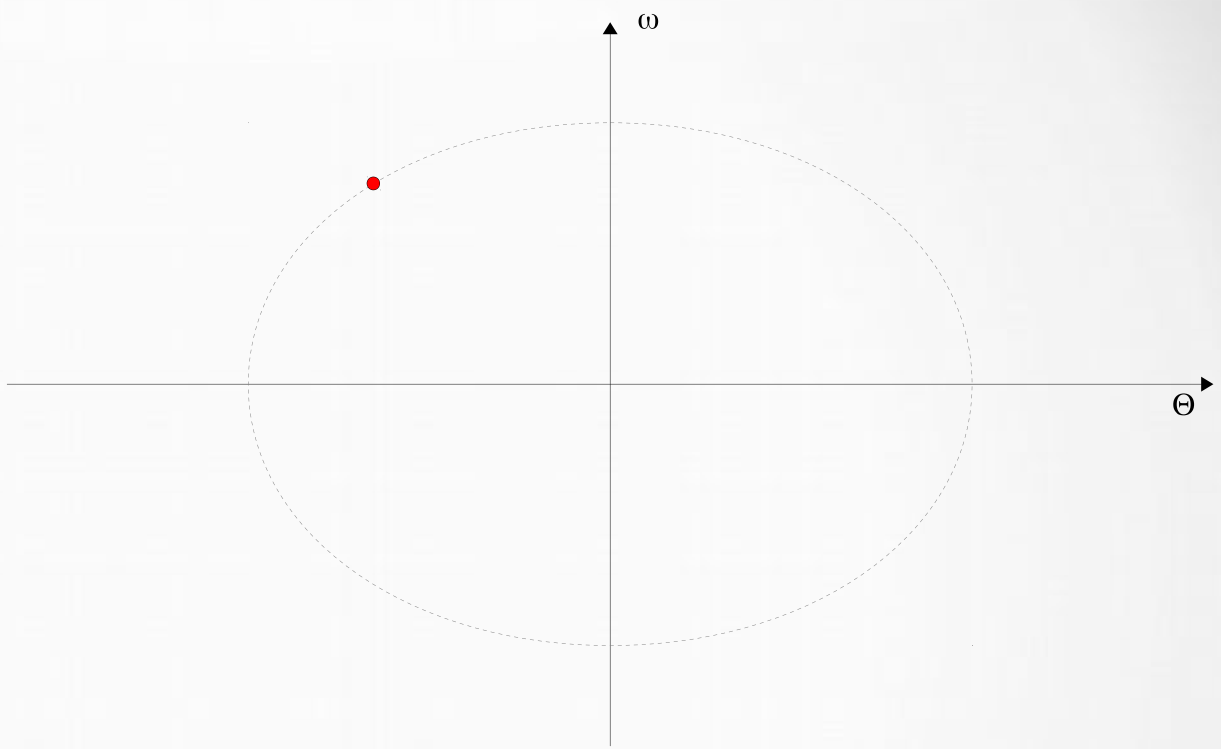


Elongazione = negativa max

Velocità = nulla

Spazio delle fasi e attrattori

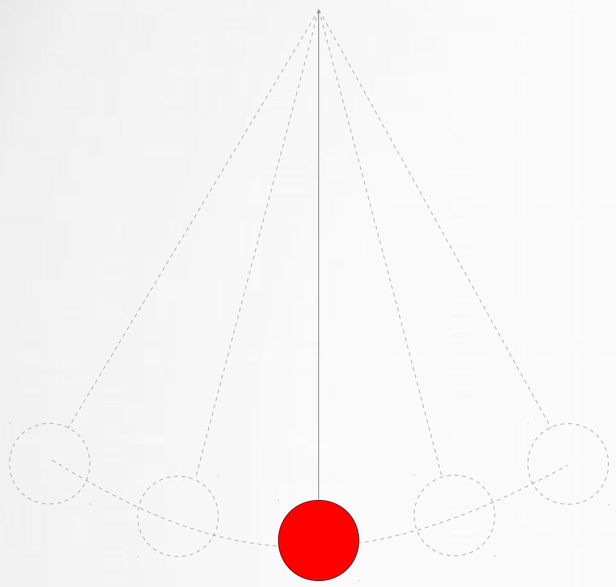


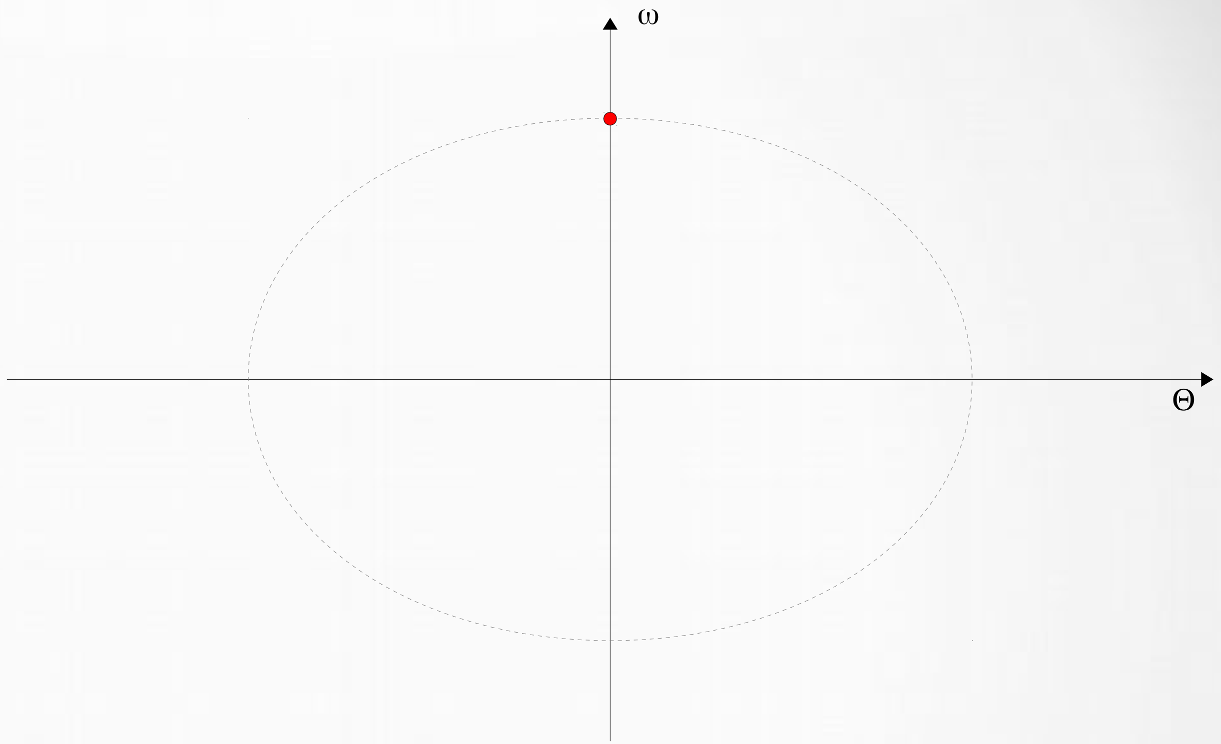


Elongazione = negativa med

Velocità = positiva med

Spazio delle fasi e attrattori

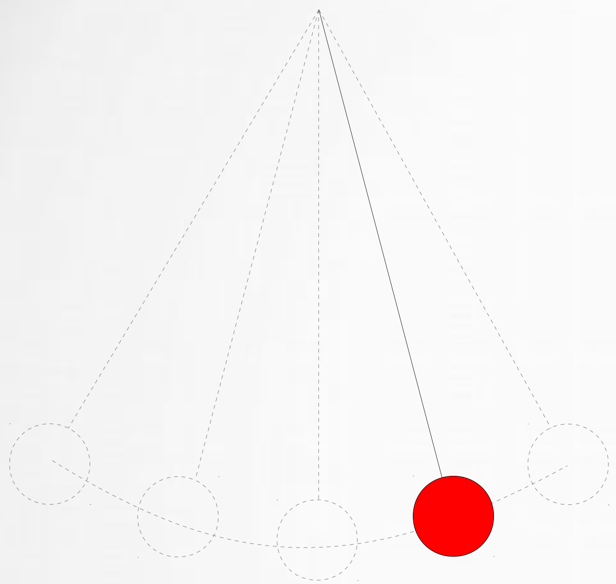


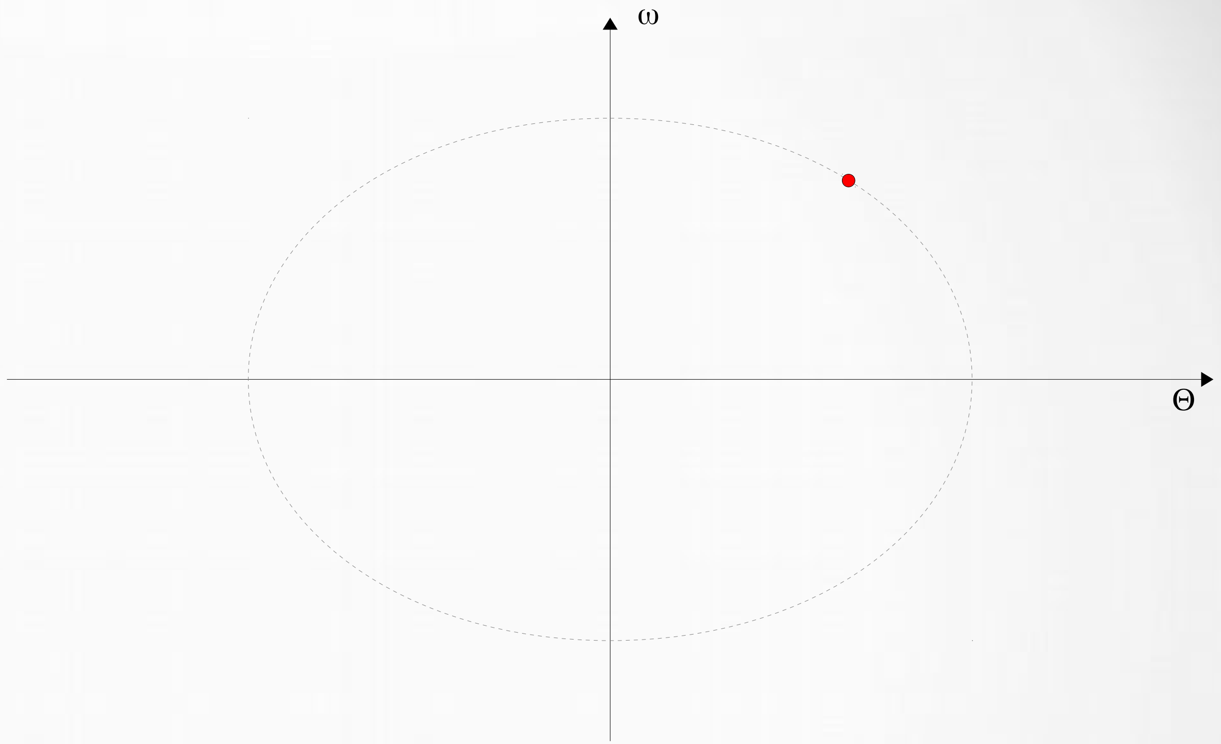


Elongazione = nulla

Velocità = positiva max

Spazio delle fasi e attrattori

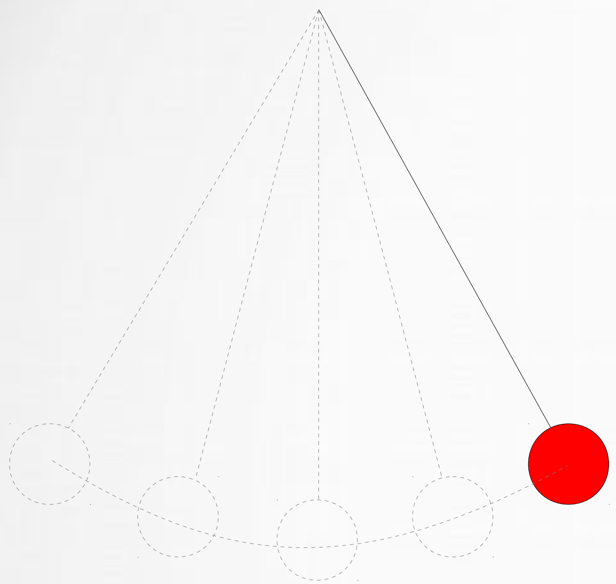


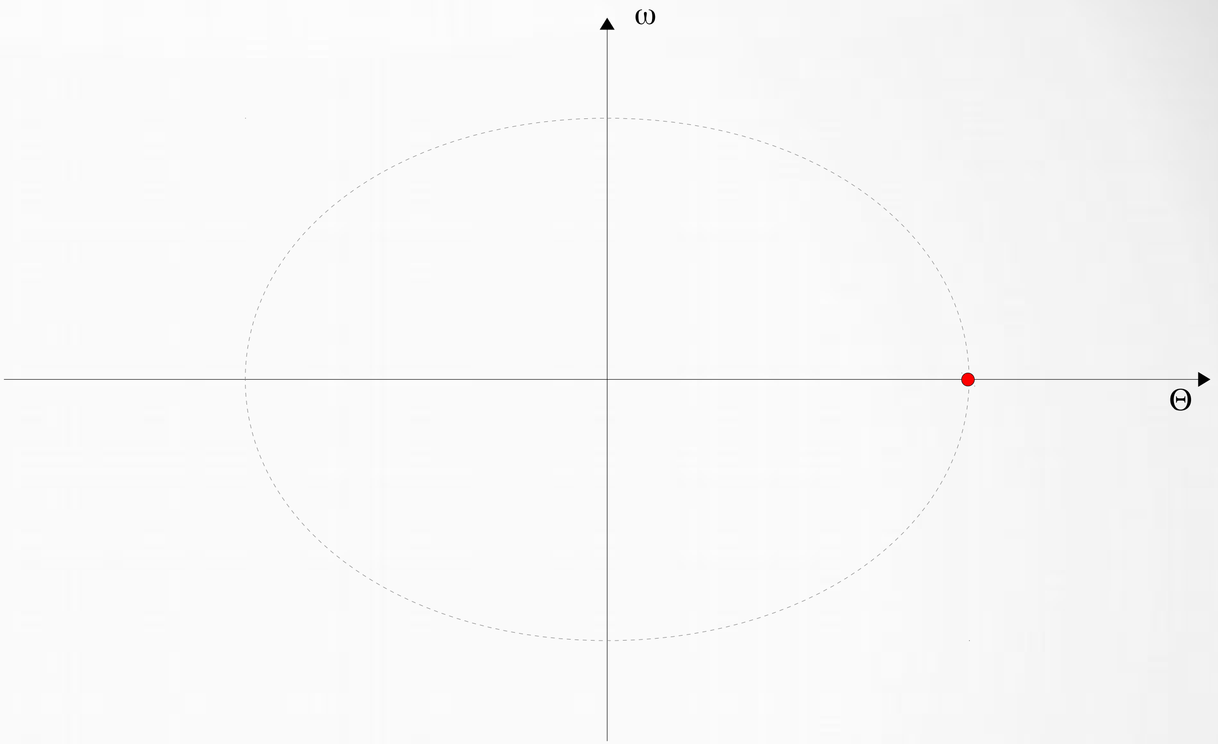


Elongazione = positiva med

Velocità = positiva med

Spazio delle fasi e attrattori

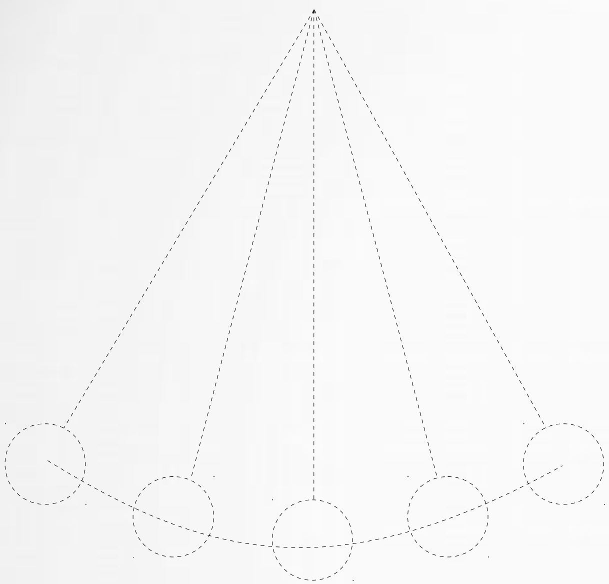


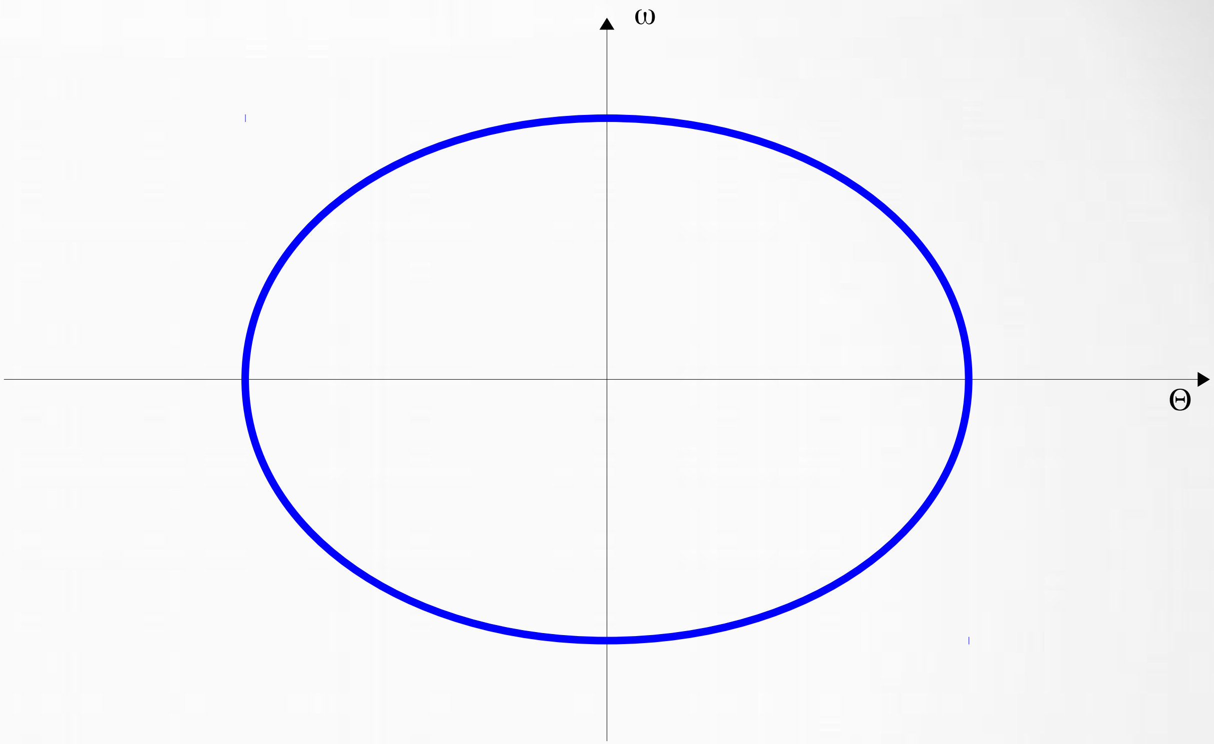


Elongazione = positiva max

Velocità = nulla

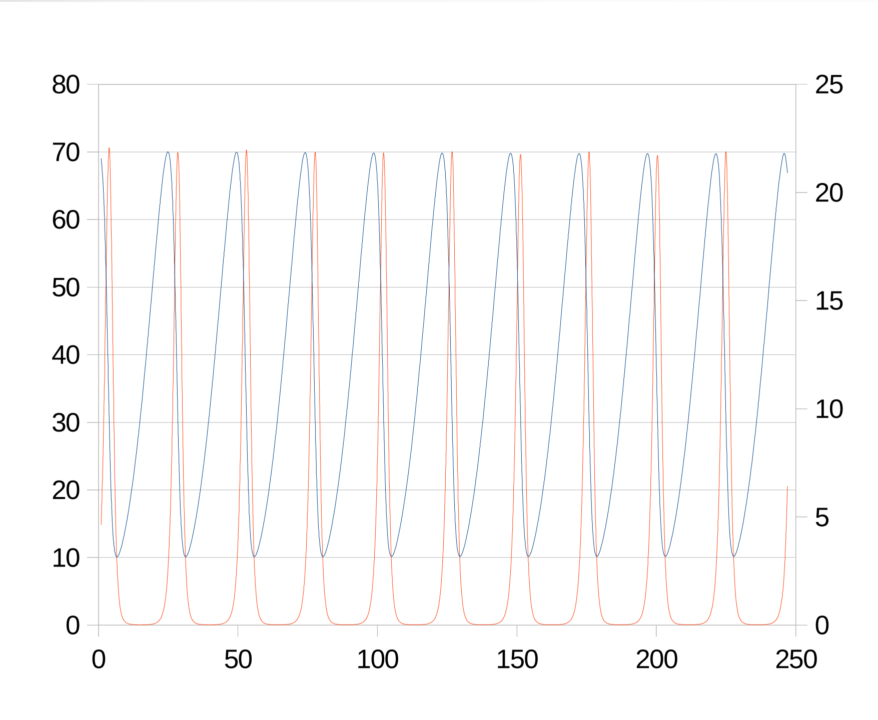
Attrattore periodico = equilibrio stabile

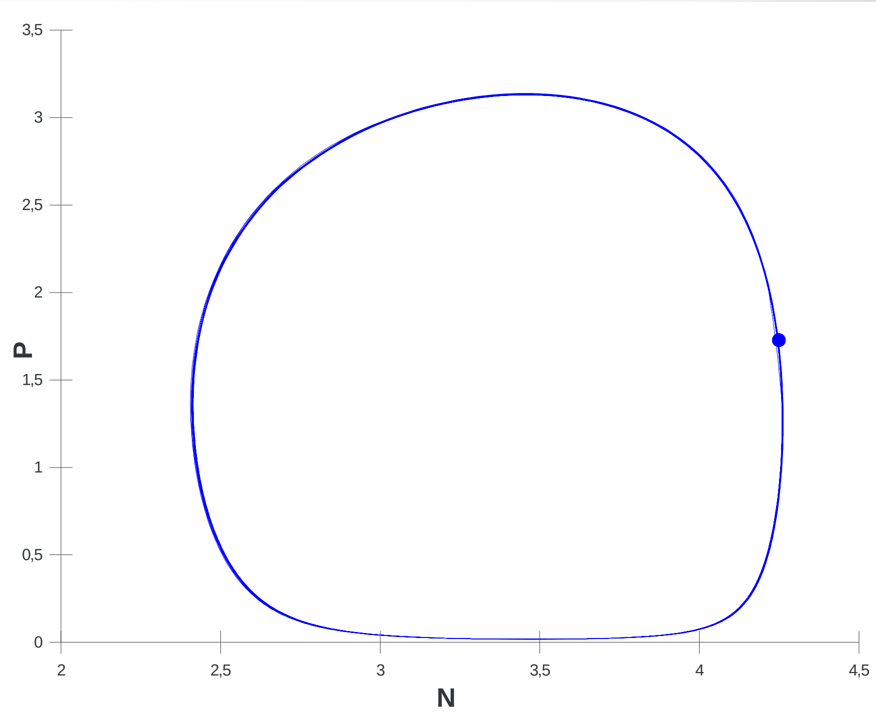




- La traiettoria nello spazio delle fasi disegna un anello chiuso (attrattore ciclo limite):
  il sistema oscilla periodicamente

Attrattore periodico = equilibrio stabile

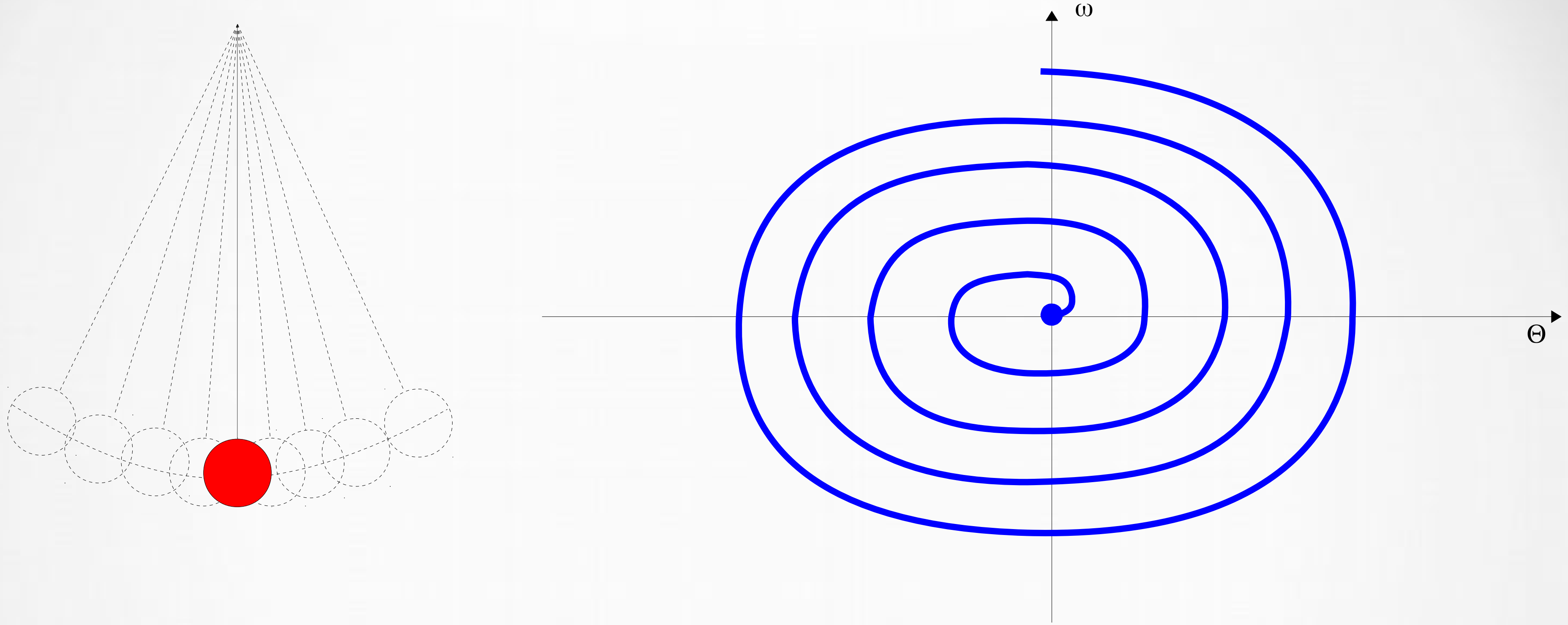




Modello Ospite-Parassitoide
Beddington et al. (1978)

