

## Fascio generato da due circonferenze

Siano

$$\gamma_1 : x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\gamma_2 : x^2+y^2+a'x+ b'y+ c'=0$$

due circonferenze che assumiamo come generatrici del fascio. nell'ipotesi che esse non siano concentriche ( $a \neq a'$  e  $b \neq b'$ ), sottraendo membro a membro le loro equazioni si ha l'equazione del loro asse radicale:

$$(a-a')x+ (b-b')y+ c-c'=0$$

La combinazione lineare delle equazioni delle due generatrici è :

$$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+ b'y+ c')=0 \quad (1)$$

con  $k$  un parametro reale.

La (1) è l'equazione del fascio di circonferenze generato da  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  .

Questa equazione può essere scritta nella forma

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(a'k+a)x+(b'k+b)y+c'k+c=0$$

o per  $k \neq -1$  nella forma canonica dell'equazione di una circonferenza

$$x^2 + y^2 + \frac{a'k+a}{k+1}x + \frac{b'k+b}{k+1}y + \frac{c'k+c}{k+1} = 0$$

- Se  $k=0$  otteniamo la prima generatrice  $\gamma_1$  . La seconda generatrice  $\gamma_2$ , pur appartenendo al fascio, non si ottiene dalla (1) per alcun valore del parametro.
- Se nella (1) si pone  $k = \frac{k_1}{k_2}$  e si scrive l'equazione nella forma

$$k_2(x^2+y^2+ax+by+c)+k_1(x^2+y^2+a'x+ b'y+ c')=0$$

allora tale equazione rappresenta tutte le circonferenze del fascio, compresa la seconda generatrice ( $k_1 \neq 0$  e  $k_2=0$ ).

- Gli eventuali punti comuni alle due generatrici sono i **punti base del fascio**. L'asse radicale delle due generatrici, che esiste se esse non sono concentriche, è l'asse radicale del fascio . La sua equazione

$$(a-a')x+ (b-b')y+ c-c'=0$$

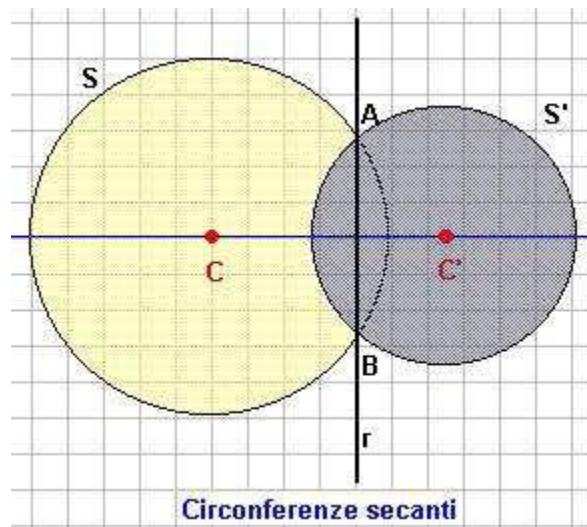
si ottiene dalla (1) per  $k=-1$

OSSERVAZIONE: L'asse radicale di un fascio di circonferenze si può considerare una circonferenza degenerata del fascio, di raggio infinito .

