

## Esercizio sul fascio di circonferenze

1. Verificare le caratteristiche del fascio di circonferenze di equazione :

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2-2(5k+2)x+(k-2)y-6k=0$$

Dall'equazione data possiamo osservare che per  $k=-1$  si ottiene l'equazione di una retta:  $6x-3y+6=0 \rightarrow y=2x+2$  (asse radicale del fascio)

Evidenziamo le generatrici del fascio scrivendone l'equazione nella forma :  $x^2+y^2-4x-2y+k(x^2+y^2-10x+y-6)=0$ .

La prima e la seconda generatrice sono rispettivamente  $x^2+y^2-4x-2y=0$  e  $x^2+y^2-10x+y-6=0$ .

Stabiliamo la posizione reciproca delle due generatrici risolvendo il sistema delle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x + y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ y_1 = y_2 = 2 \end{cases}$$

Le due circonferenze generatrici sono perciò tangenti nel punto  $T(0,2)$ , unico punto base (doppio) del fascio. Il fascio è quindi costituito da circonferenze tangenti in  $T$  all'asse radicale.

Questo tipo di fascio contiene due circonferenze degeneri : una è l'asse radicale prima trovato e l'altra è la circonferenza di centro  $T(0,2)$  e raggio nullo. Quest'ultima ha equazione  $x^2+y^2-4y+4=0$  e coincide con l'equazione del fascio riscritta in forma canonica se, ad esempio, si impone che siano uguali i termini noti:

$$\frac{-6k}{k+1} = 4 \rightarrow k = -\frac{2}{5}.$$

Il valore di  $k$  corrisponde alla circonferenza di raggio nullo si sarebbe potuto trovare anche uguagliando a zero l'espressione del raggio della generica circonferenza del fascio .