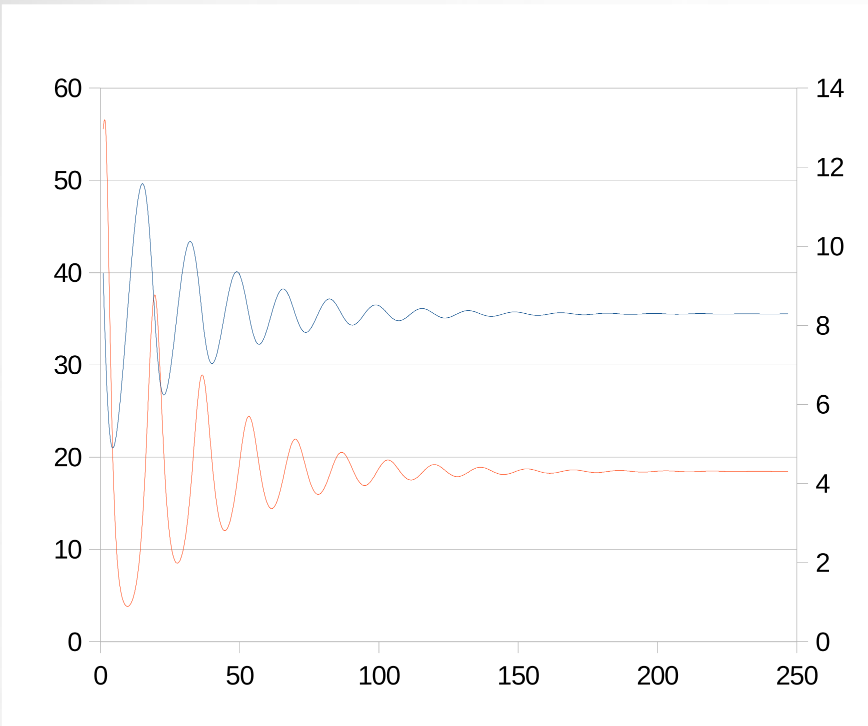
$$N_{t+1} = N_t\, e^{\,r\,(1-Nt/K)}\, e^{-aPt}$$
$$P_{t+1} = N_t\, e^{-aPt}$$

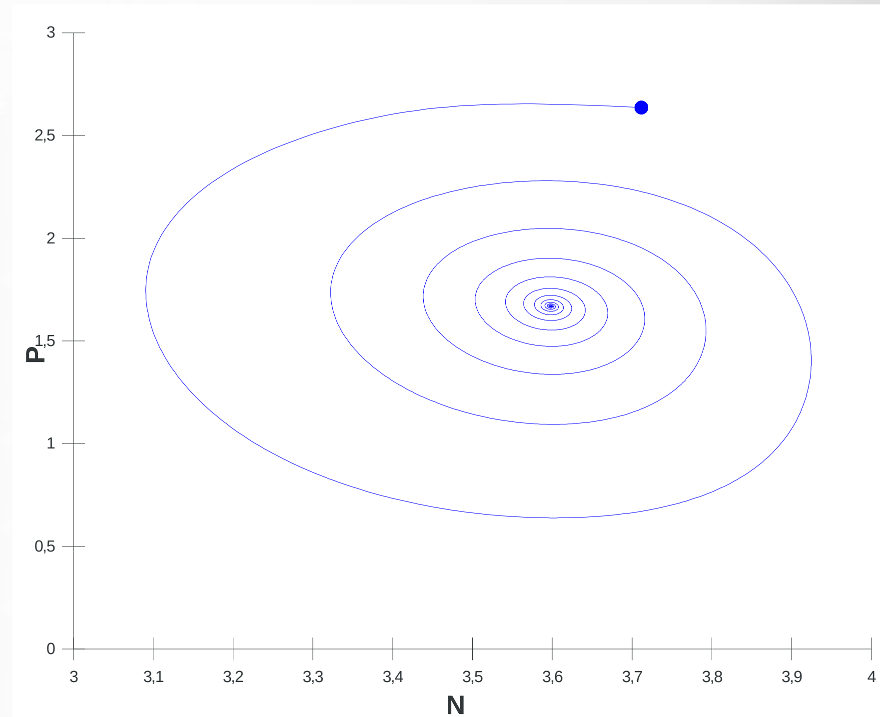
Attrattore puntuale = equilibrio stabile



- La traiettoria nello spazio delle fasi converge verso un punto (attrattore a punto fisso): il sistema raggiunge un equilibrio stabile

Attrattore puntuale = equilibrio stabile

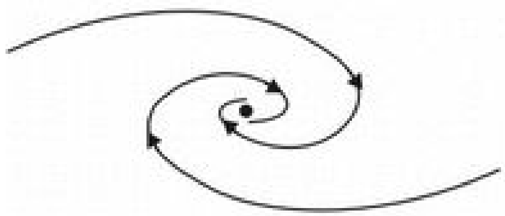




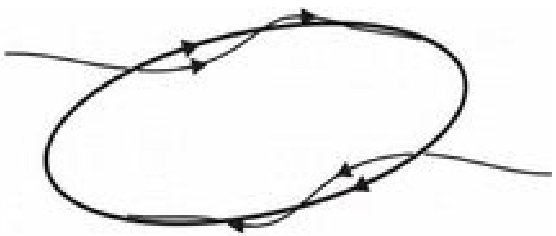
Modello Ospite-Parassitoide
Beddington et al. (1978)

$$N_{t+1} = N_t \, e^{\, r\,(1-Nt/K)} \, e^{-aPt}$$
$$P_{t+1} = N_t \, e^{-aPt}$$

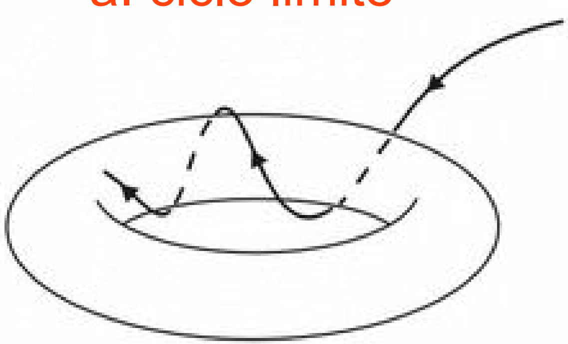
Attrattori normali



a. punto fisso



a. ciclo limite

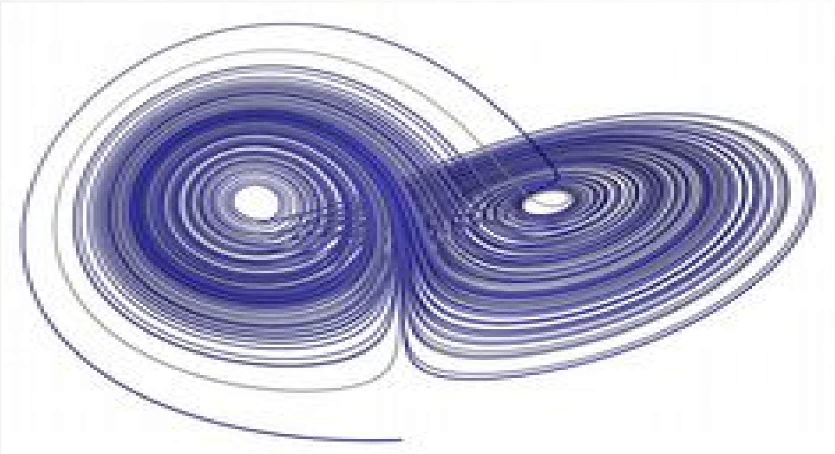


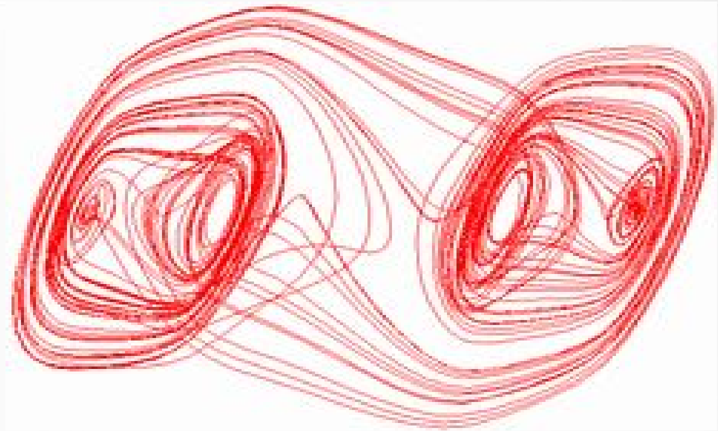
a. toro limite

- Si definisce attrattore la figura geometrica nello spazio degli stati formata dall'insieme degli stati finali verso cui evolve il sistema a partire da una condizione iniziale qualsiasi.

- In essi le traiettorie rimangono confinate e, se inizialmente vicine, restano vicine.

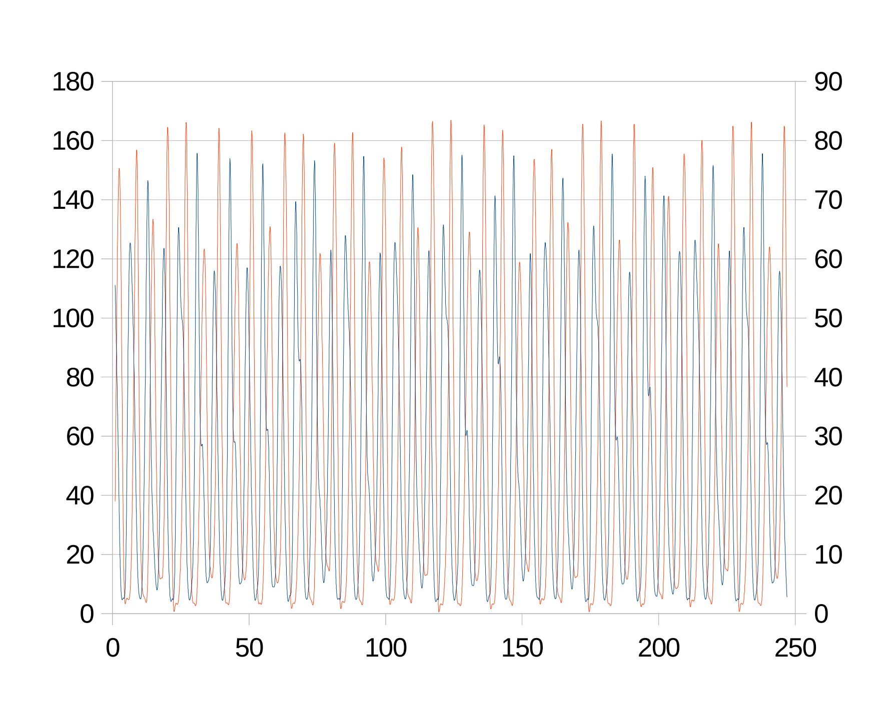
Attrattori strani

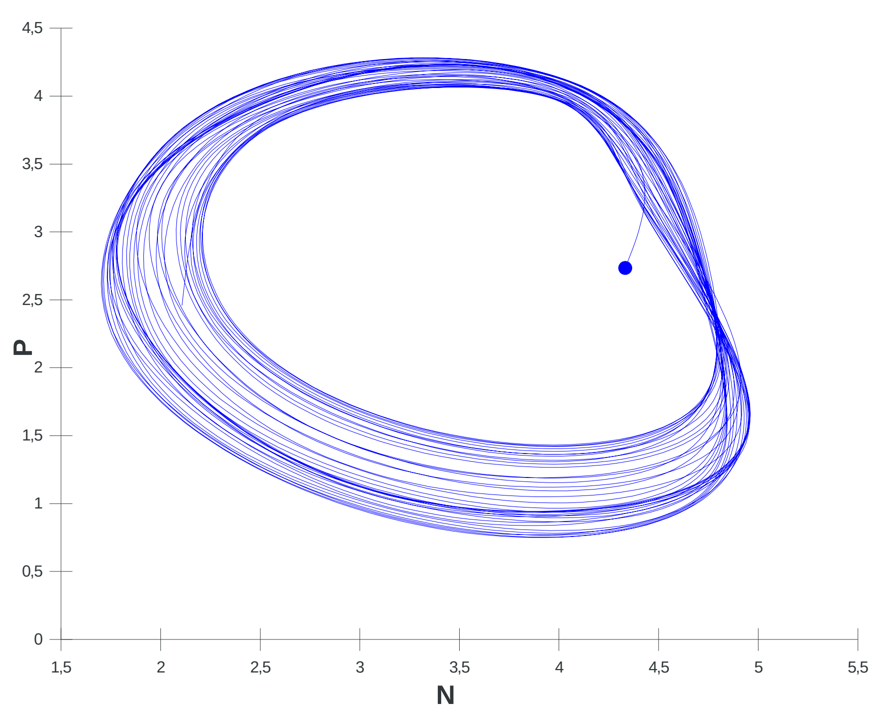




- Sono curve di lunghezza infinita contenute in un volume finito dello spazio delle fasi.
- La traiettoria non ripassa mai per gli stessi punti e quindi non si ripete mai.
- Il sistema non raggiunge un equilibrio stabile.
- La traiettoria dell'attrattaore è estremamente sensibile alle condizioni inziali.

Attrattore strano = dinamica caotica



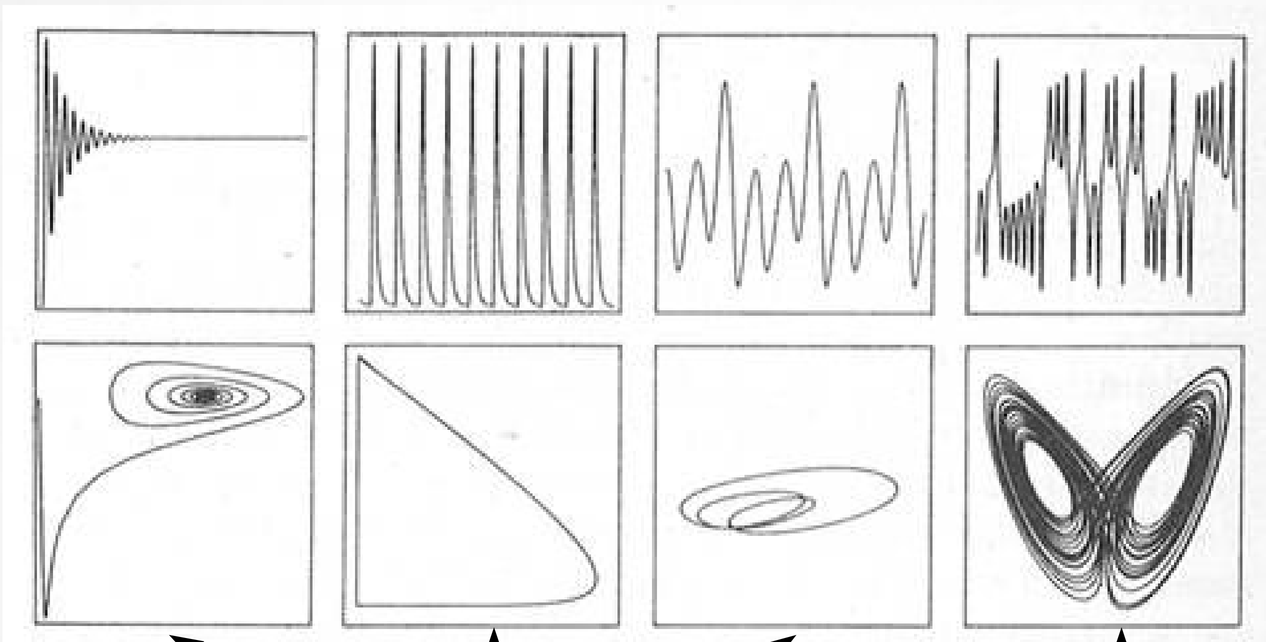


Modello Ospite-Parassitoide
Beddington et al. (1978)

$$N_{t+1} = N_t \, e^{\,r\,(1-Nt/K)} \, e^{-aPt}$$
$$P_{t+1} = N_t \, e^{-aPt}$$

Attrattori normali e attrattori strani

- Riassumendo...



Attrattori normali

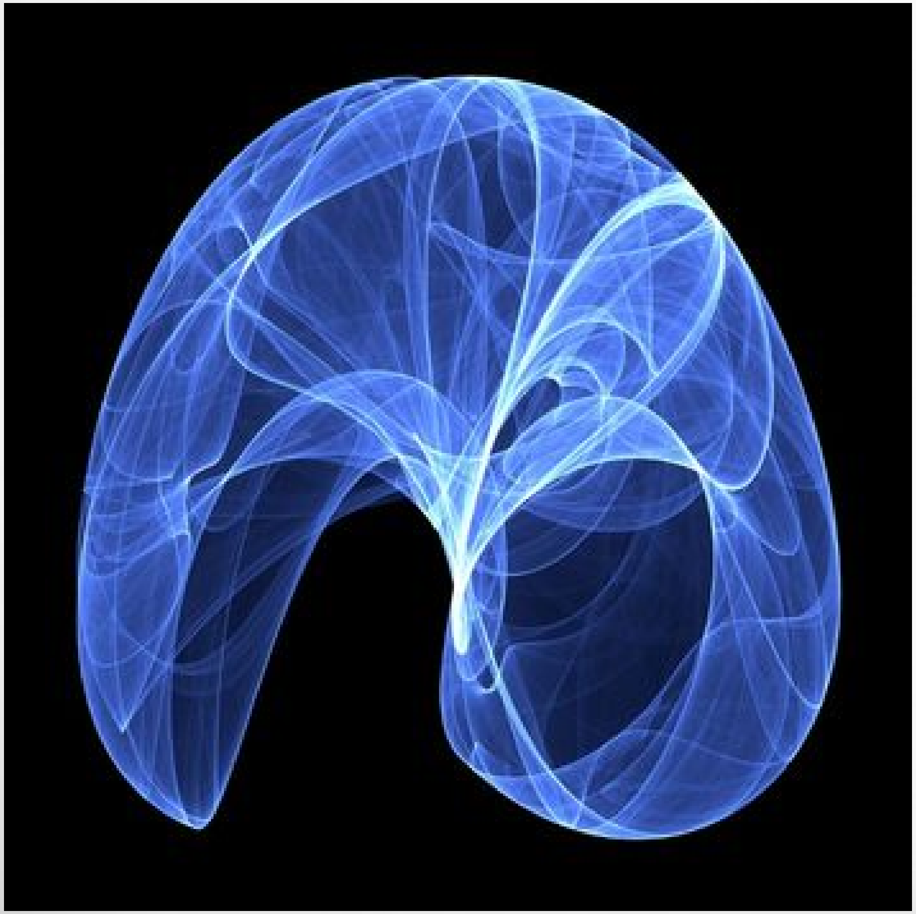
Attrattore strano

SISTEMI DETERMINISTICI **NON CAOTICI**

SISTEMI DETERMINISTICI **CAOTICI**

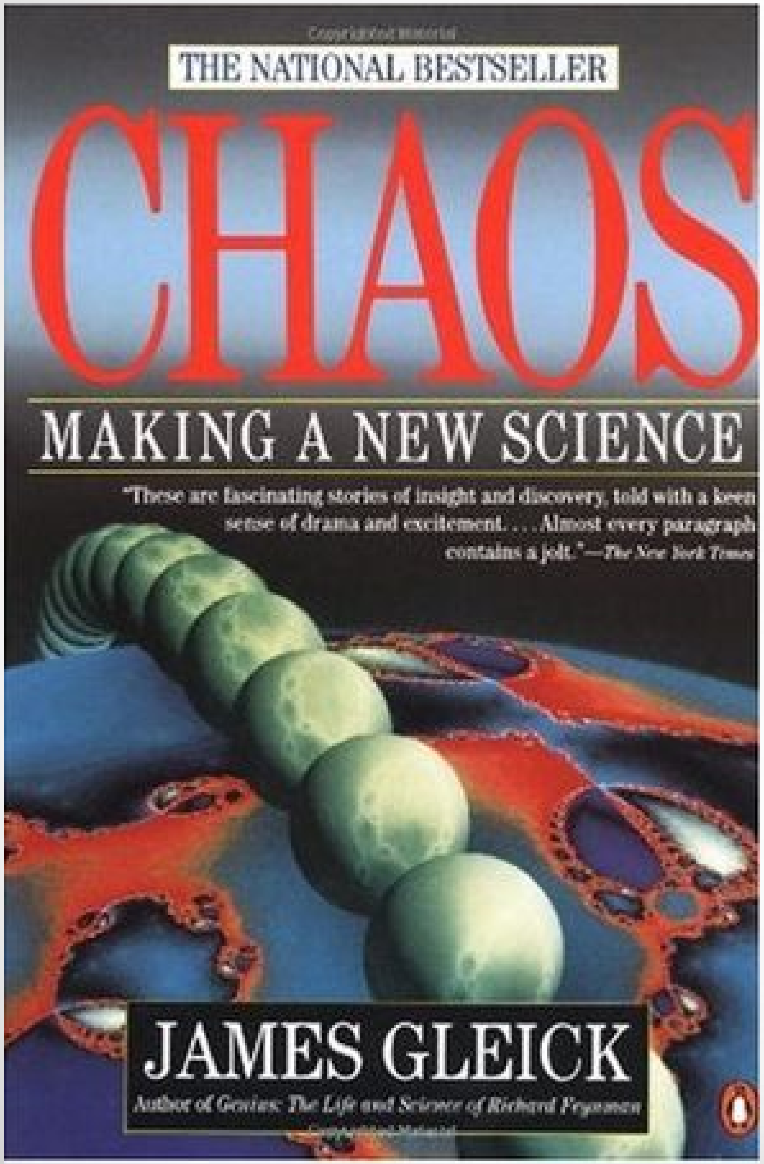
Sistemi caotici

- Gli attrattori strani sono tipici dei sistemi dissipativi caotici in particolar modo di quelli aperti.



- I sistemi caotici sono spesso descritti da equazioni semplici, non lineari e deterministiche.
- Nonostante l'apparente casualità le equazioni non prevedono alcun elemento di aleatorietà.

Teoria del Caos



- Conosciuta dal grande pubblico grazie al best seller di James Gleick.

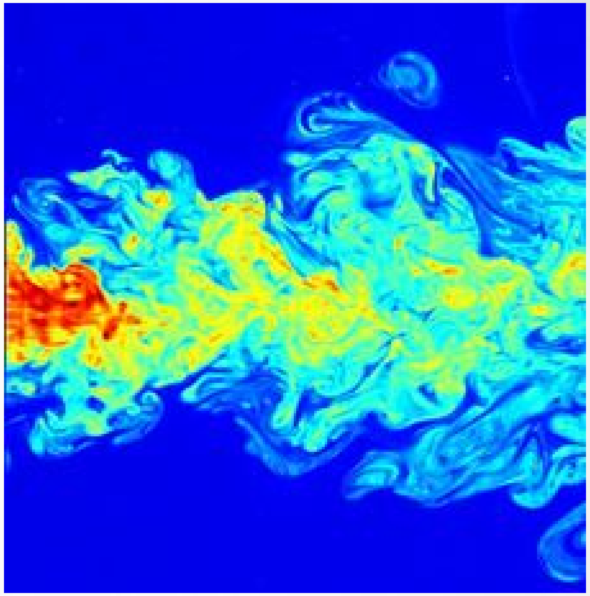
Teoria del Caos

- Nella mitologia greca, il Caos è lo stato primordiale di vuoto buio anteriore alla creazione del cosmo da cui emersero gli dei e gli uomini.

- Non è una teoria in senso tradizionale, è un insieme di strumenti concettuali che spiega fenomeni comuni a diverse discipline.

