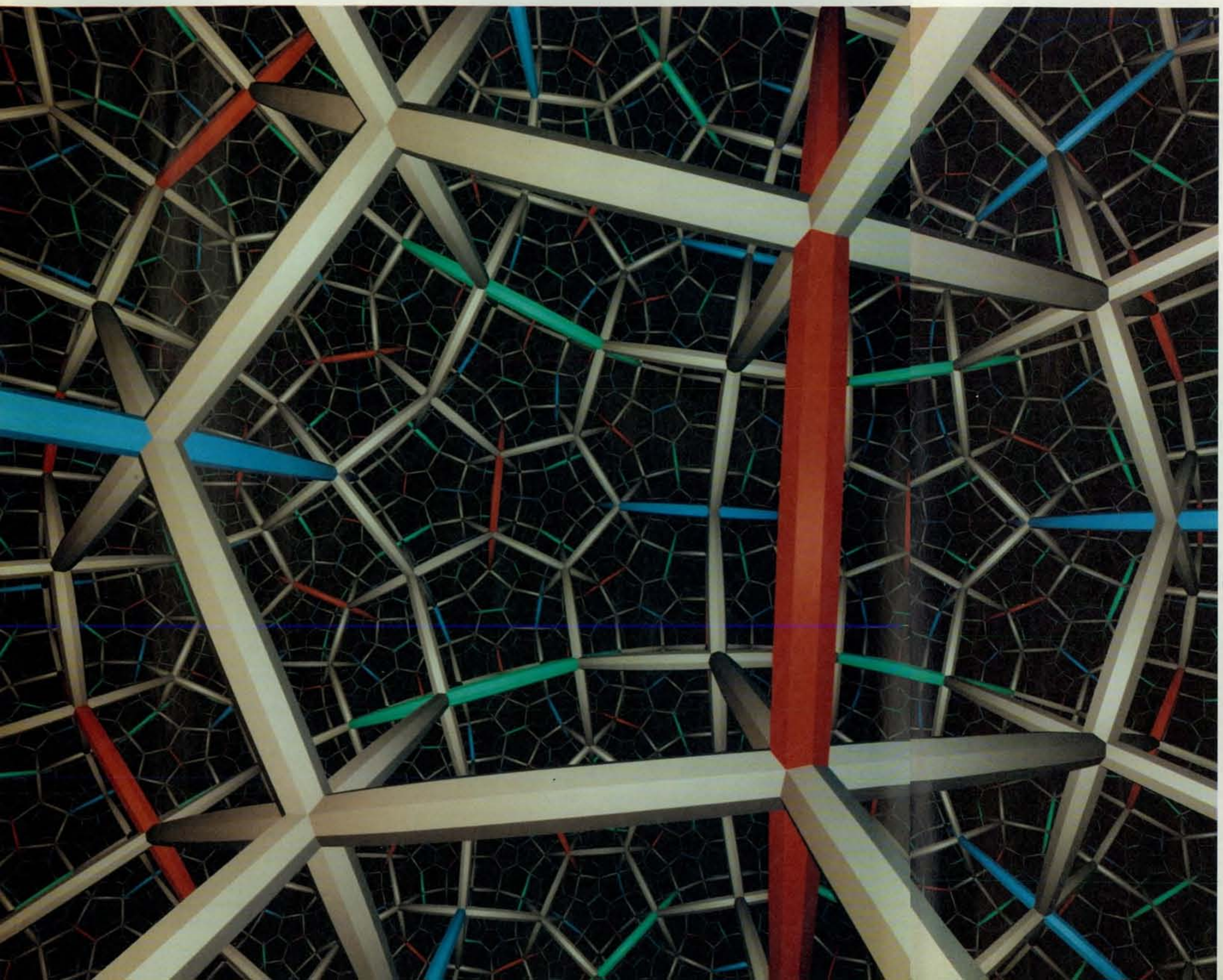
MORTE DELLA DIMOSTRAZIONE

Il calcolatore sta trasformando i metodi con cui i matematici scoprono, dimostrano e comunicano le loro idee, ma c'è da domandarsi se in questo nuovo mondo resti ancora spazio per la certezza assoluta

di John Horgan



La leggenda narra che quando Pitagora e i suoi discepoli scoprirono il celebre teorema, nel VI secolo a.C., sacrificarono un bove per festeggiare l'evento. E ne avevano ben donde, perché la relazione da essi scoperta tra i lati di un triangolo rettangolo valeva non in determinate circostanze, bensì sempre, che il triangolo fosse un taglio di seta, un appezzamento di terreno o un disegno su papiro: appariva una magia, un dono degli dèi. Non fa meraviglia che tanti pensatori, da Platone a Kant, abbiano reputato la matematica capace di offrirci le verità più pure che all'uomo sia concesso di conoscere.