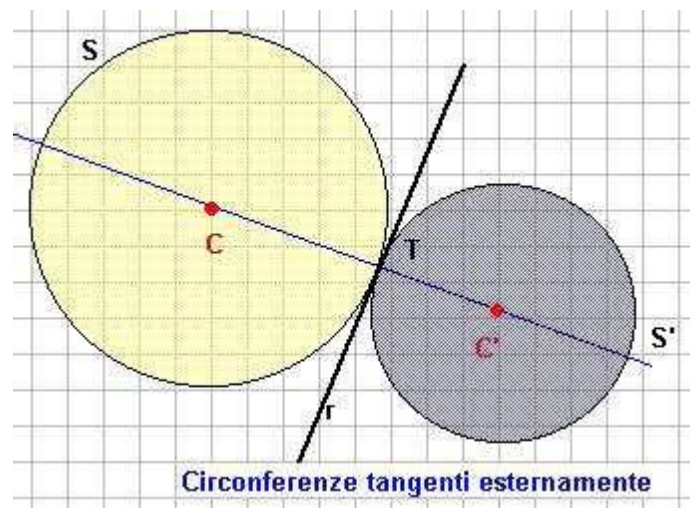
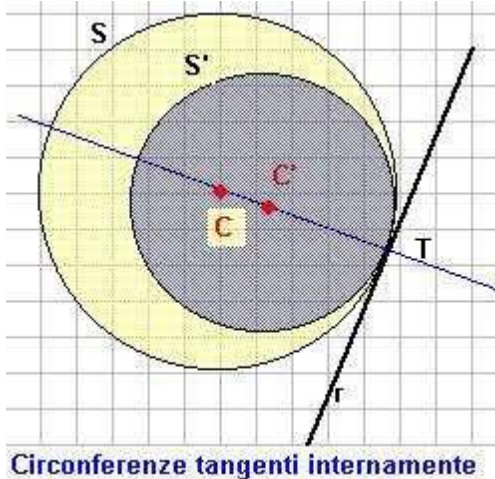
## Caratteristiche di un fascio di circonferenze

Le caratteristiche di un fascio dipendono dalla posizione reciproca delle generatrici

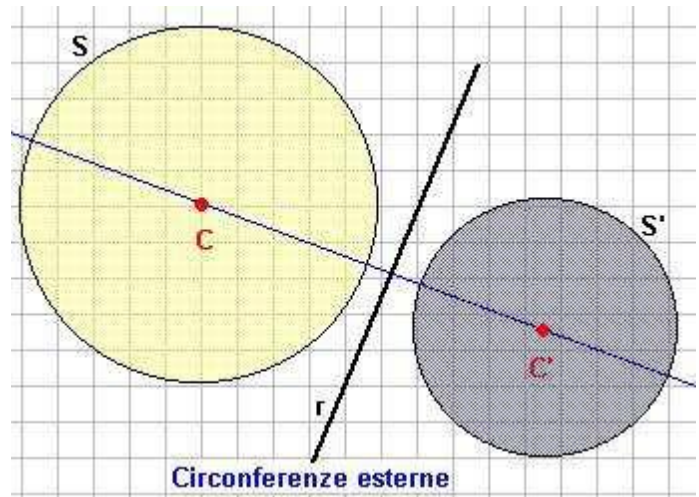
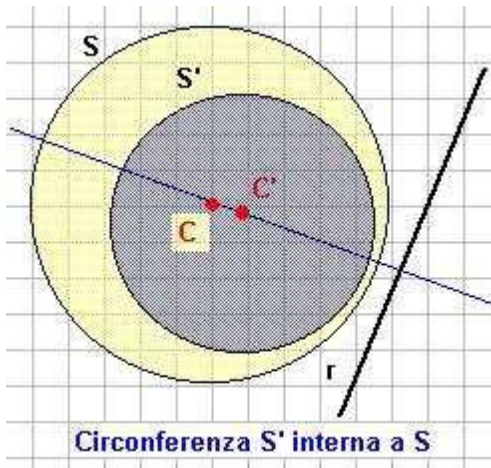
- Se le generatrici sono secanti e si intersecano in due punti A e B, allora tutte le circonferenze del fascio passano per i due punti base A e B (punti fissi) che appartengono all'asse radicale (circonferenza degenera).



- Se le generatrici sono tangenti in un punto T e se t è la tangente comune, allora tutte le circonferenze del fascio passano per l' **unico punto base T** (punto fisso, che è un punto base doppio) e sono tangenti in tale punto alla retta t, che è l'asse radicale del fascio. Il fascio contiene due circonferenze degeneri: l'asse radicale t del fascio e la circonferenza di raggio nullo degenera nel suo centro T.



- Se le generatrici non hanno punti comuni e non sono concentriche, il fascio non ha punti base e due qualsiasi circonferenze del fascio non hanno punti in comune. Il fascio contiene, come circonferenza degenera, l'asse radicale del fascio. Tale retta non interseca alcuna circonferenza del fascio.



- Se le generatrici sono concentriche, il fascio è costituito da circonferenze concentriche alle due generatrici, non contiene circonferenze degeneri e l'asse radicale non esiste