Teoria del Caos

- Paradossi dei sistemi caotici:
  - ✔ Descritti da equazioni deterministiche, ma manifestano un comportamento apparentemente casuale.
  - ✔ L'impredicibilità non è dovuta a fattori esterni al sistema ma è una loro caratteristica intrinseca (sensibilità alle condizioni niziali).



Sistemi caotici

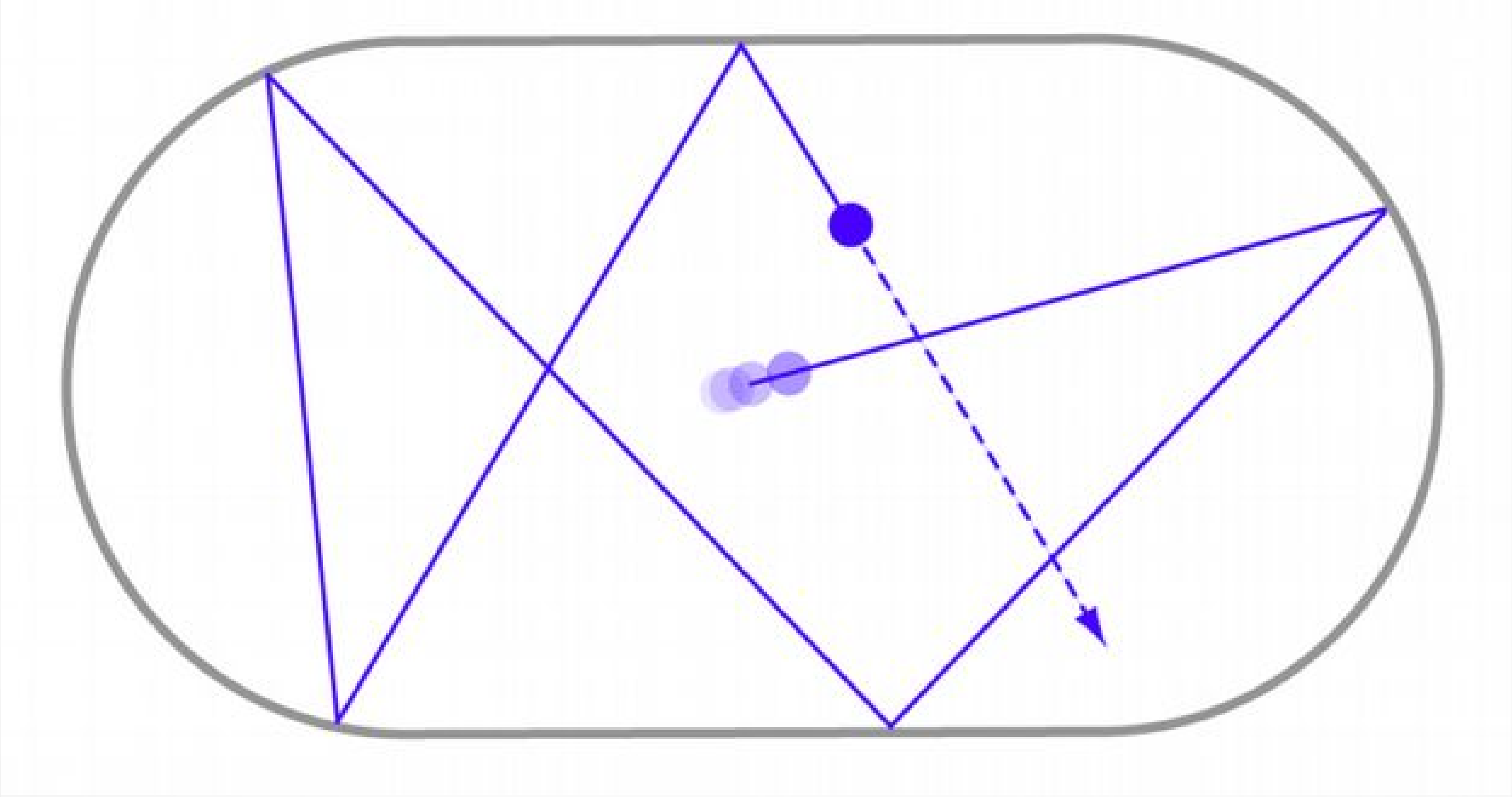
- I sistemi dal comportamento caotico si osservano nella vita di tutti i giorni

Ora che la scienza lo sta cercando, sembra che il chaos sia dappertutto.

James Gleick

Sistemi caotici fisici

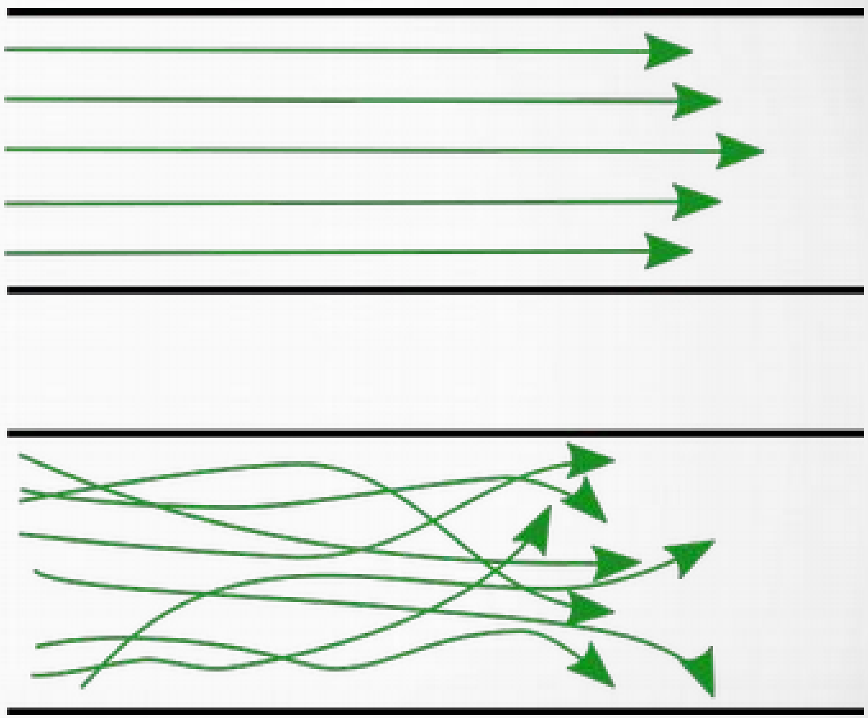
- Biliardo di Sinai



- Il potere defocalizzante delle superfici curve amplifica le piccolissime differenze iniziali.

Sistemi caotici fisici

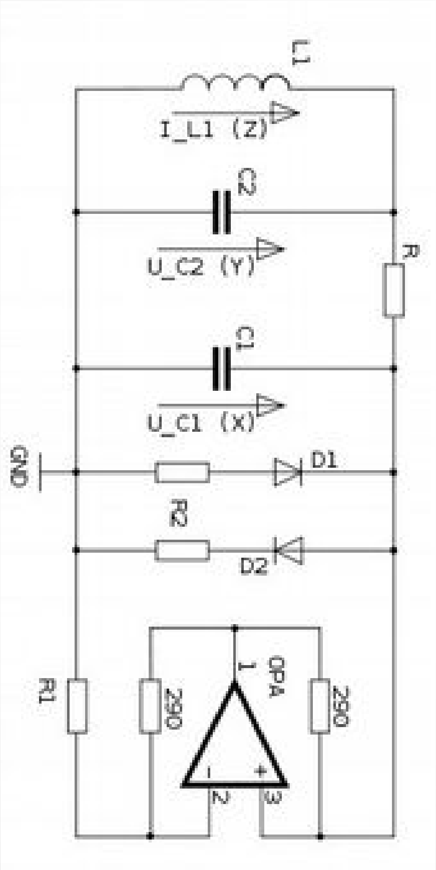
- I fluidi,soggetti a vortici turbolenti

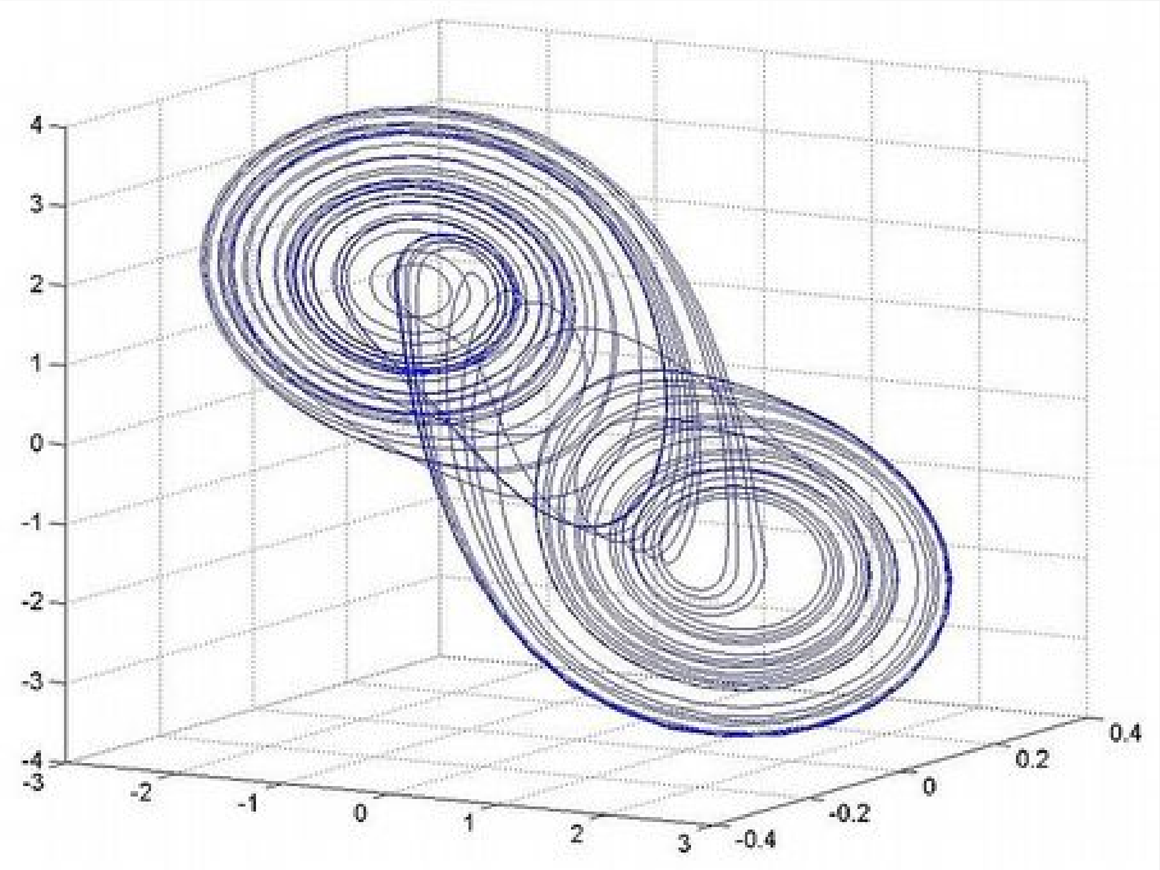


- Oltre una certa velocità il moto di un fluido passa da un regime laminare ad uno turbolento.

Sistemi caotici fisici

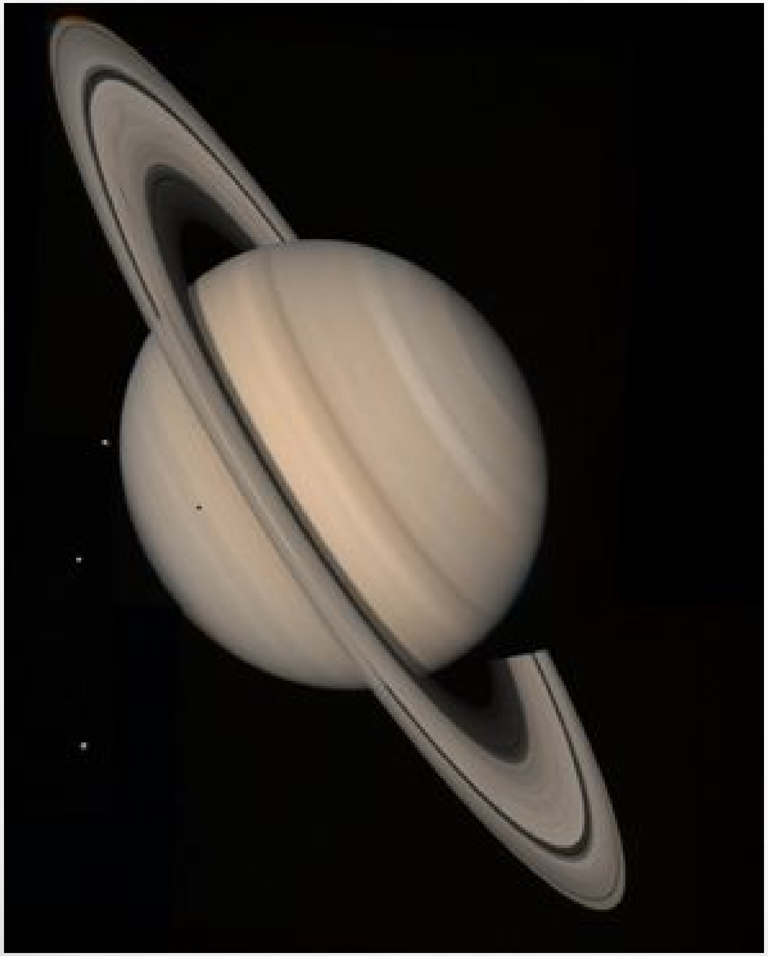
- I circuiti elettronici oscillanti, (circuito di Chua)

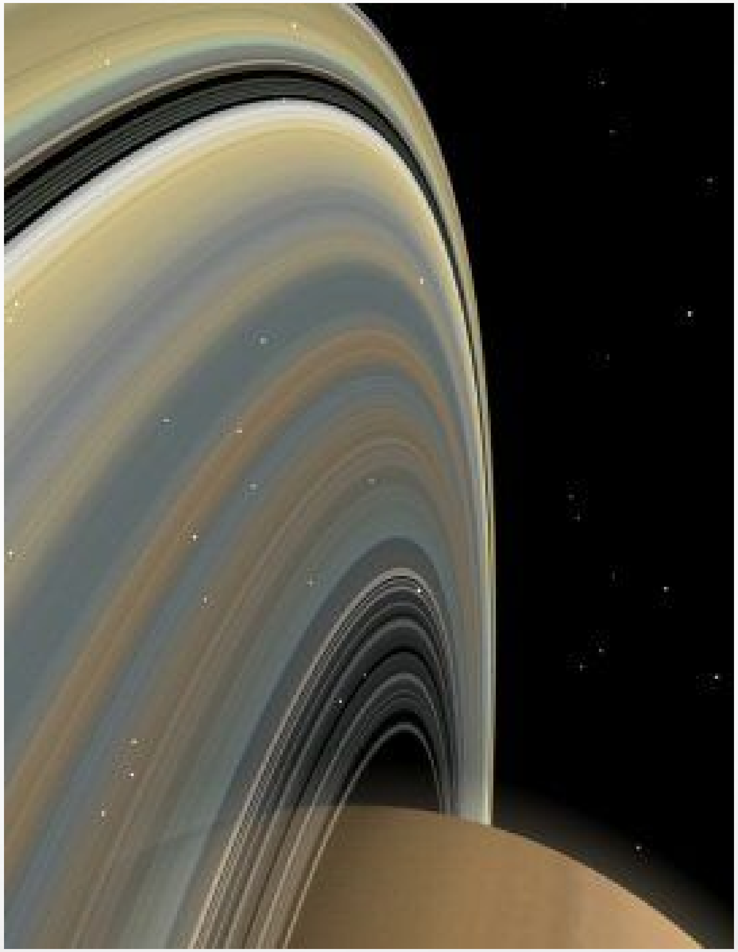




Sistemi caotici fisici-astronomici

- Il sistema degli anelli di Saturno





Sistemi caotici geofisici

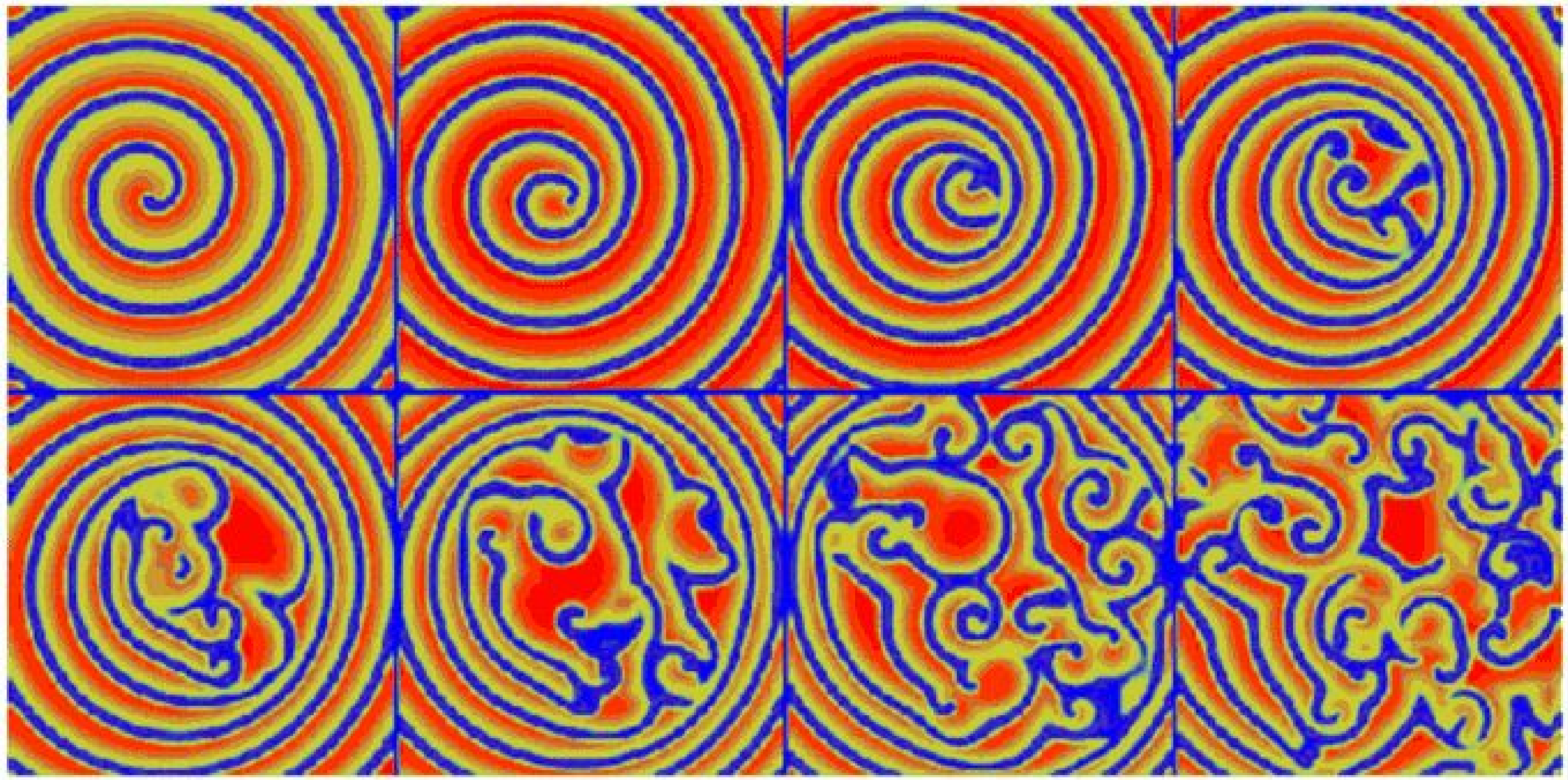
- Fenomeni sismici imprevedibili

Sistemi caotici geofisici

- Eruzioni vulcaniche catastrofiche

Sistemi caotici chimici

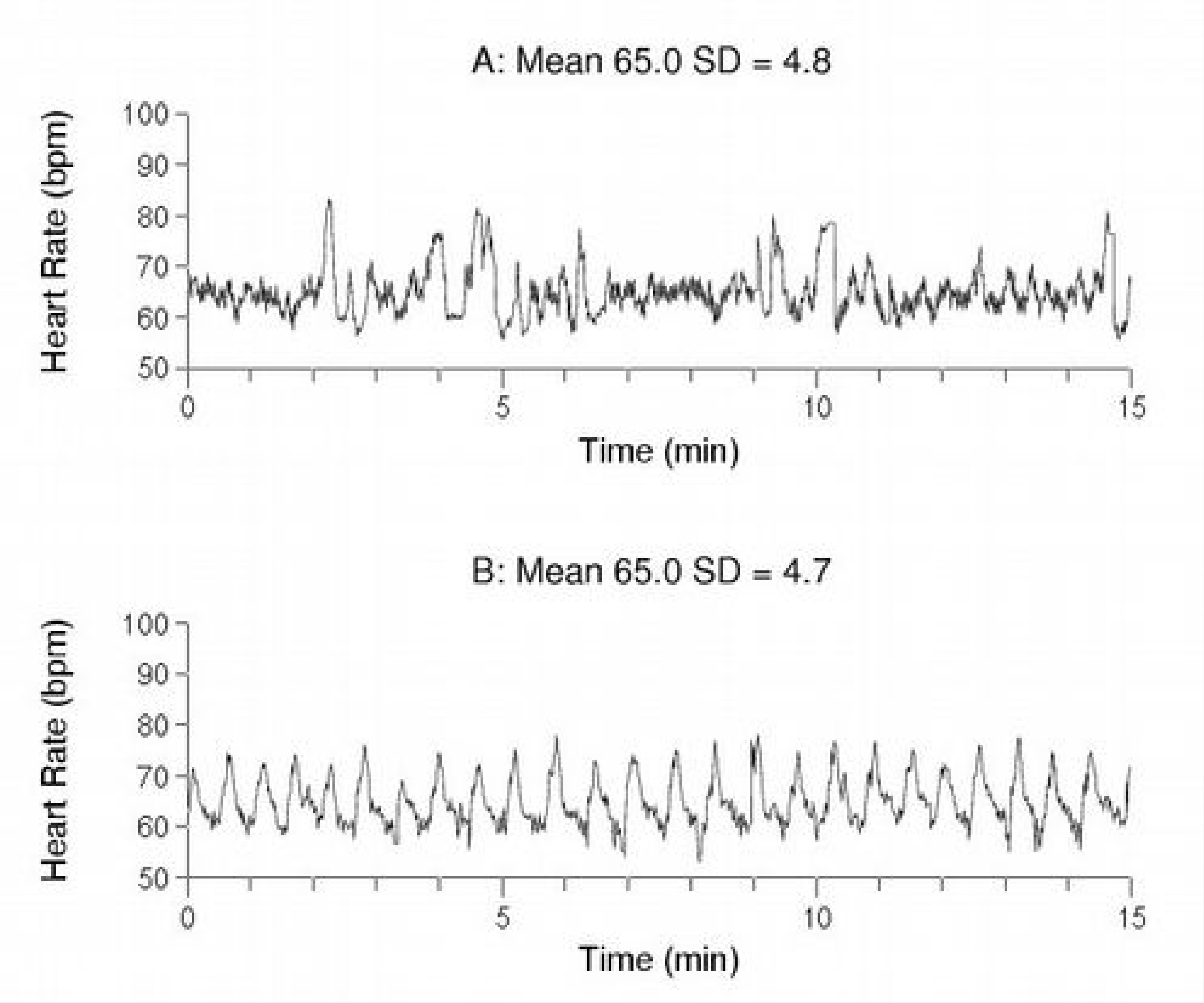
- Alcune reazioni chimiche, con comportamenti oscillanti non periodici



- Reazione di Belousov-Zhabotinsky (1961)

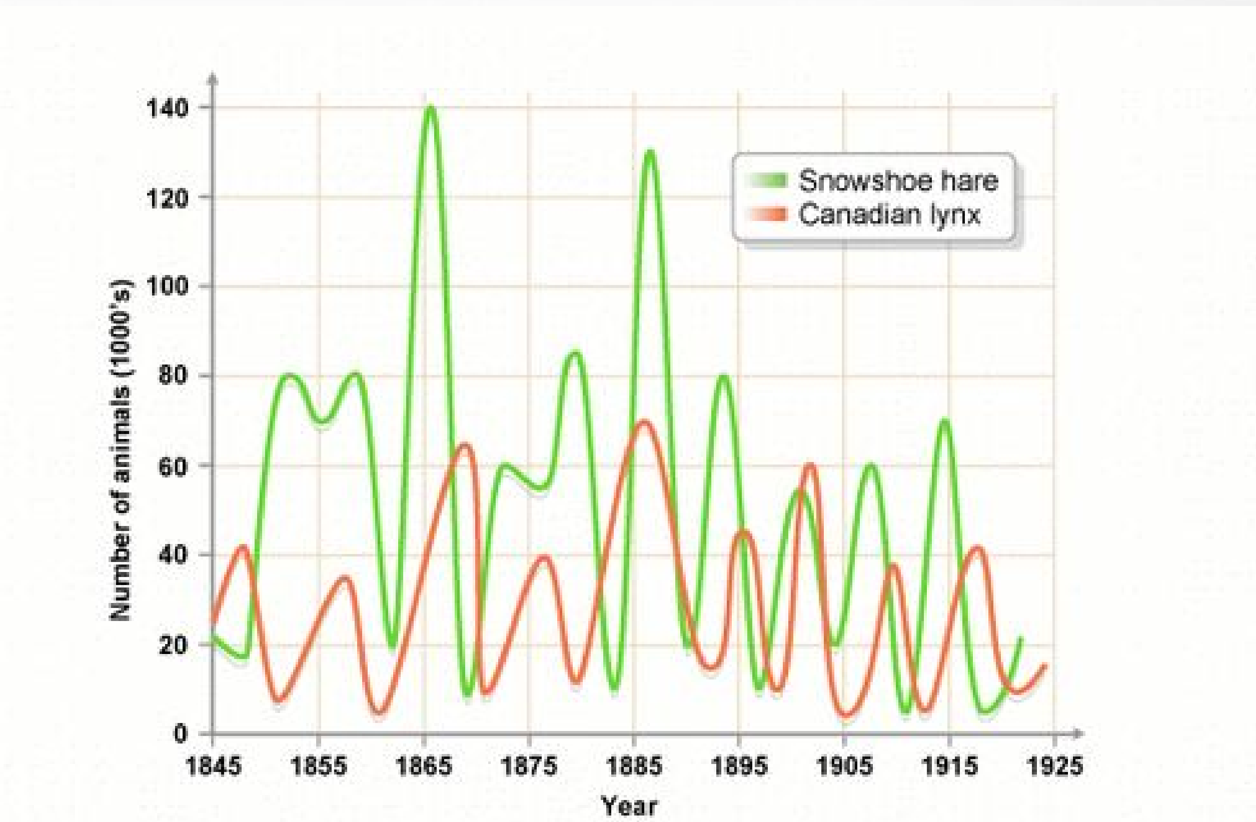
Sistemi caotici biologici

- Il cuore sano, il cui battito non è periodico ma caotico



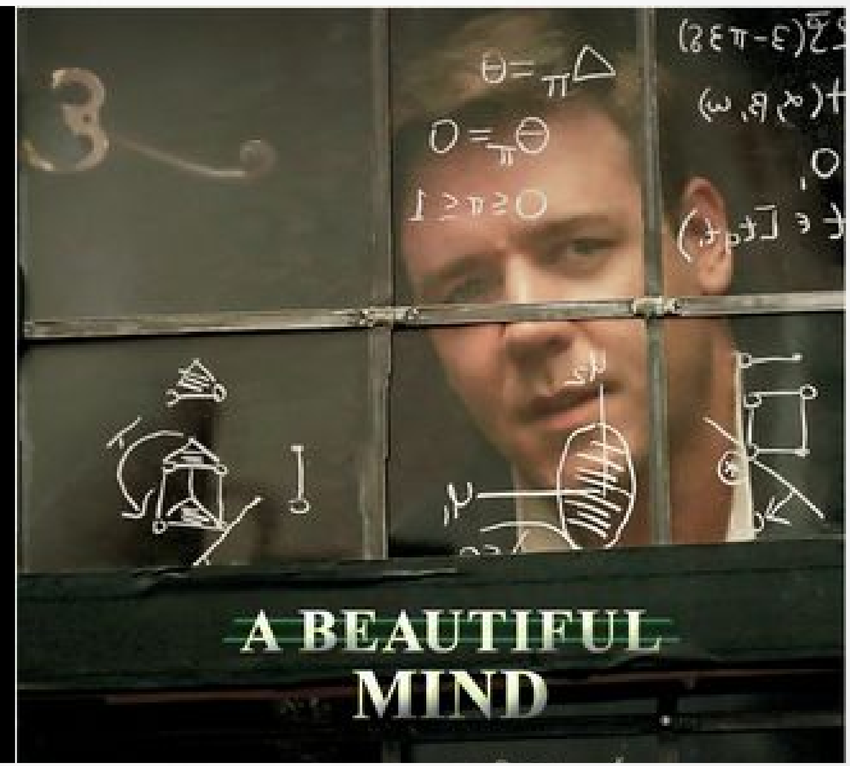
Sistemi caotici bio-ecologici

- La dinamica delle popolazioni (es. sistemi predatori-preda)



Sistemi caotici biologici

- Il funzionamento del cervello e della mente



Sistemi caotici sociologici

- I delicati equilibri familiari

Sistemi caotici bio-sociologici

- Le pandemie, che scoppiano all'improvviso

Sistemi caotici socio-economici

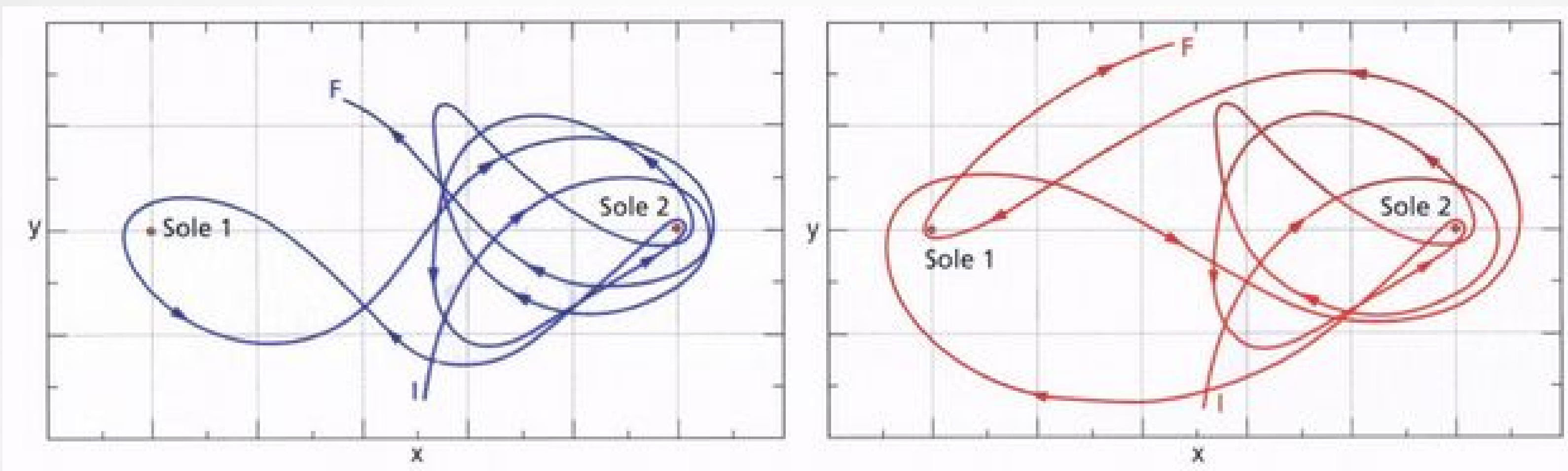
- Il mercato dei titoli, con le sue oscillazioni

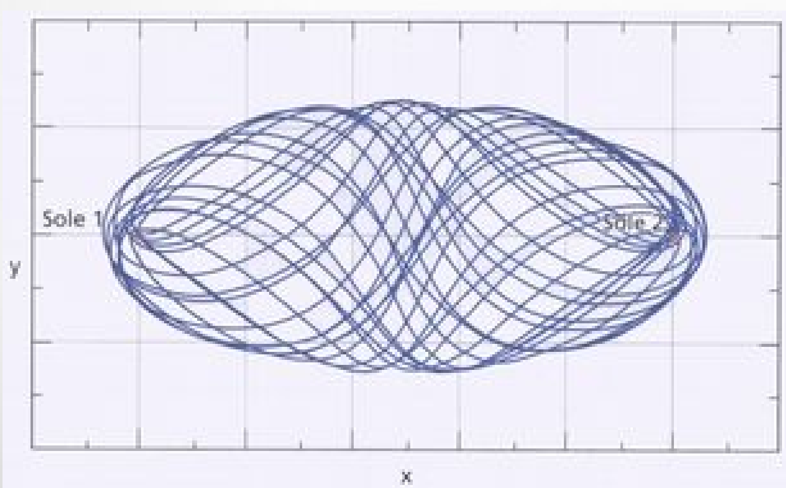
Sistemi caotici metereologici

- L'atmosfera, con i suoi fenomeni metereologici

Origini della teoria del caos

- Problema dei tre corpi

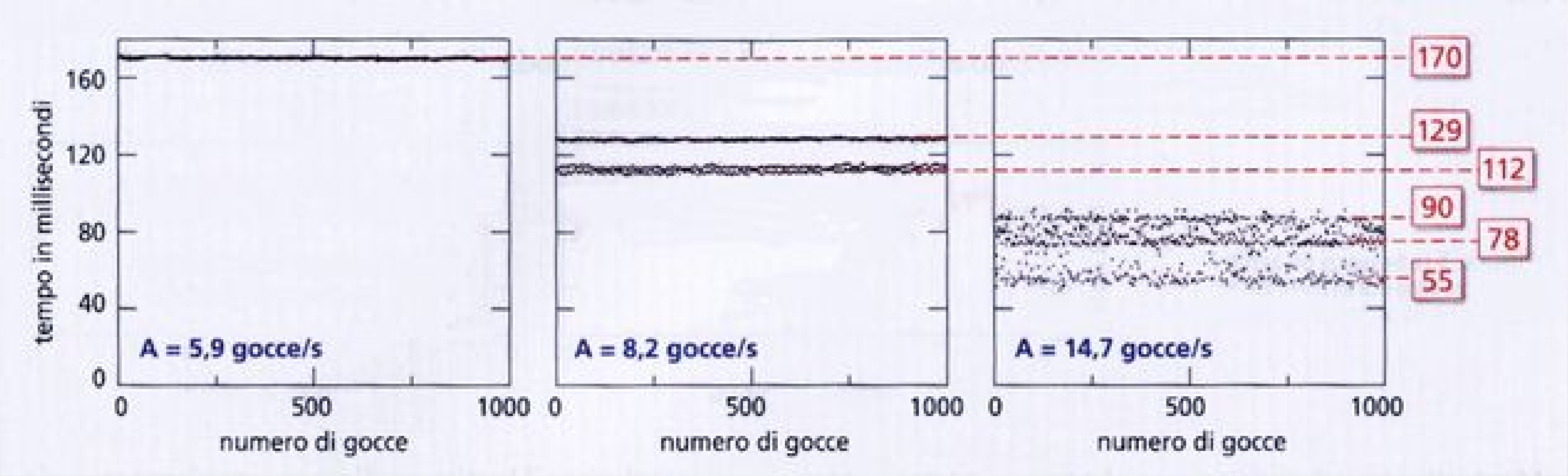




- Studiato alla fine del XIX secolo da Henri Poincaré (matematico, fisico, astronomo)

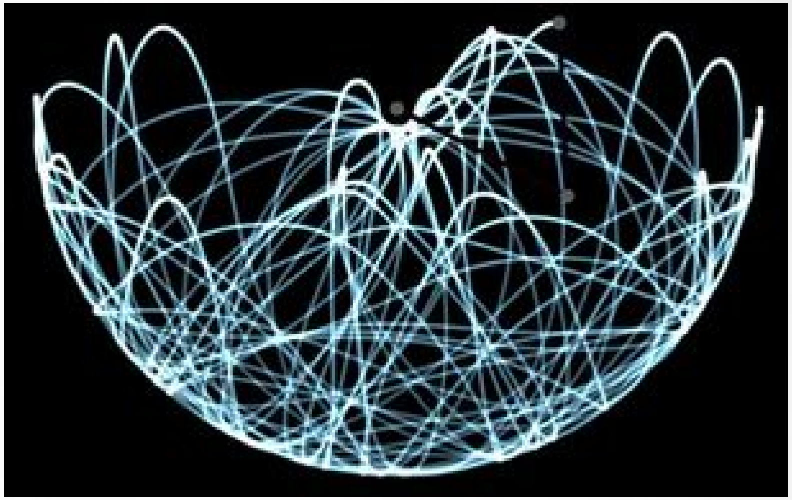
Il caos intorno a noi

- Variando il flusso del rubinetto, l'intervallo tra una goccia e l'altra varia in modo apparentemente casuale.

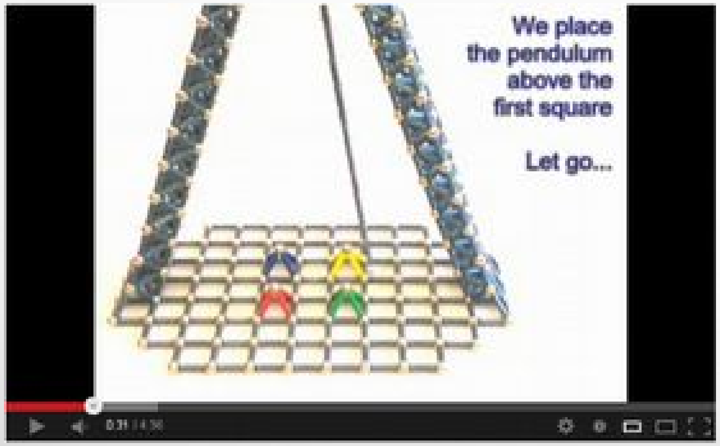


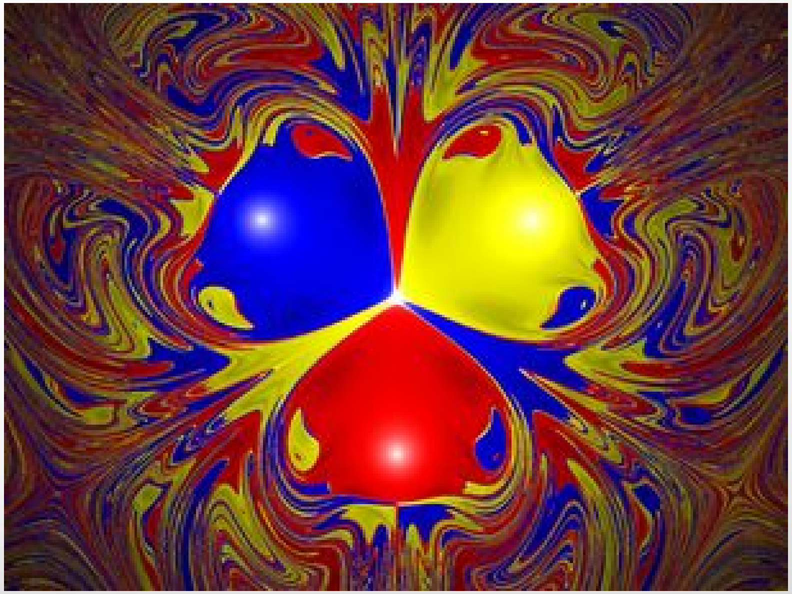
Doppio pendolo e pendolo magnetico

- Doppio pendolo



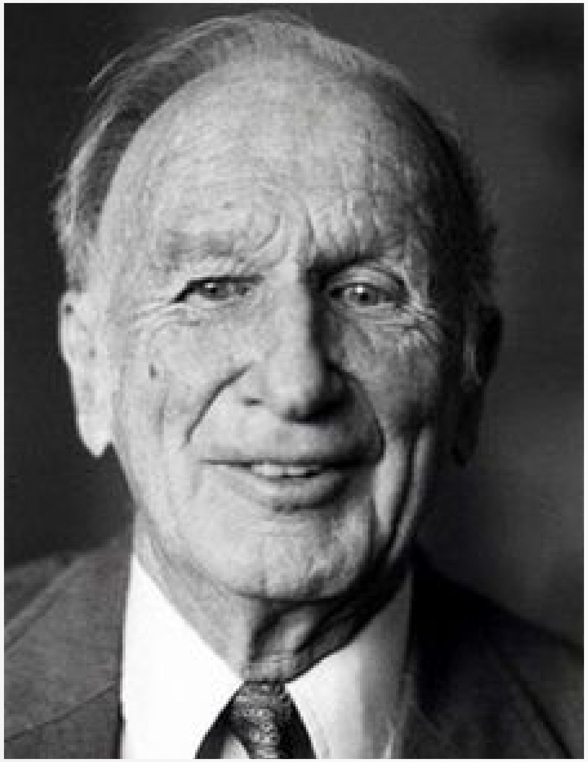
- Pendolo magnetico





Teoria del caos

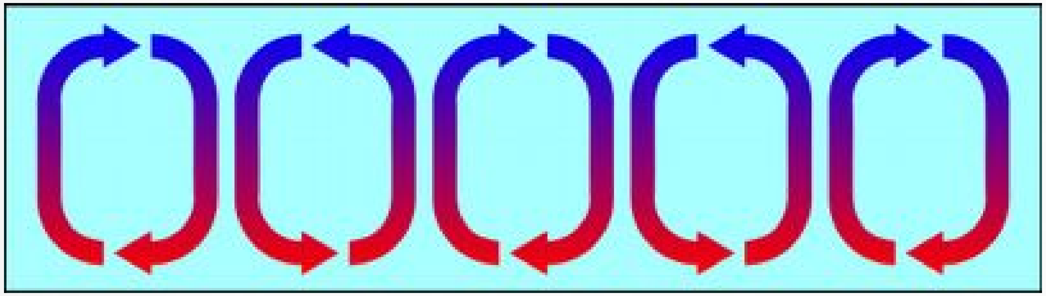
- Modelli semplici, dinamiche complesse ...

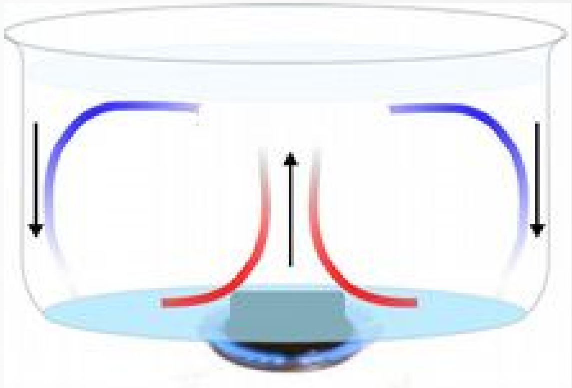


- Metereologia
  Edward Lorenz (1963)
- Demografia
  Robert May (1976)

Modello di Lorenz

- Descrive i moti di un fluido in un campo gravitazionale costante posto tra due piani a temperature fissate.





$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - xz - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

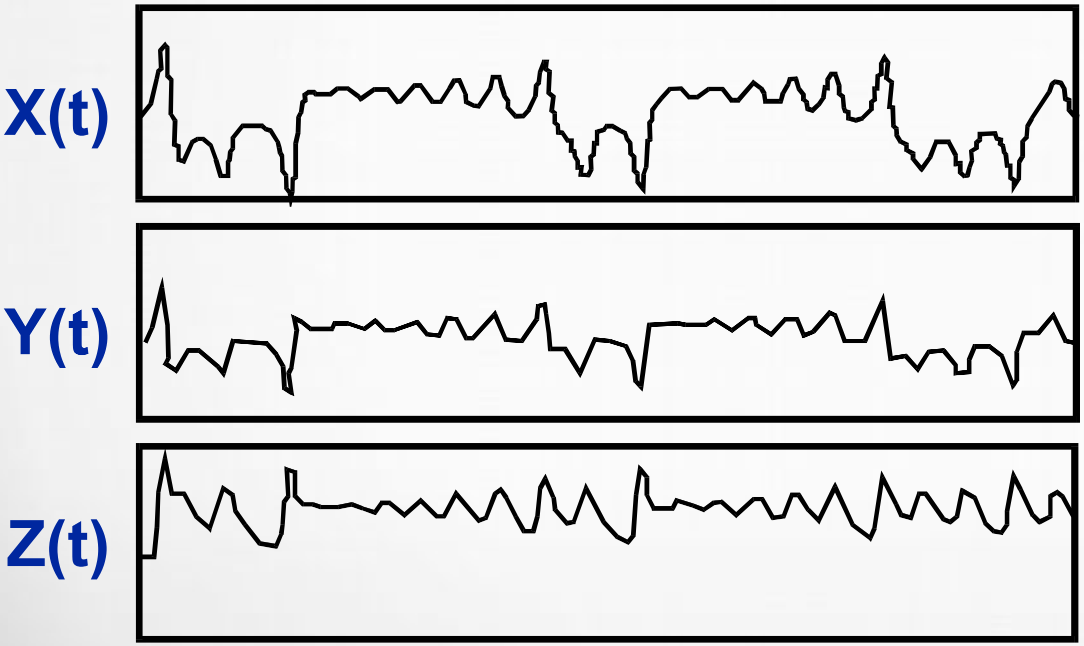
x = velocità delle celle convettive

y = differenza di temperatura tra correnti ascendenti e discendenti

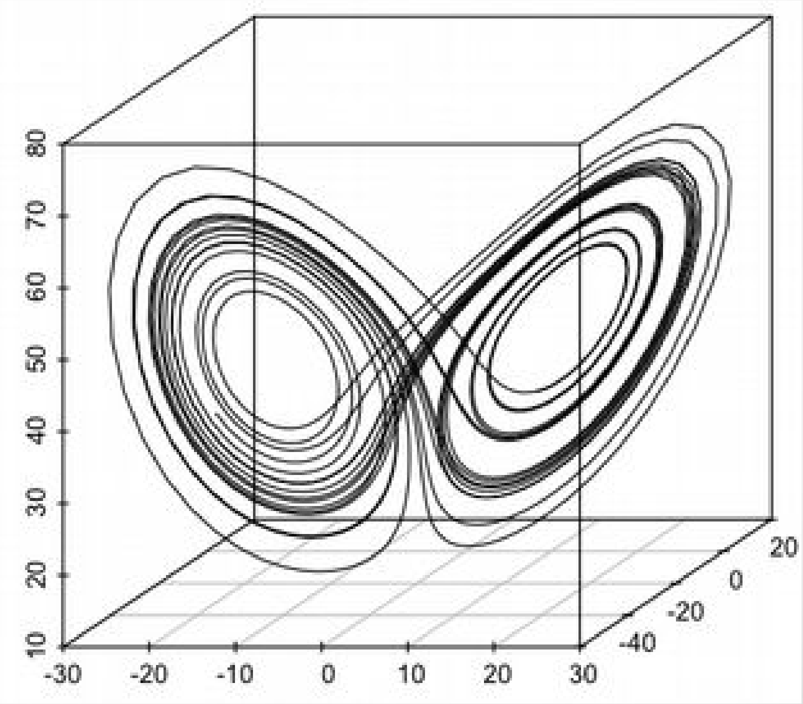
z = distorsione dalla linearità del profilo verticale di temperatura

Modello di Lorenz

- Per determinati valori delle variabili il modello manifesta un comportamento caotico e lo spazio delle fasi disegna un attrattore strano.



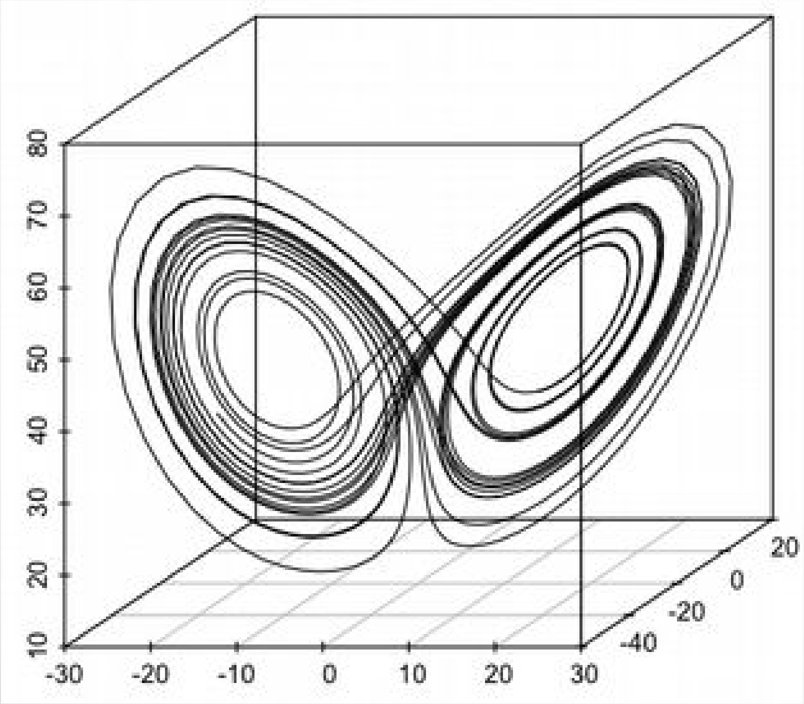
Serie temporale

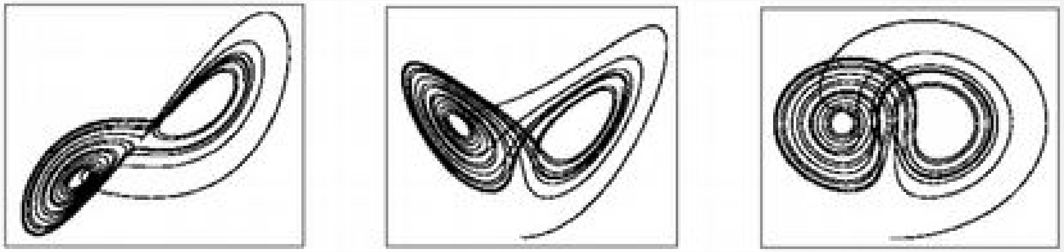


Spazio delle fasi

Modello di Lorenz

- Per determinati valori delle variabili il modello manifesta un comportamento caotico e lo spazio delle fasi disegna un attrattore strano.



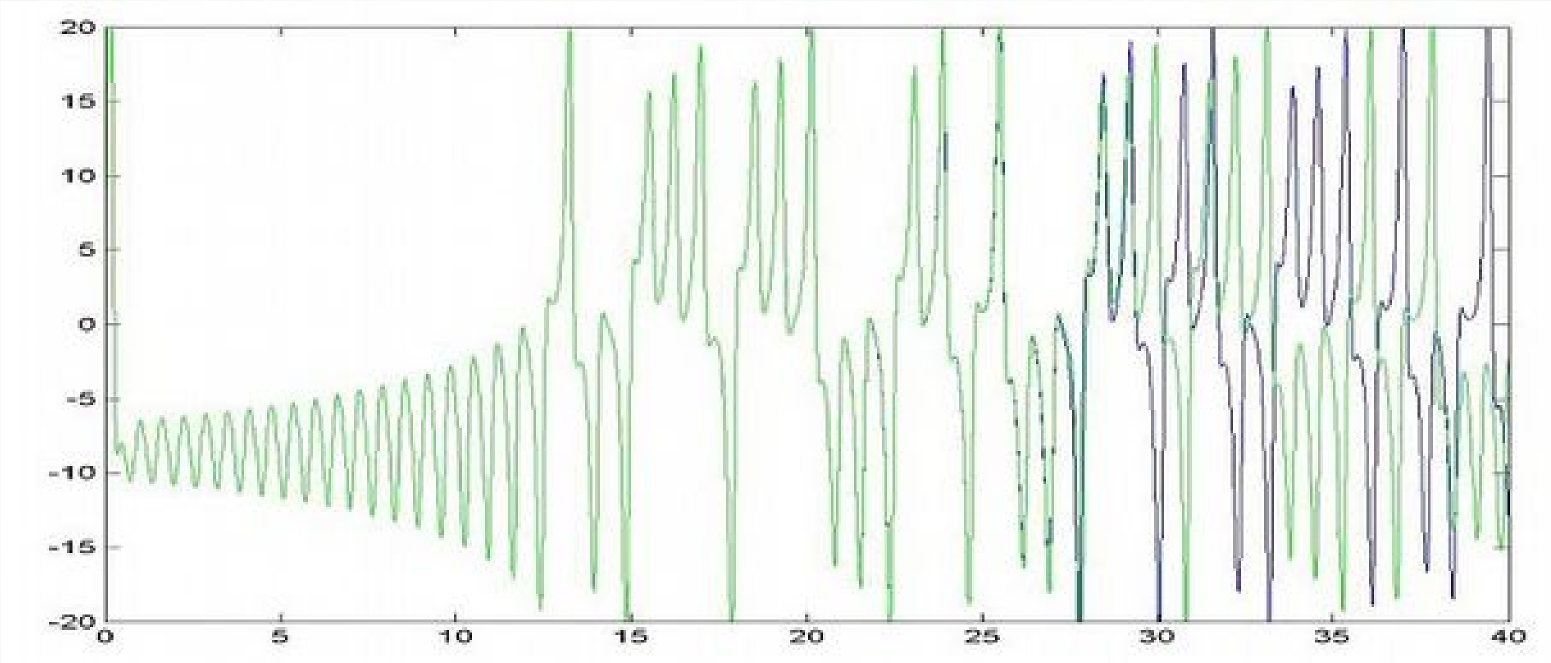


Proiezioni in due dimensioni

Spazio delle fasi

Modello di Lorenz: effetto farfalla

- Studiando il modello Lorenz ripeté una simulazione. Inserì i dati nel computer e andò a prendere un caffé ...



- Per semplicità aveva arrotondato il valore 0,506127 a 0,506 ...

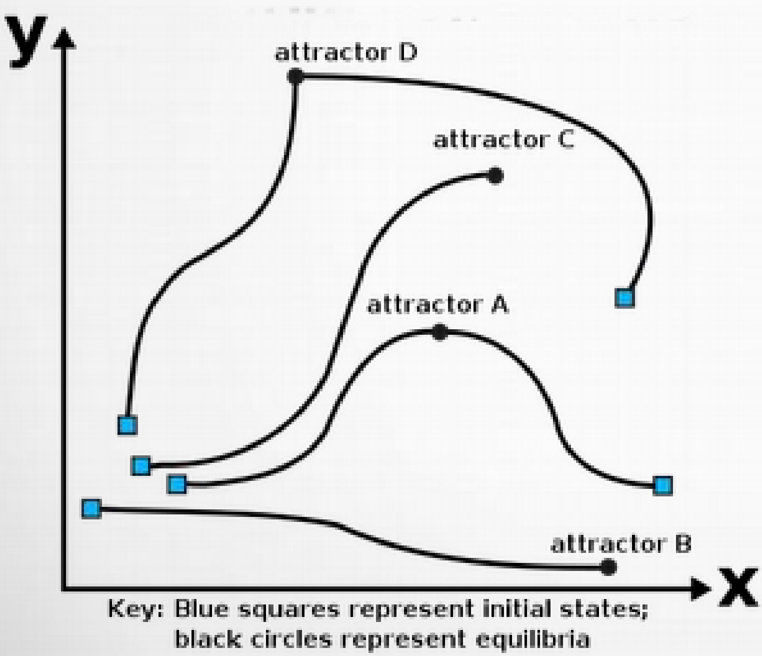
Modello di Lorenz: effetto farfalla

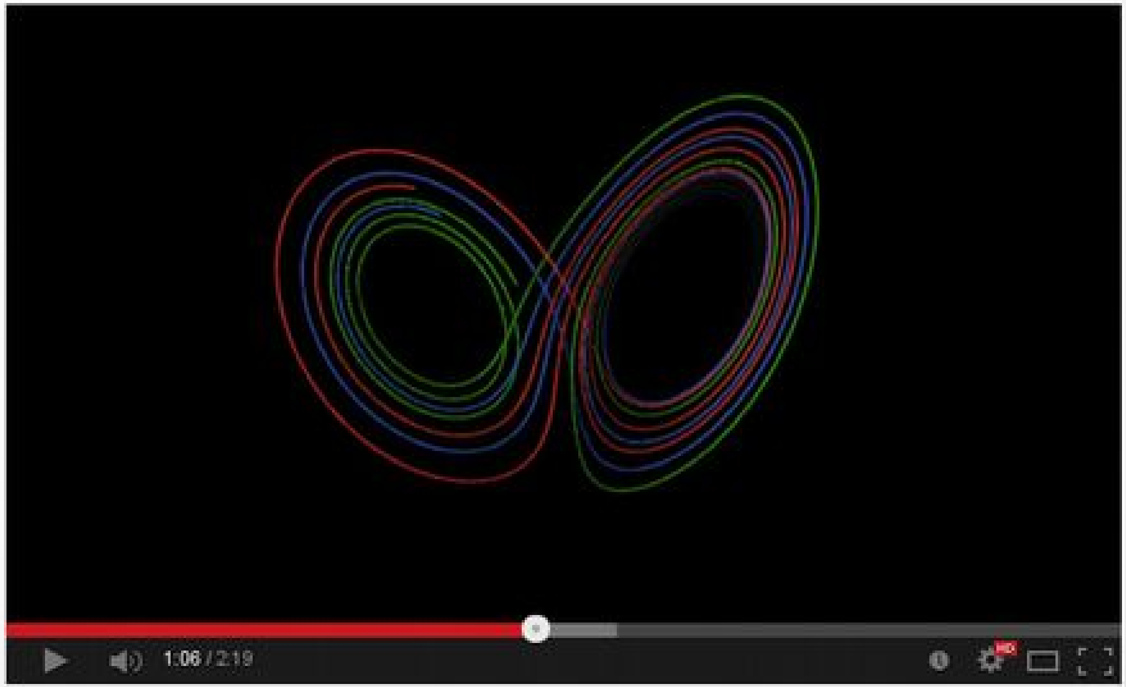
- Piccole perturbazioni nel sistema possono determinare enormi variazioni nella sua evoluzione.
- L'estrema sensibilità del sistema alle condizioni iniziali è noto come effetto farfalla:

Il battito d'ali di una farfalla in Brasile potrebbe scatenare un tornado in Texas.

Modello di Lorenz: effetto farfalla

- Piccole perturbazioni nel sistema possono determinare enormi variazioni nella sua evoluzione.





Modello di Lorenz: effetto farfalla

- Le conseguenze dell'effetto farfalla:

  ✔ Perturbare, anche poco,lo stato del sistema può stravolgere il suo comportamento e la sua evoluzione

  ✔ L'evoluzione del sistema è completamente imprevedibile

Storia dell'effetto farfalla

- Filastrocca popolare

Per colpa di un chiodo
si perse lo zoccolo
per colpa di uno zoccolo
si perse il cavallo
per colpa di un cavallo
si perse il cavaliere
per colpa di un cavaliere
si perse la battaglia
per colpa di una battaglia
si perse il regno!

Storia dell'effetto farfalla

“Tutto è connesso, il minimo cambiamento estende il suo effetto a qualunque distanza”

Gottfried Leibniz

“Se il naso di Cleopatra fosse stato più corto, tutta la faccia della Terra sarebbe cambiata”

Blaise Pascal

Storia dell'effetto farfalla

Ipotizzato da James Maxwell (l'autore delle celebri equazioni del campo elettromagnetico) nel lontano 1876.

Dimostrato alla fine del XIX° secolo da Henri Poincaré nel problema dei tre corpi.

Storia dell'effetto farfalla

Descritto da Ray Bradbury nel racconto del 1952: “A Sound of Thunder” (Rumore di tuono)

“Riscoperto” da Alan Turing (l’ideatore del computer)

«Lo spostamento di un singolo elettrone per un miliardesimo di centimetro, a un momento dato, potrebbe significare la differenza tra due avvenimenti molto diversi, come l'uccisione di un uomo un anno dopo, a causa di una valanga, o la sua salvezza»
da *Macchine calcolatrici e intelligenza*, (1950)

Effetto farfalla nel cinema

- In "Jurassic Park".

Il matematico prof. Ian Malcolm (Jeff Goldblum) spiega l'effetto farfalla e la teoria del caos.

Effetto farfalla nel cinema

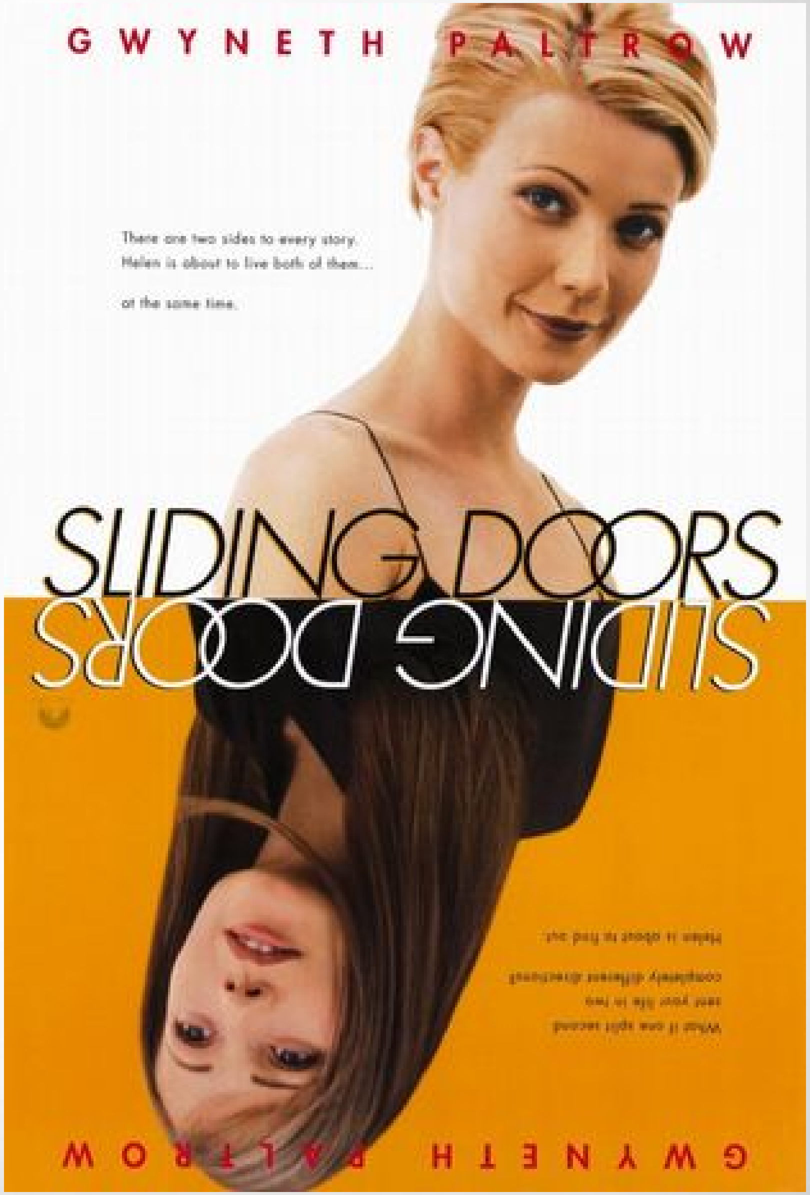
- "The Butterfly Effect"

Evan è capace di modificare gli eventi chiave accadutigli nel tempo, modificando quindi il presente ...

Effetto farfalla nel cinema

- In "Sliding doors".

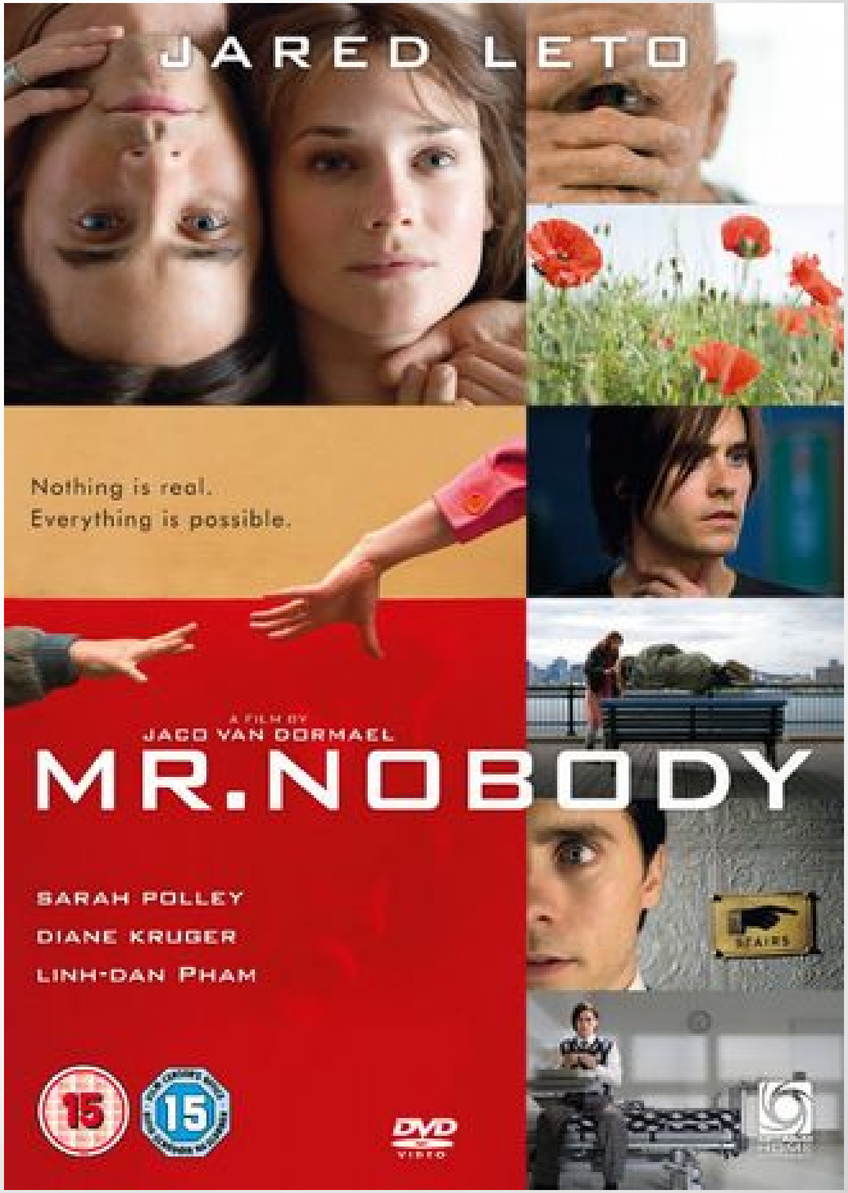
"*Prendere – oppure perdere – la metropolitana può cambiare la vita ...*"



Effetto farfalla nel cinema

- In "Mr. nobody"
- Trailer (ITA)

"... due mesi prima, quando un disoccupato brasiliano bollì un uovo sodo ..."



Effetto farfalla nel cinema

- In "Il curioso caso di Benjamin Button".

Coincidenze insignificanti possono avere conseguenze disastrose...

Effetto farfalla nel cinema

- In “Babel”.

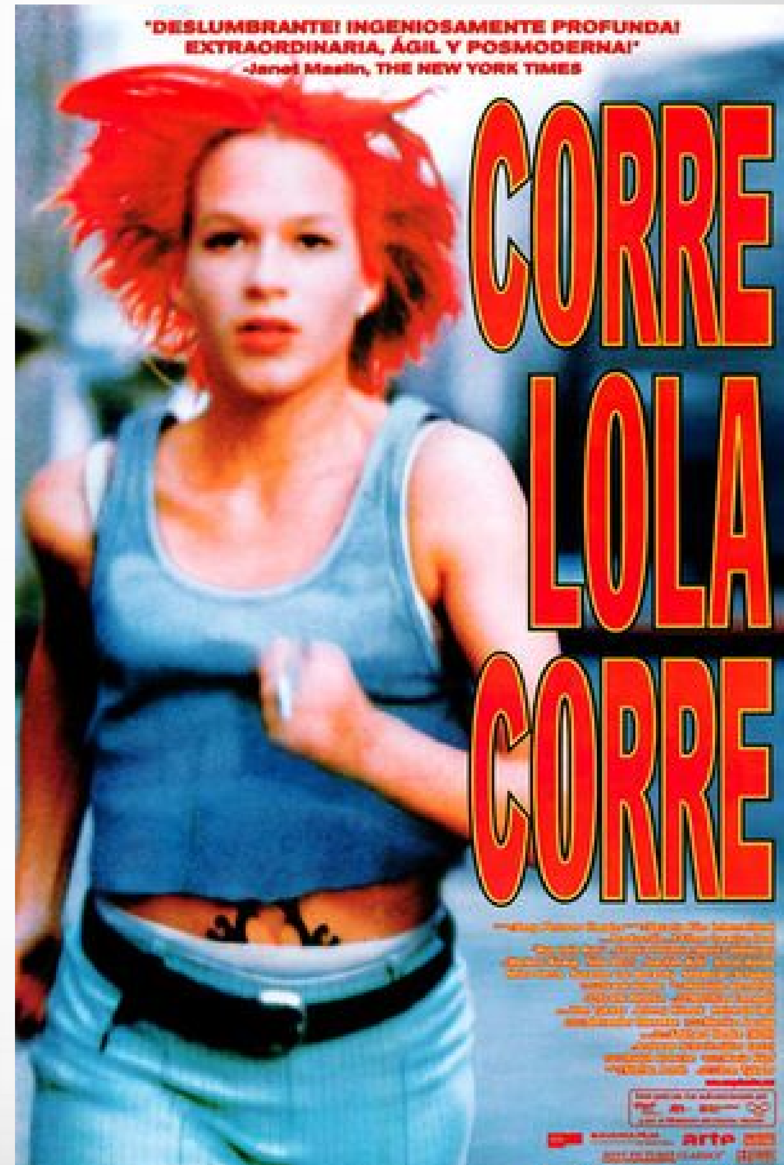
Every gun has a past and every bullet unfolds a new story

Effetto farfalla nel cinema

- In "Lola corre".

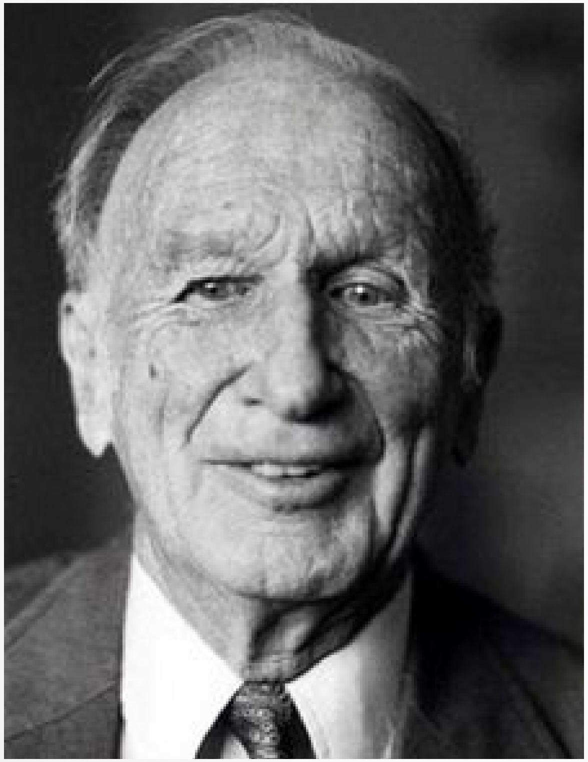
- Trailer

Ci sono brevi istanti che possono fare la differenza tra la vita e la morte...



Teoria del caos

- Modelli semplici, dinamiche complesse ...



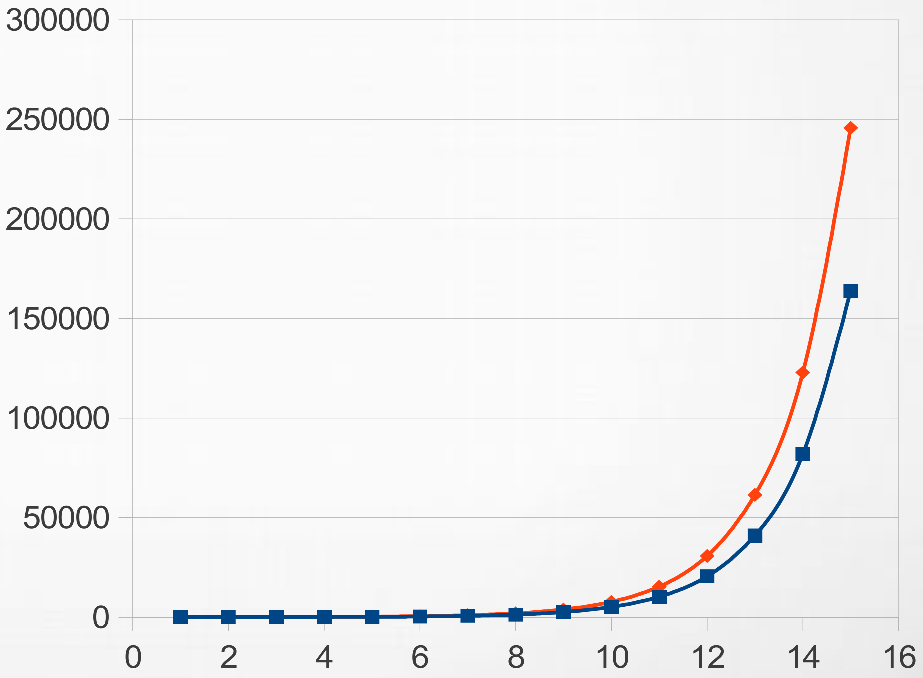
- Metereologia
  Edward Lorenz (1963)
- Demografia
  Robert May (1976)

Crescita esponenziale

- Modello demografico in cui crescita della popolazione dipendente esclusivamente dal potenziale biotico (r)
  (n° individui / individuo / unità di tempo)

$$x_{(t+1)} = \lambda x_{(t)}$$

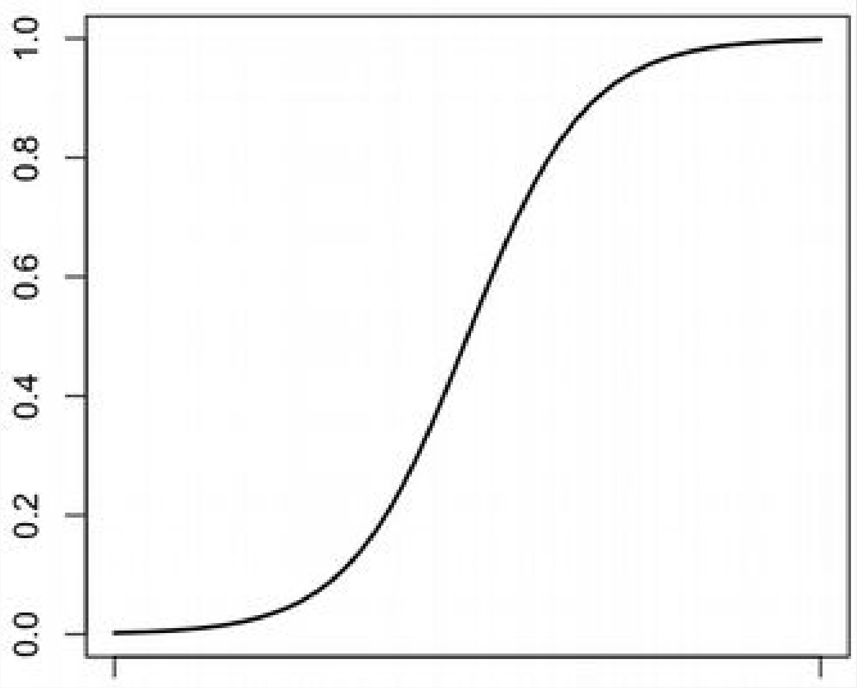
dove $\lambda = 1 + r$



- Modello teorico senza “resistenza ambientale”

Mappa logistica

- Il fattore $(1-x_t)$ rende il modello più realistico ed esprime la <u>resistenza ambientale</u>.

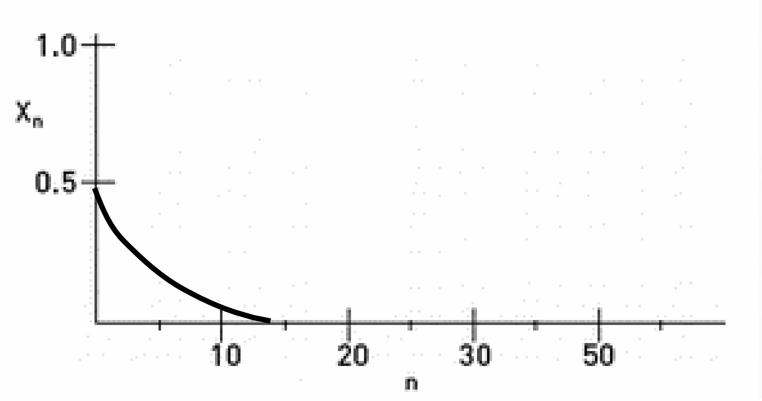


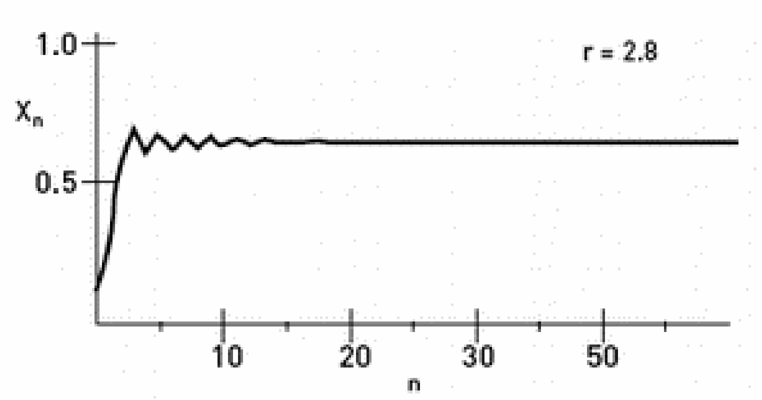
$$x_{(t+1)} = \lambda\, x_{(t)}(1 - x_{(t)})$$

x_t (numero compreso tra 0 e 1) rappresenta il rapporto tra la popolazione esistente e quella massima possibile al tempo t

Mappa logistica: stato stazionario

- All'aumentare del parametro r il sistema passa dallo stato stazionario al caos attraversando una serie di oscillazioni intorno a un punto di equilibrio (biforcazioni).

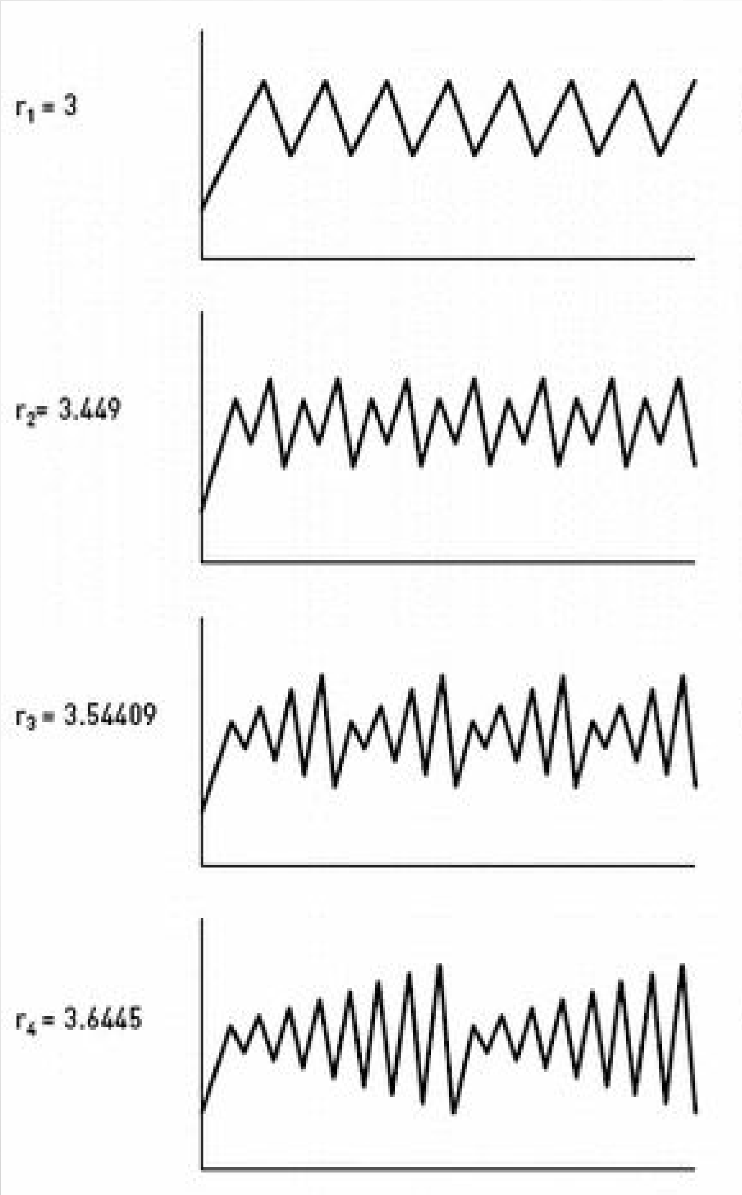




- Per $r < 1$
  la popolazione si ha l'**estinzione**

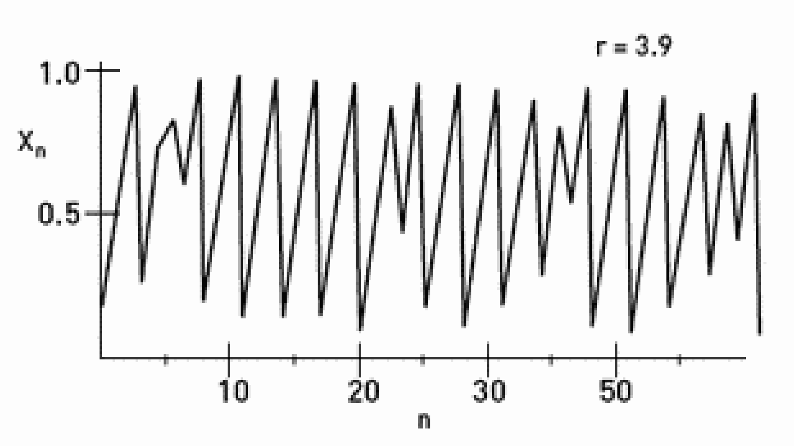
- Per $r = 2,8$
  dopo alcune oscillazioni
  la popolazione raggiunge
  lo **stato stazionario**

Mappa logistica: biforcazioni



- Per r = 3
  il sistema oscilla con un **periodo 2**
- Per r = 3,449
  il sistema oscilla con un **periodo 4**
- Per r = 3,544409
  il sistema oscilla con un **periodo 8**
- Per r = 3,6445
  il sistema oscilla con un **periodo 16**

Mappa logistica: caos



- La maggior parte dei valori > 3,56995 determinano un **comportamento caotico**

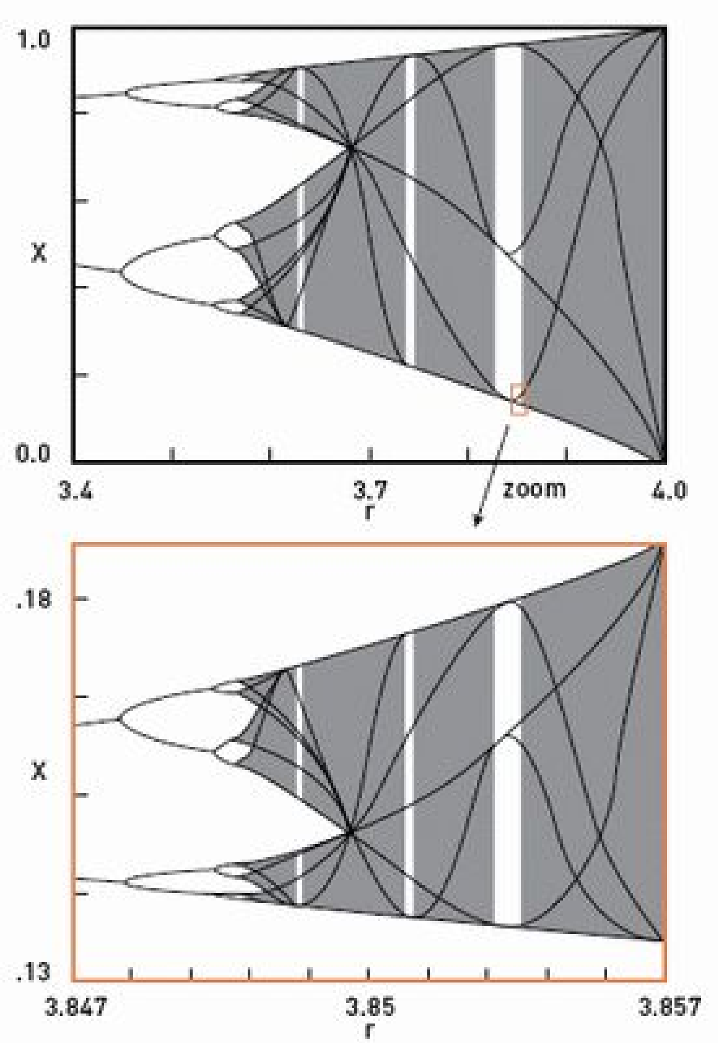
✔ Alternanza ordine e caos

✔ Biforcazioni

✔ Costante di Feigenbaum = 4.669

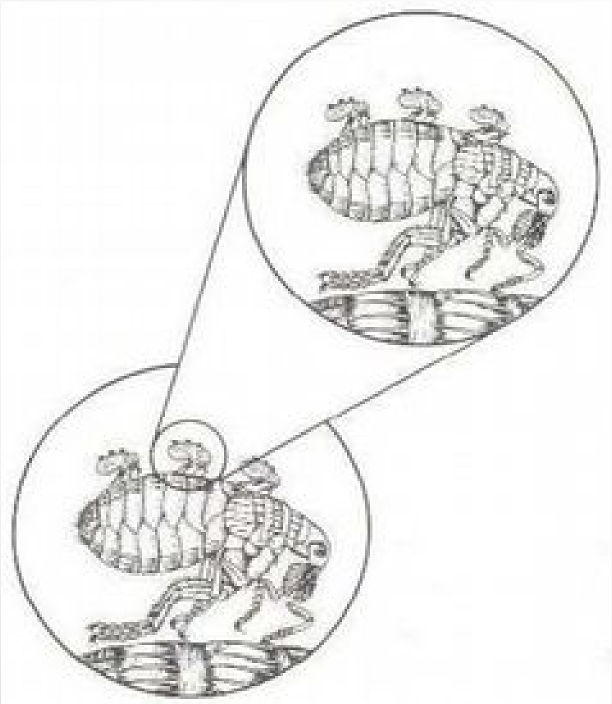
✔ Carattere frattale (autosomiglianza)

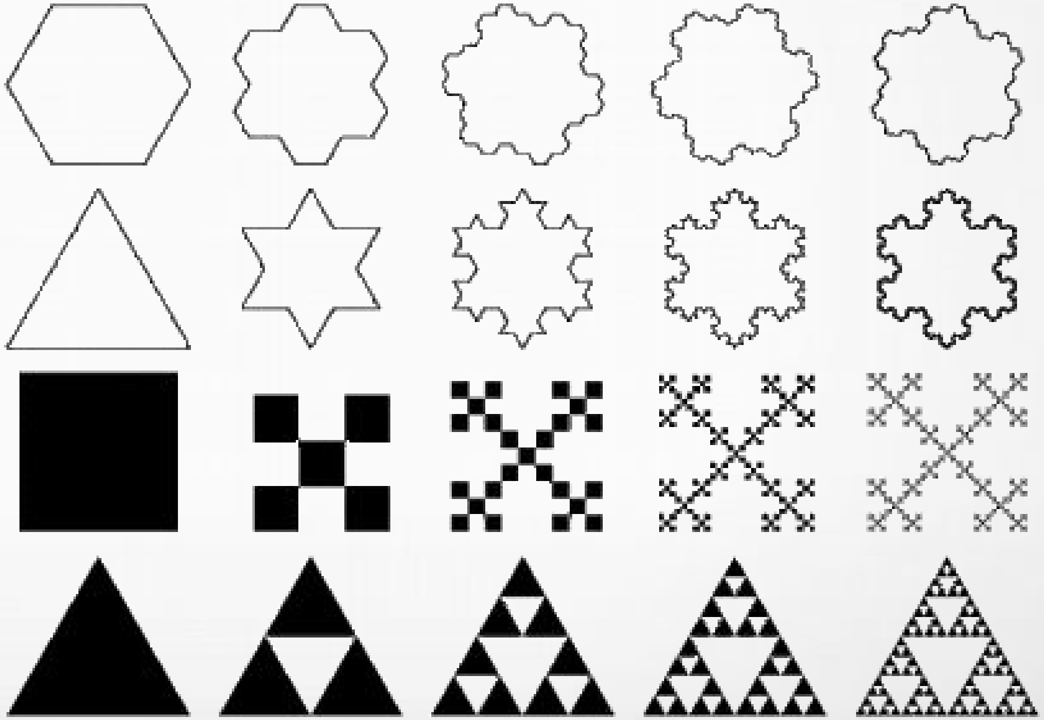
Diagramma di Feigenbaum



Frattali

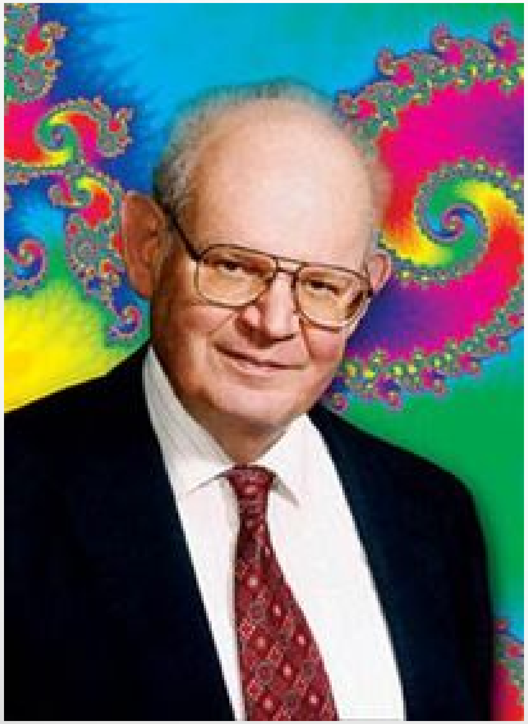
- Un frattale è un oggetto che mostra una invarianza di scala, ovvero ha la stessa struttura a tutte le scale.

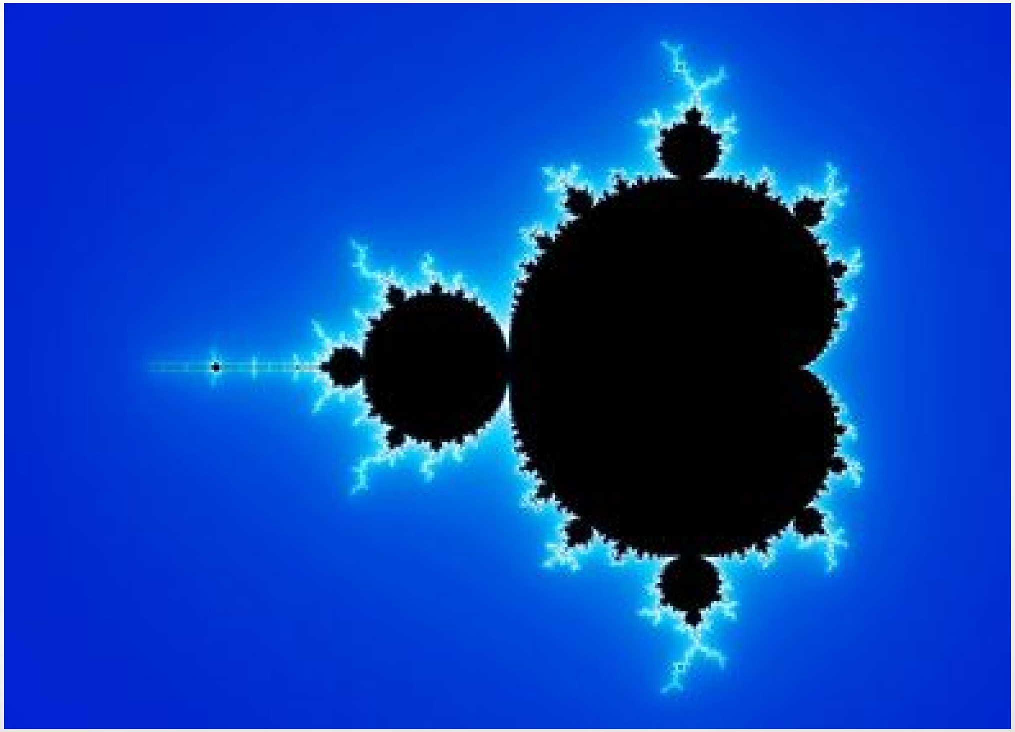




Frattali

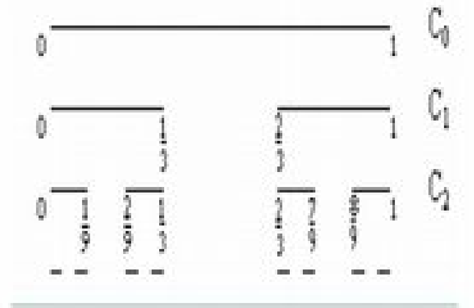
- Il termine frattale fu coniato da Benoît Mandelbrot e ha origine nel termine latino fractus, poichè la dimensione di un frattale non è intera.





Frattali

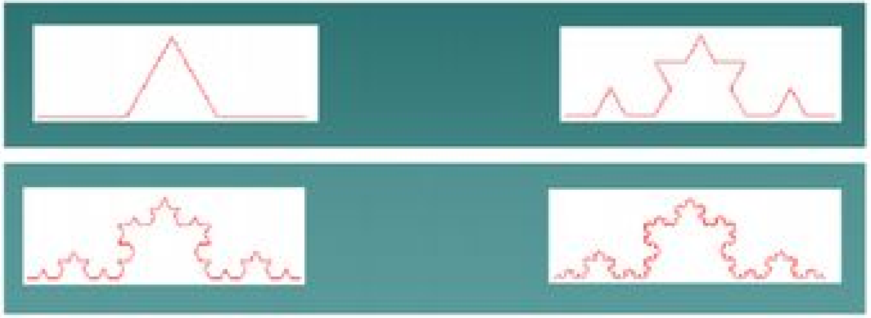
- Dimensione frattale della Polvere di Cantor



N	ε	Itera-zione
1	1	0
2	1/3	1
2^2	$(1/3)^2$	2
2^n	$(1/3)^n$	n

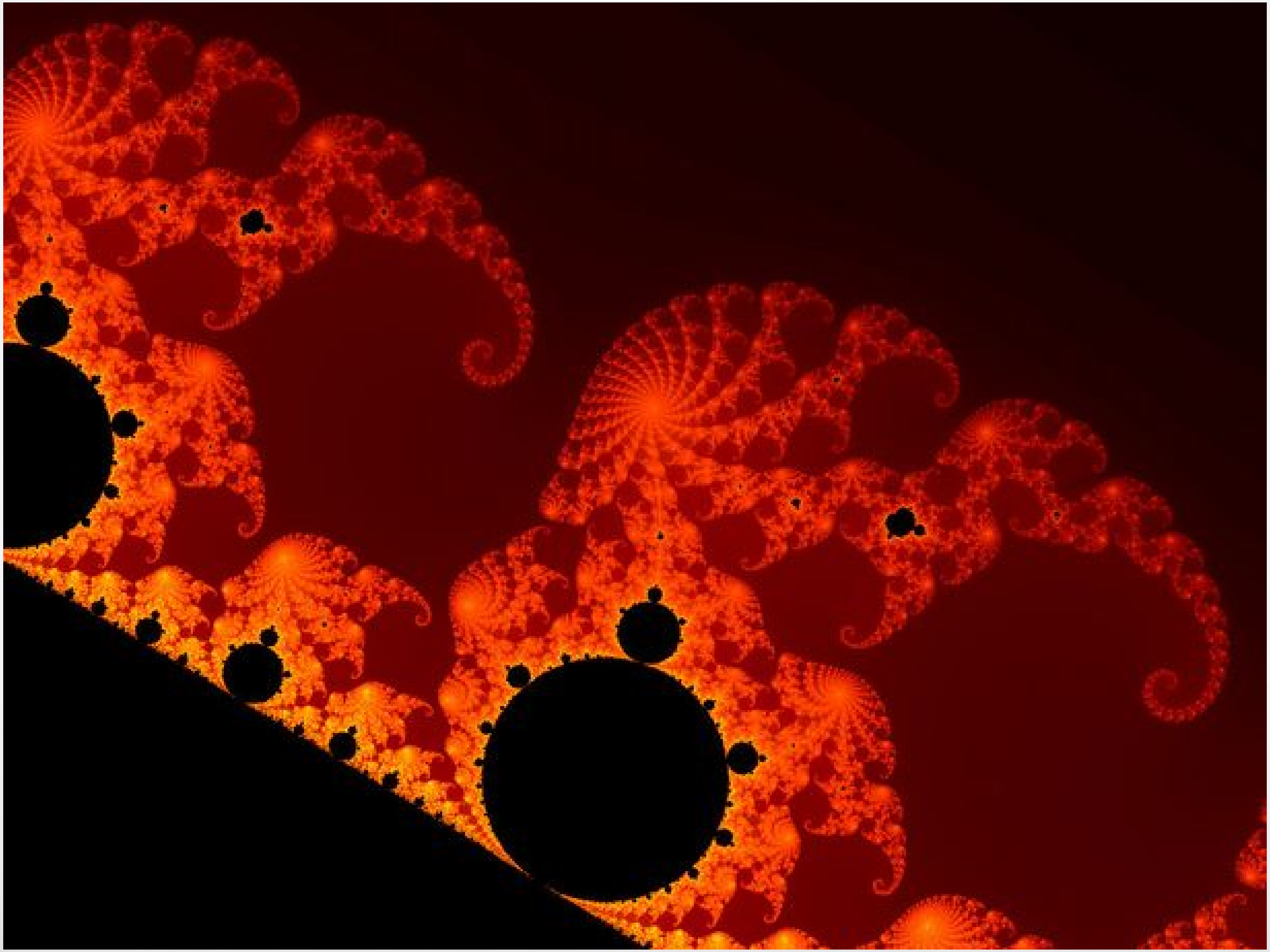
$$D_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(2)^n}{\ln(3)^n} = 0.63..$$

- Dimensione frattale della Curva di Kock

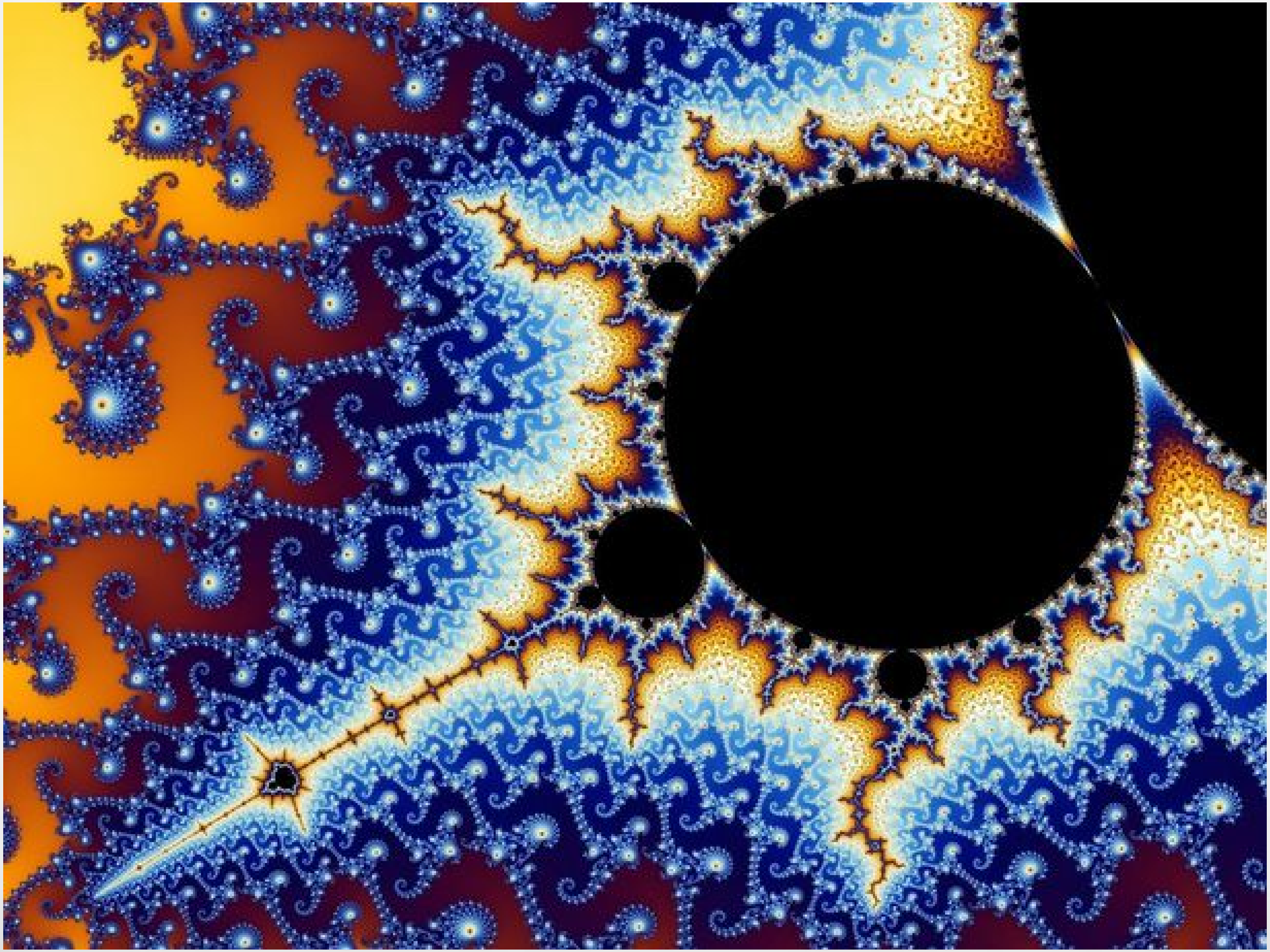


$$D_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26..$$

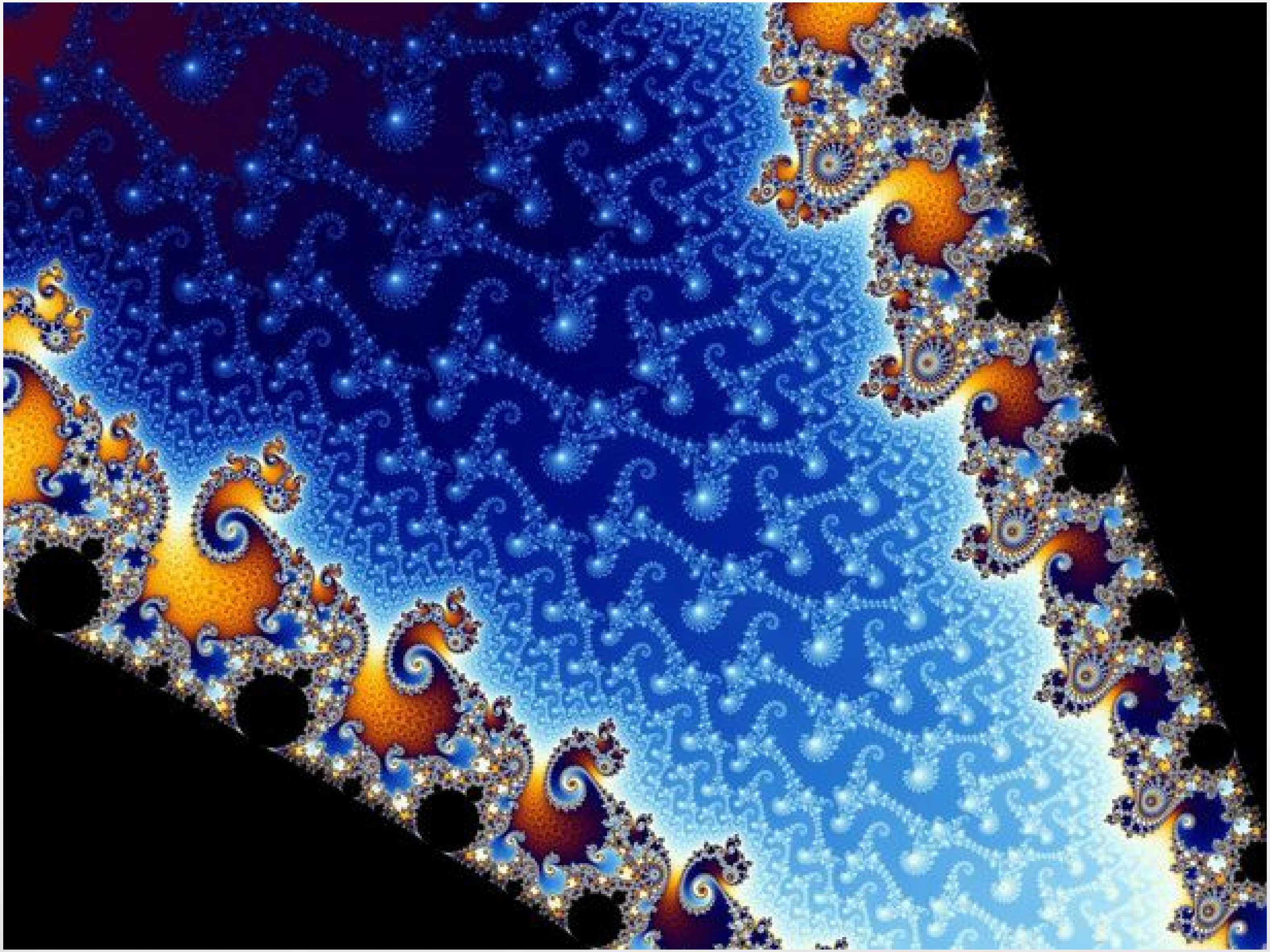
Frattali



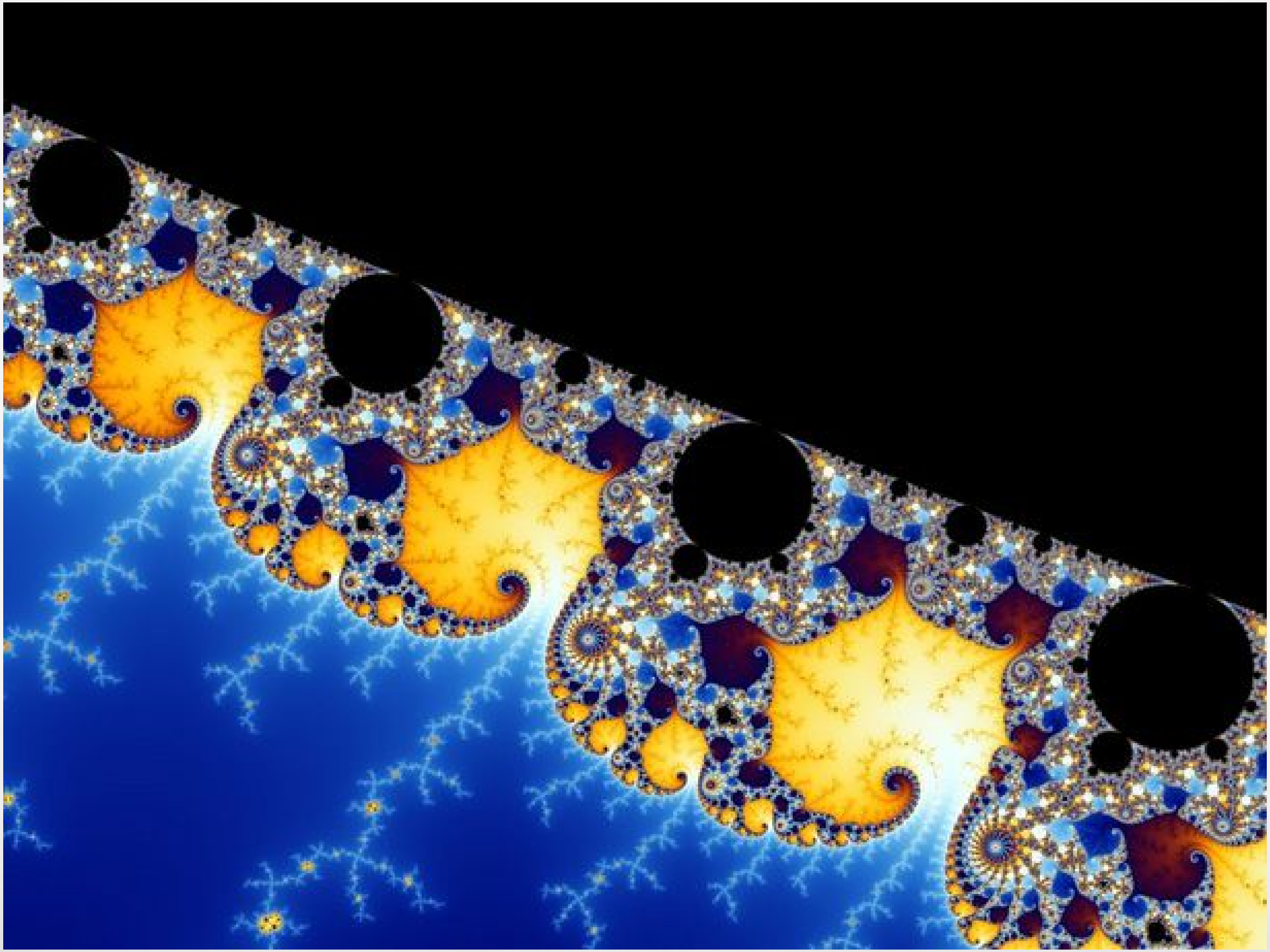
Frattali



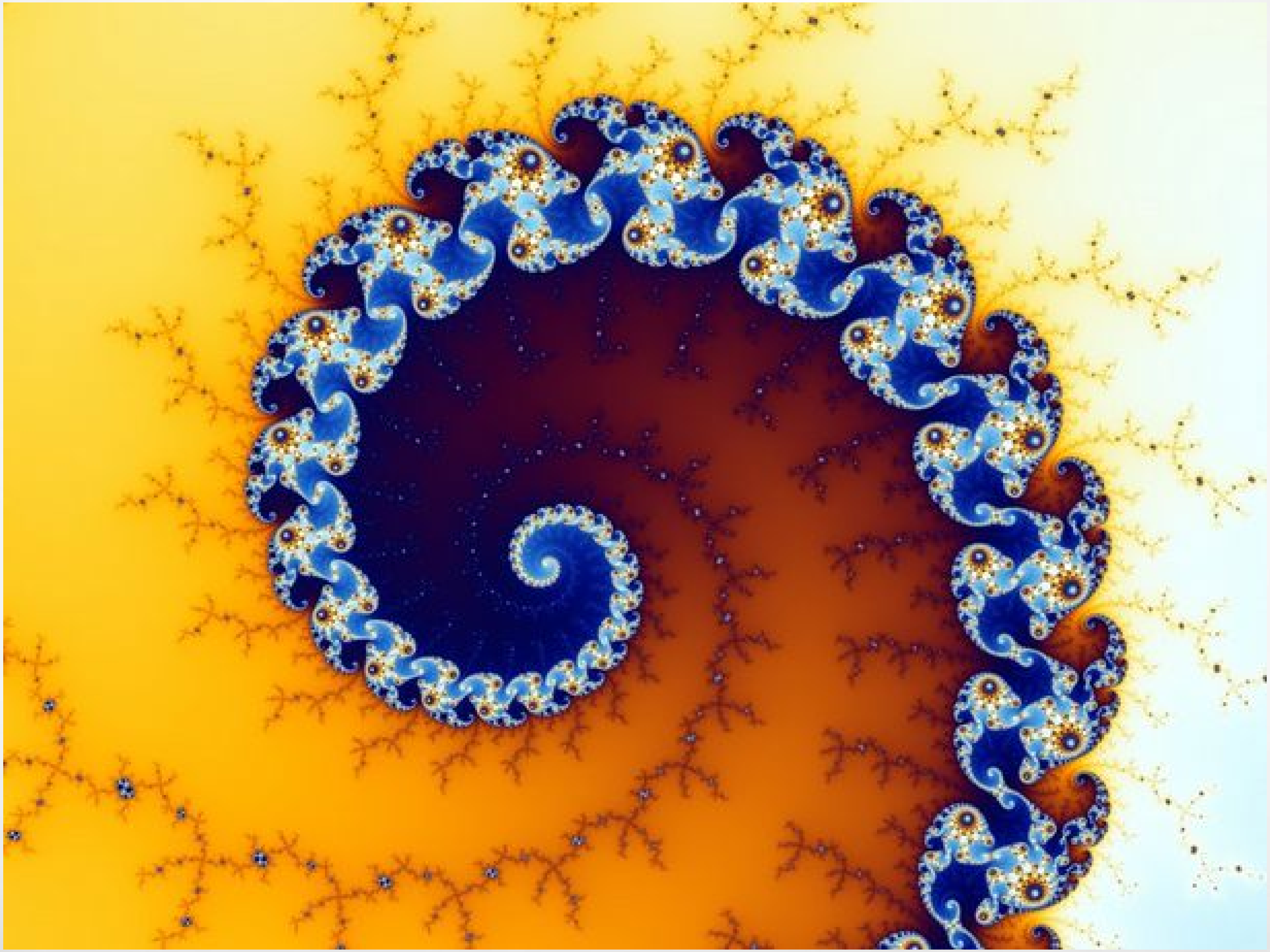
Frattali



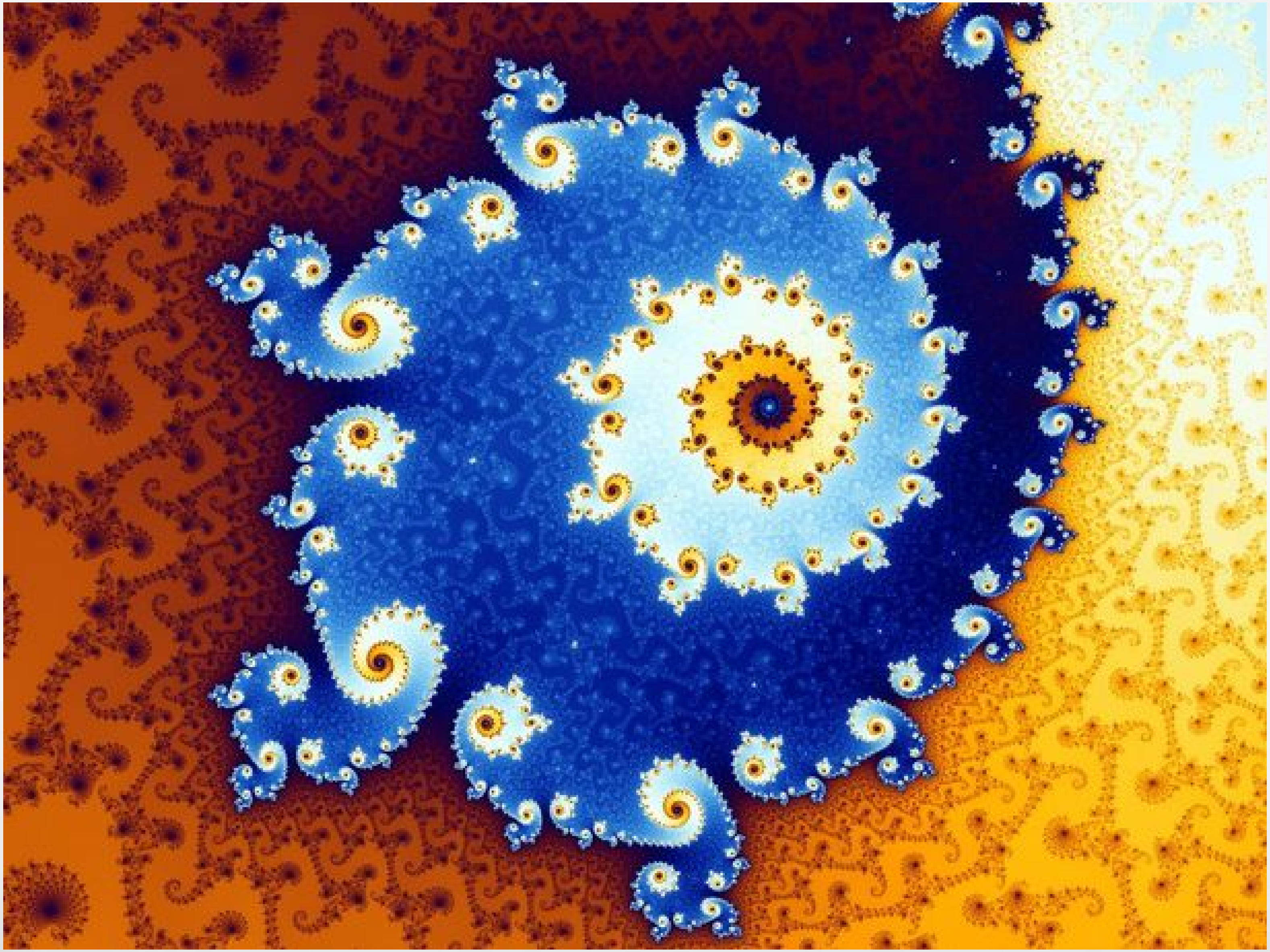
Frattali



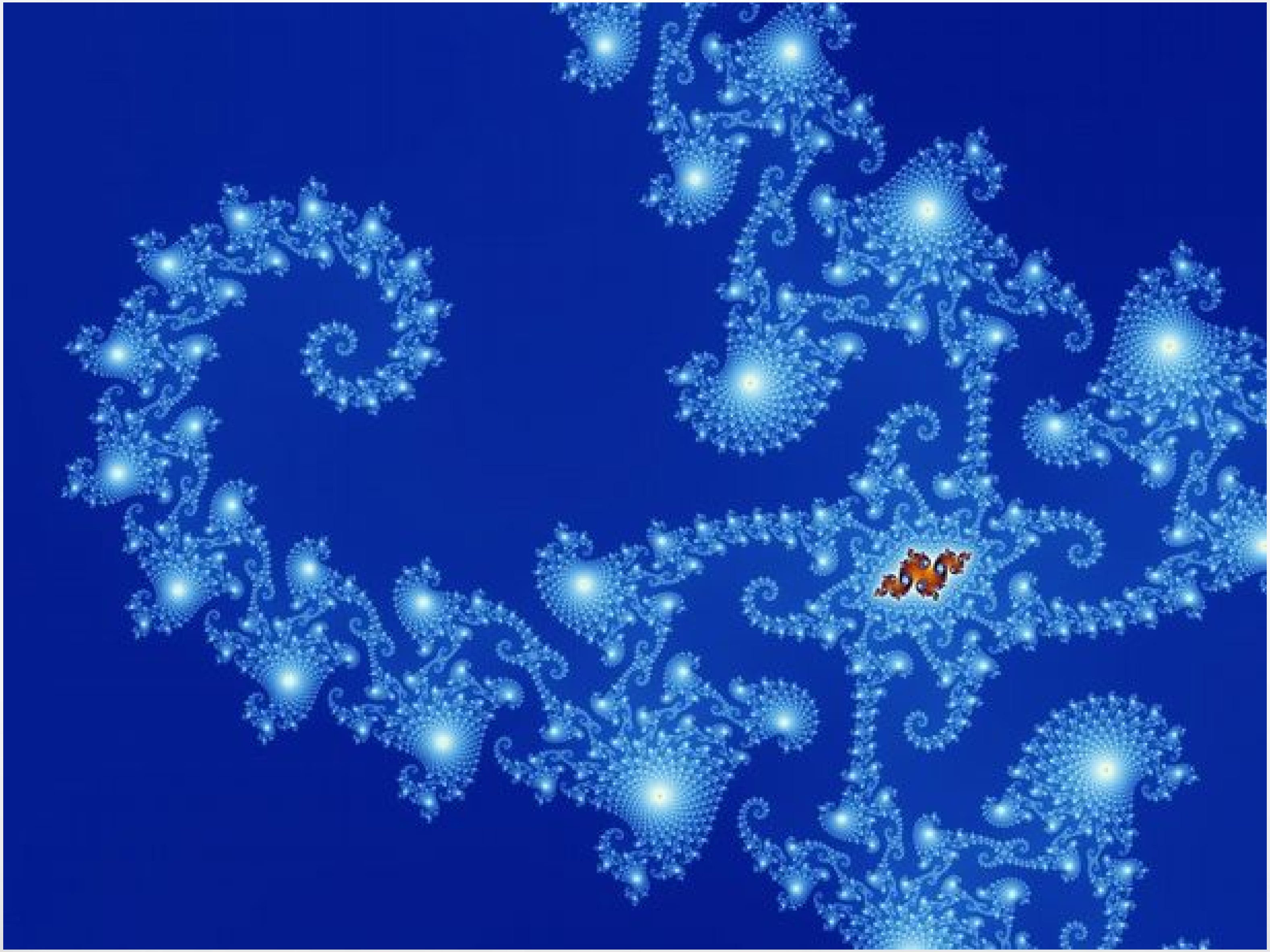
Frattali



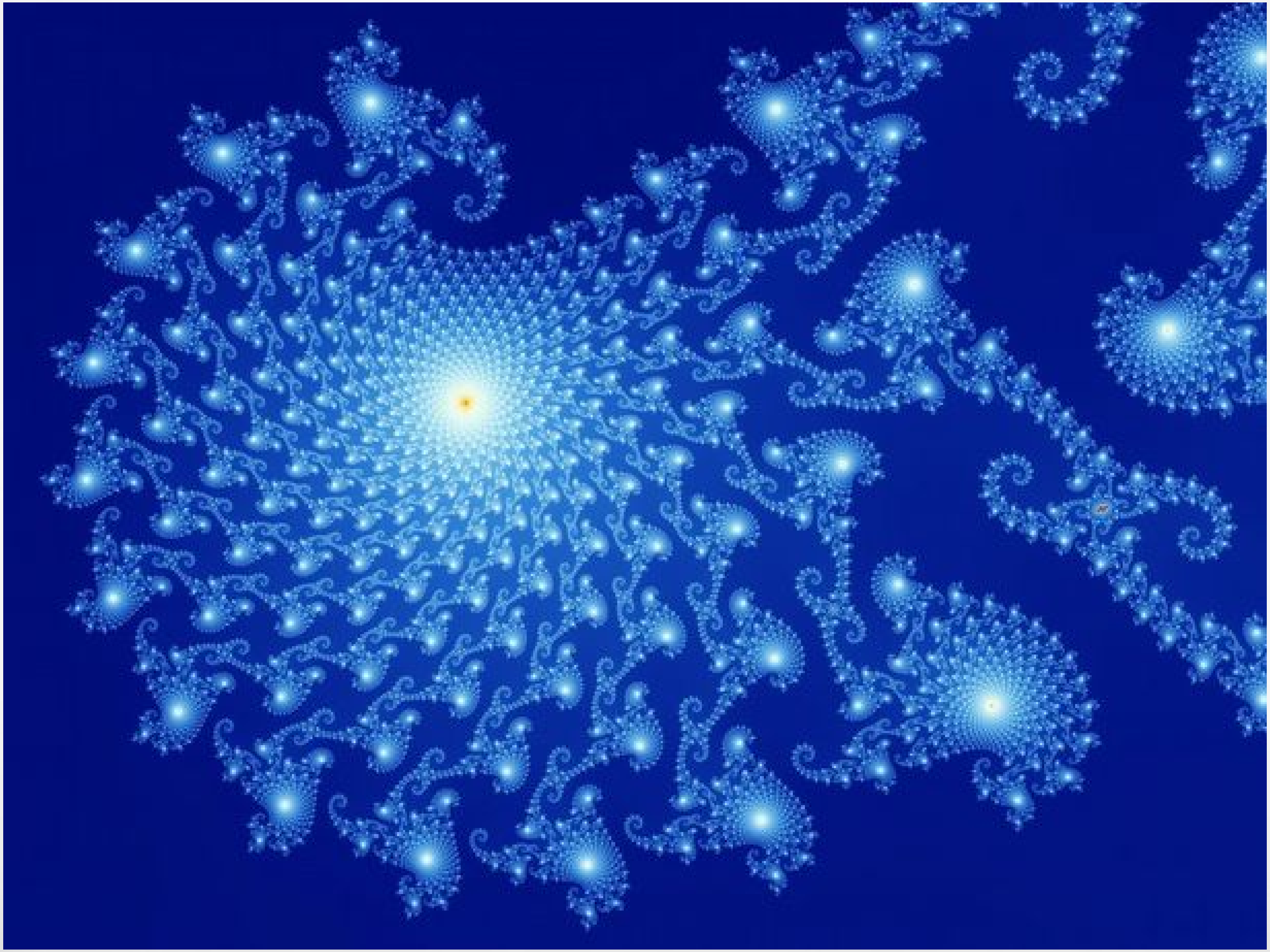
Frattali



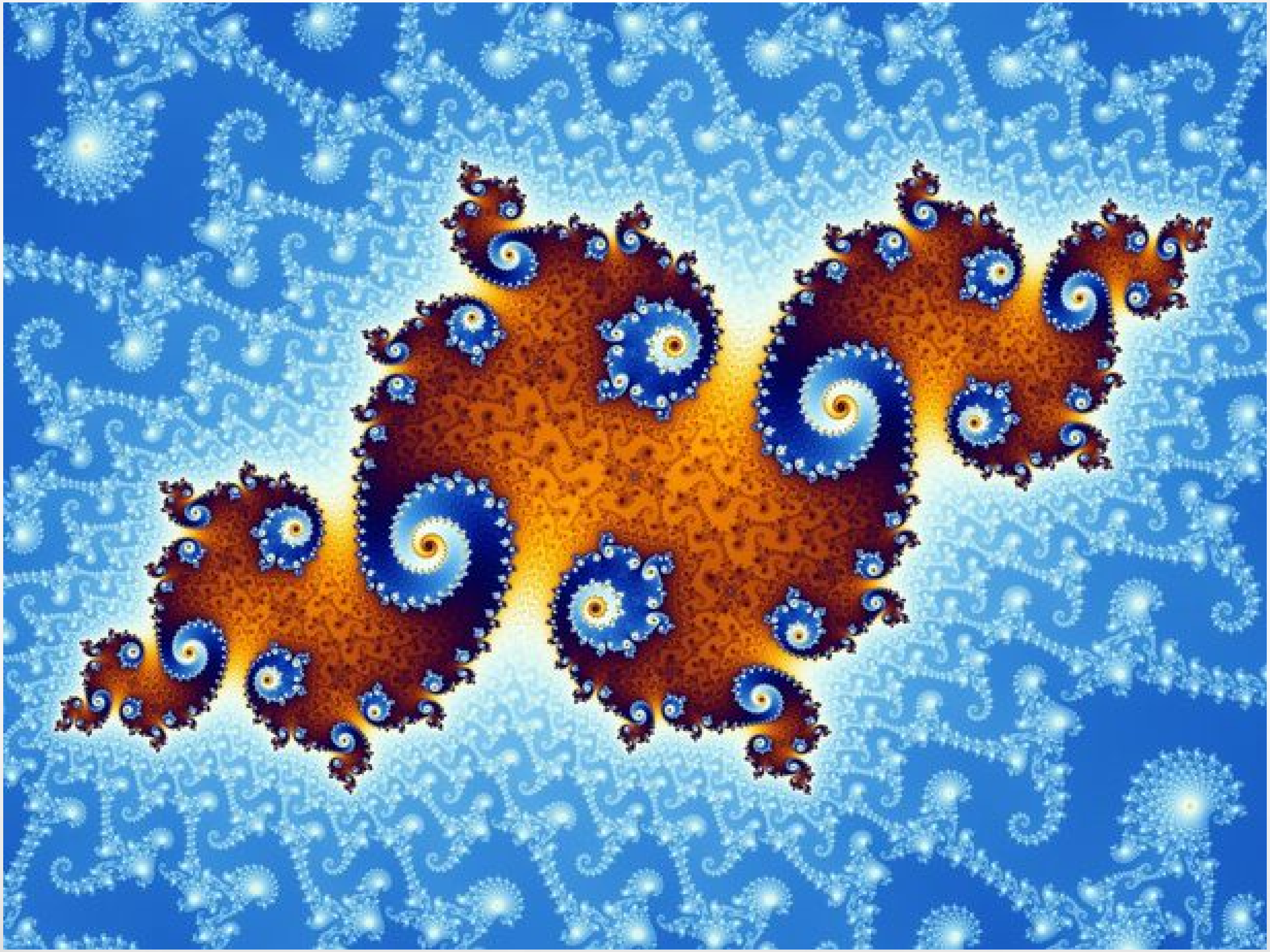
Frattali



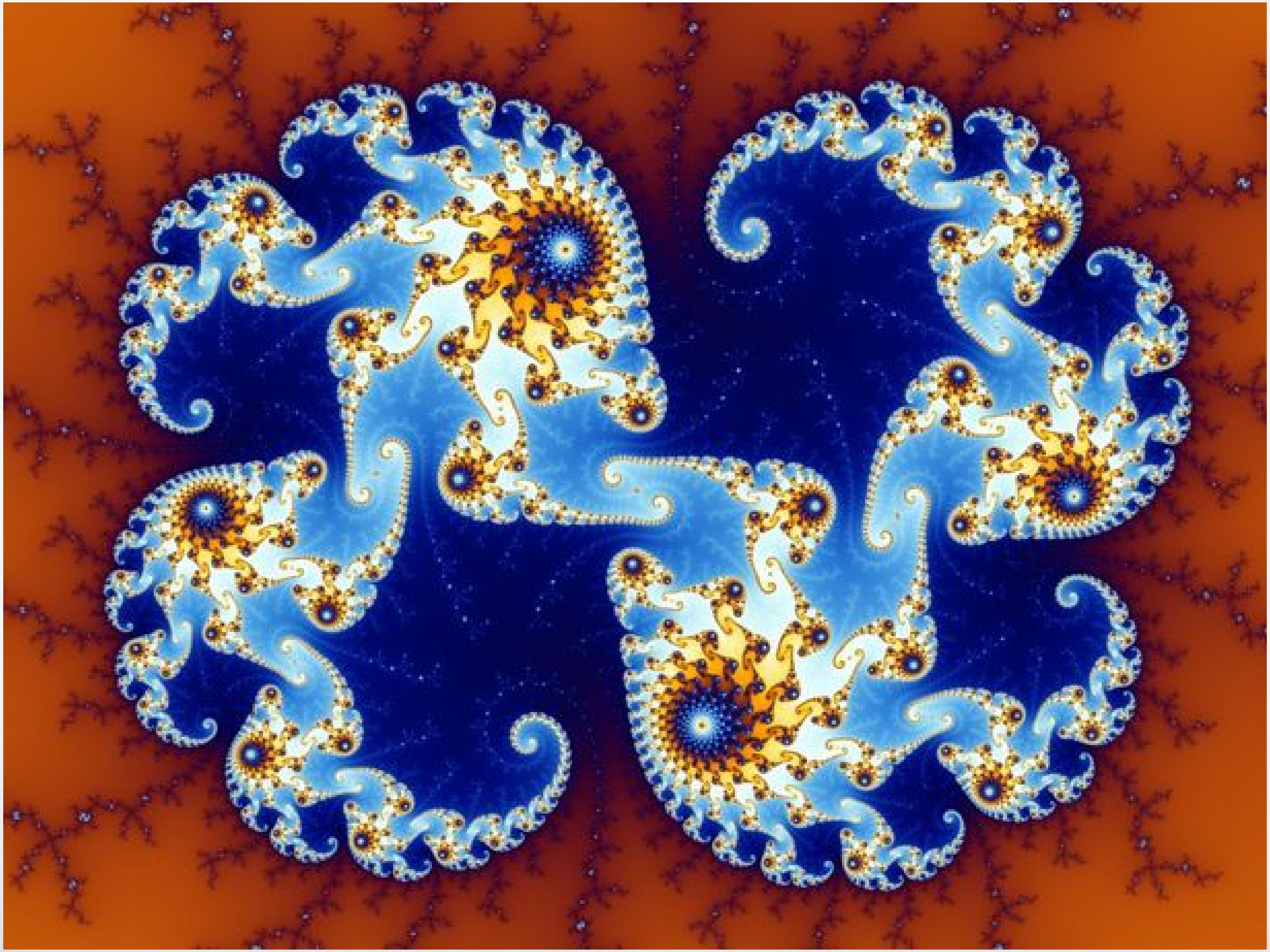
Frattali



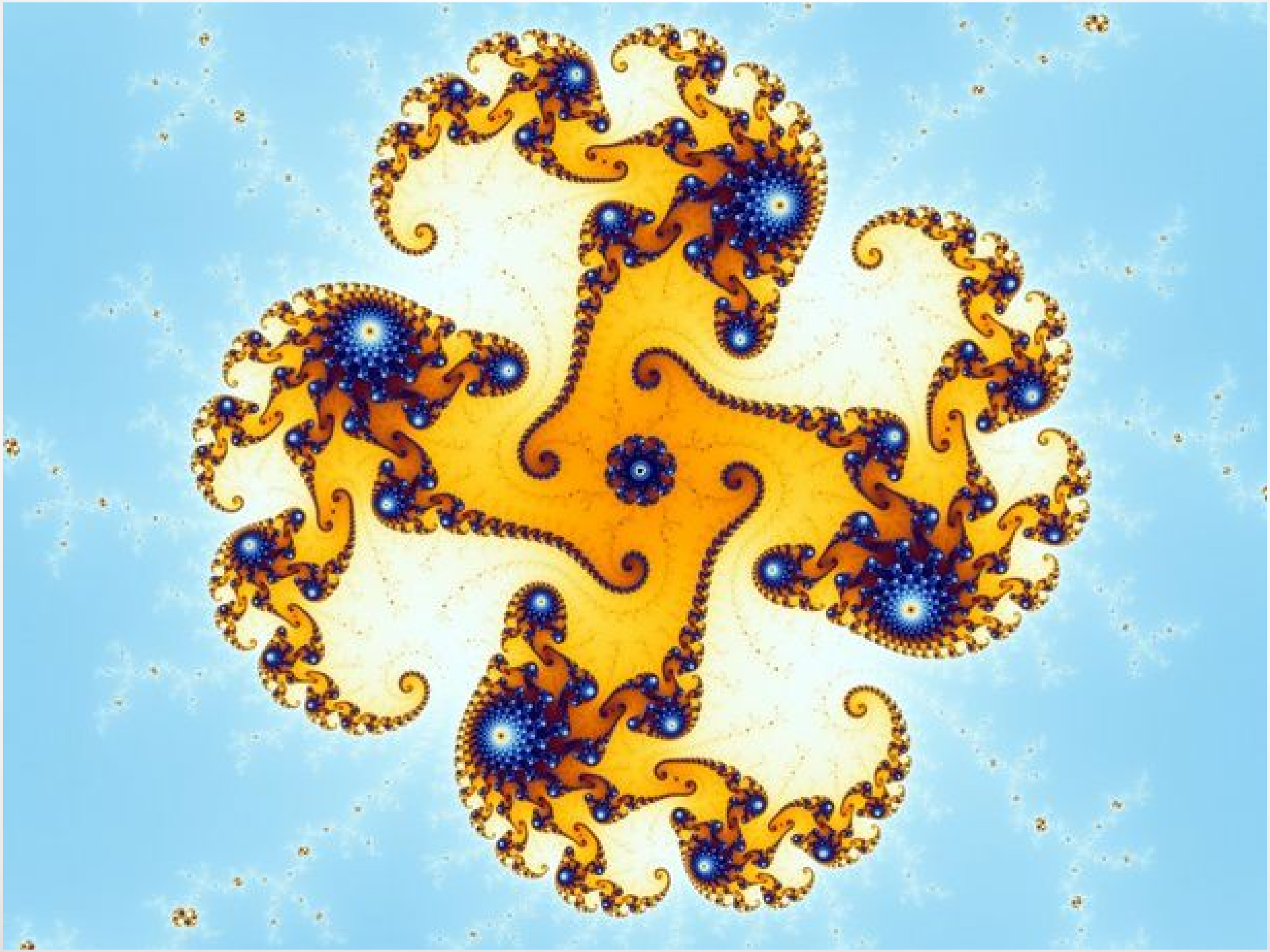
Frattali



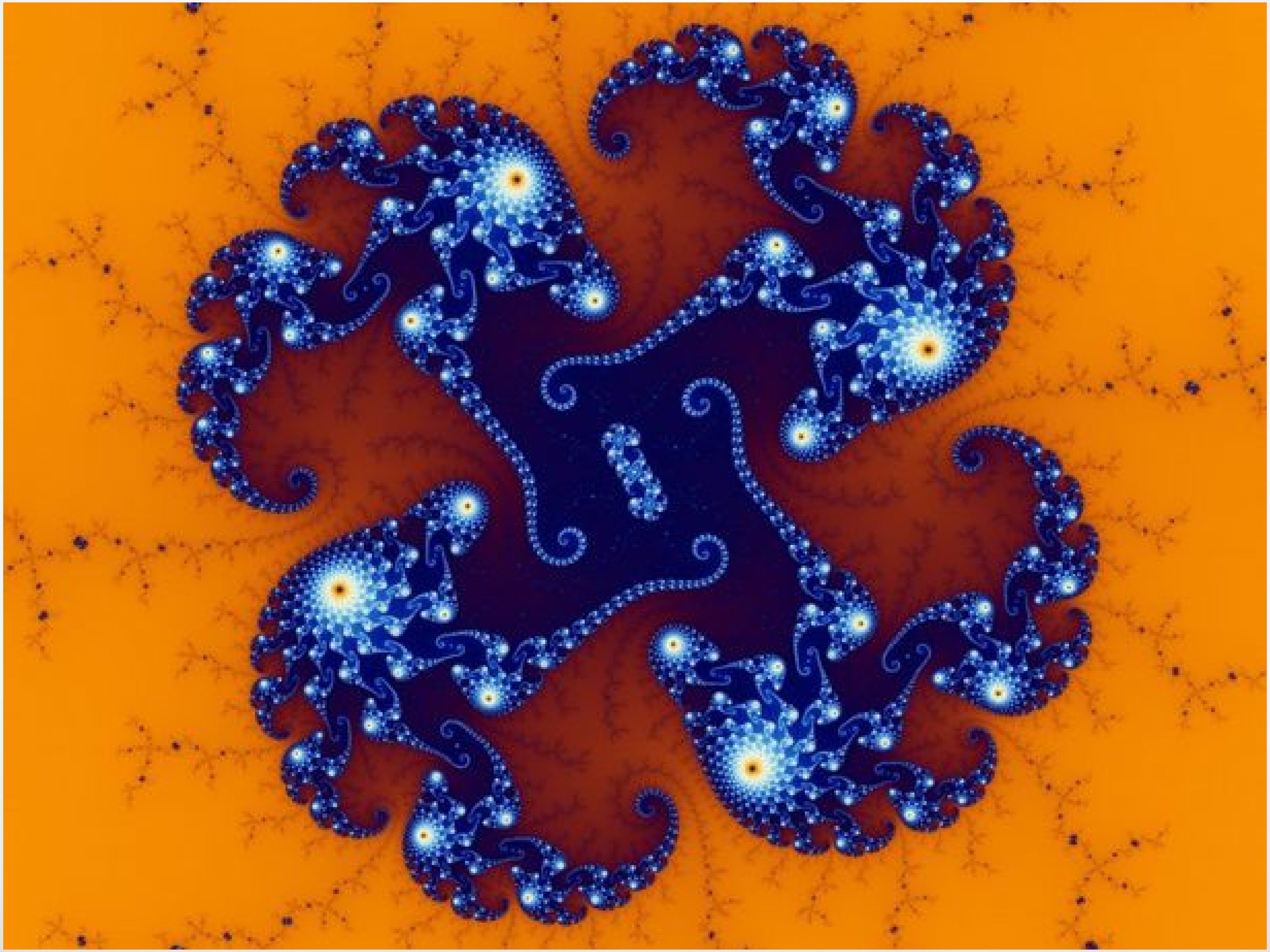
Frattali



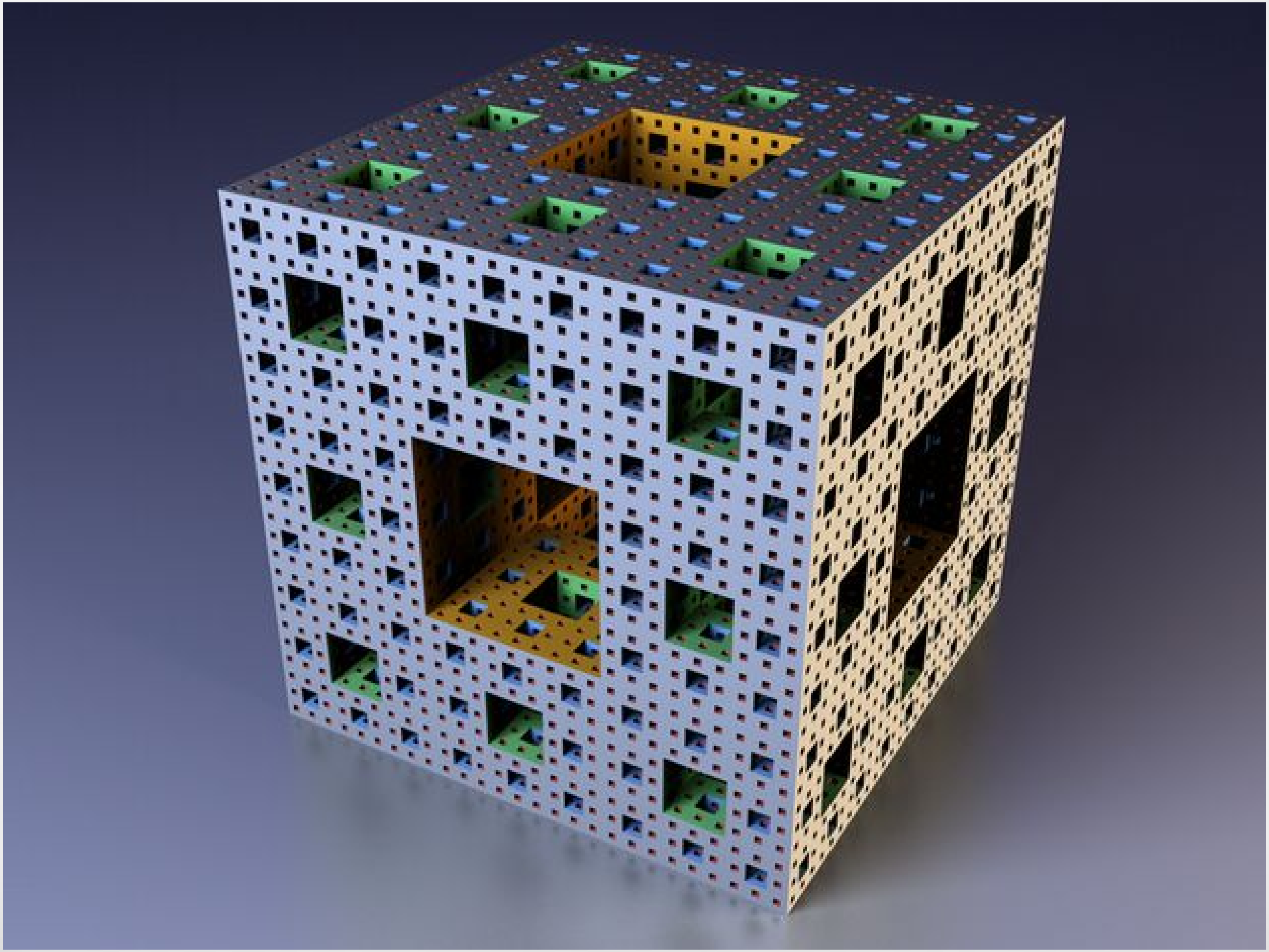
Frattali



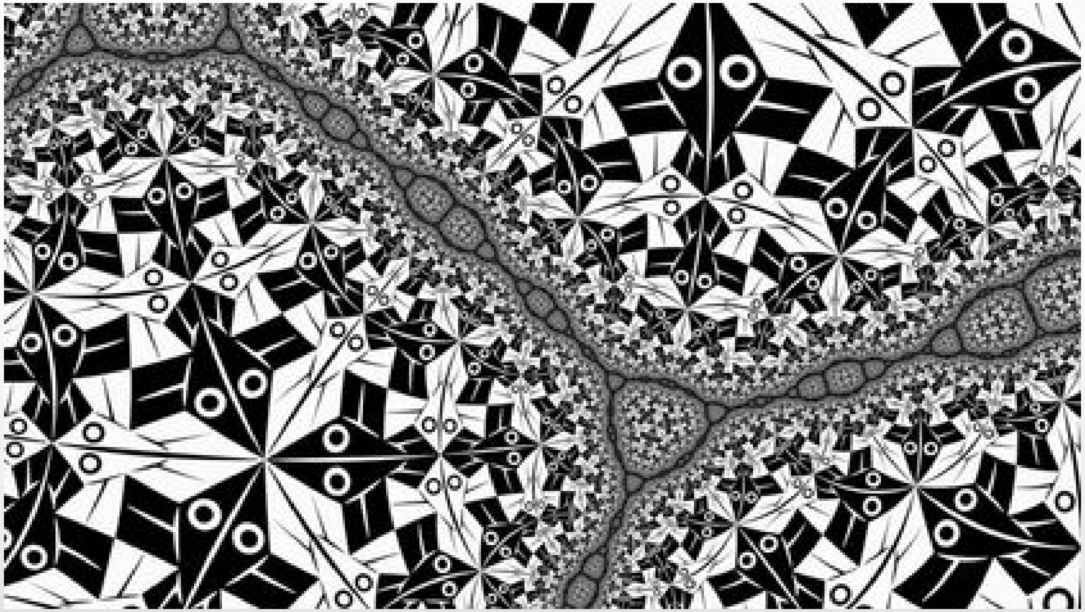
Frattali



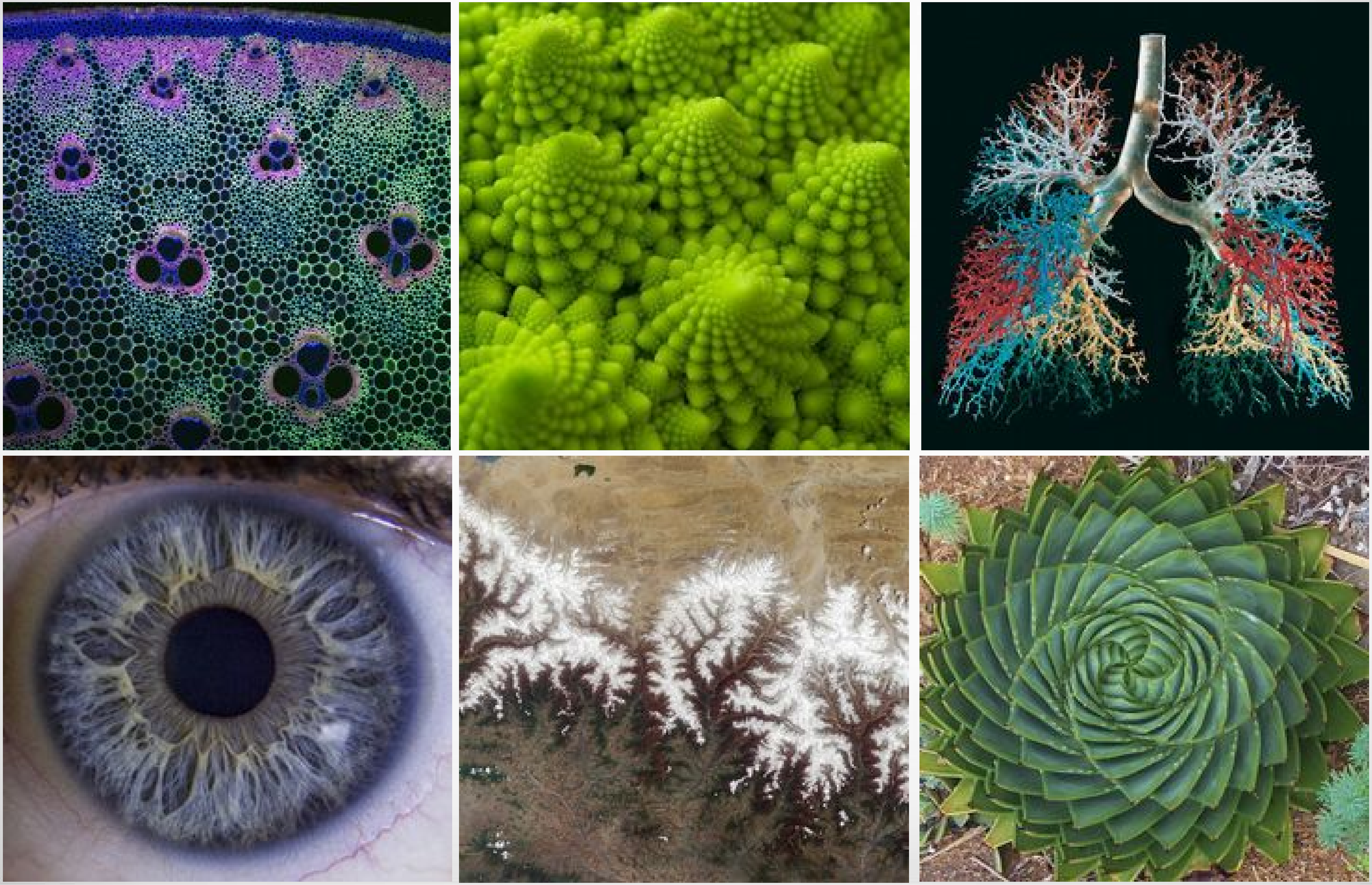
Frattali



Arte frattale



Natura frattale



Frattali natura