Quest'opinione sembrò confermata nel giugno scorso, quando Andrew J. Wiles della Princeton University comunicò durante un congresso tenutosi all'Università di Cambridge di aver dimostrato l'ultimo teorema di Fermat. Si tratta di uno dei problemi più famosi della matematica: formulato più di 350 anni fa, le sue radici risalgono allo stesso Pitagora. Dato che in sala non si trovò alcuna vittima sacrificale, il pubblico manifestò il suo apprezzamento con un applauso.

Tuttavia ci si può chiedere se la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat non sia stato l'estremo sussulto di una cultura morente. La matematica, che tra le discipline intellettuali è la più legata alla tradizione, sta subendo profonde trasformazioni. Per millenni i matematici hanno commisurato i loro progressi a ciò che si può dedurre tramite la dimostrazione, cioè una successione di passaggi logici che da una serie di assiomi porta a una conclusione irrefutabile. Ebbene, i dubbi che travagliano il pensiero odierno hanno ormai contaminato anche la matematica. Può darsi che i matematici siano prima o poi costretti ad accettare ciò che già molti scienziati e filosofi hanno ammesso, cioè che le loro asserzioni sono, nella migliore delle ipotesi, vere solo provvisoriamente, finché non se ne dimostri la falsità.

Quest'incertezza deriva in parte dalla crescente complessità della matematica. Spesso le dimostrazioni sono così lunghe e complicate che è difficile darne una valutazione: la dimostrazione di Wiles riempie ben 200 pagine, e gli esperti ritengono che sarebbe stata cinque volte più lunga se tutti i passaggi fossero stati esplicitati. Un osservatore ha affermato che solo un matematico su mille è in

La «dimostrazione video» qui a fianco illustra un teorema, dimostrato da W. P. Thurston del Mathematical Sciences Research Institute, che istituisce un profondo collegamento tra topologia e geometria. Il teorema asserisce che nello spazio circostante un nodo complesso (rappresentato in questa scena da un reticolo) vale una geometria «iperbolica», in cui le rette parallele divergono e i lati dei pentagoni formano angoli retti. Il video, generato al calcolatore e intitolato *Not Knot*, è stato prodotto dal Geometry Center dell'Università del Minnesota.

grado di valutare questa dimostrazione. Wiles è stato ritenuto credibile soprattutto grazie alla reputazione sua e di coloro sui cui risultati ha basato la dimostrazione. Alcuni matematici che non l'avevano ancora esaminata nei dettagli hanno tuttavia affermato che «sembra bellissima» e che «ha l'aria di essere vera».

Un altro catalizzatore di cambiamento è il calcolatore, che sta costringendo i matematici a riconsiderare la natura stessa della dimostrazione, e quindi della verità. Per ottenere certe dimostrazioni, negli ultimi anni si sono dovute eseguire masse enormi di calcoli, sicché nessun essere umano può verificare queste cosiddette dimostrazioni al calcolatore: solo altri calcolatori sono in grado di farlo. Di recente alcuni ricercatori hanno proposto una dimostrazione al calcolatore che fornisce solo una probabilità, e non la certezza, della verità, il che per certi matematici è una vera e propria incongruenza. Altri ancora stanno preparando «dimostrazioni video», nella speranza che siano più convincenti di pagine e pagine di formule.

Allo stesso tempo, alcuni matematici mettono in dubbio l'idea che le dimostrazioni formali siano il metro assoluto della verità. Benché nessuno sostenga di poter fare del tutto a meno delle dimostrazioni, alcuni esperti ritengono che sia più facile stabilire la validità di certe proposizioni confrontandole con esperimenti eseguiti al calcolatore o con fenomeni del mondo reale. «Penso che nei prossimi cinquant'anni l'importanza della dimostrazione in matematica diminuirà» dice Keith Devlin del Colby College, che cura una rubrica sui calcolatori per «Notices of the American Mathematical Society». «Saranno molti di più coloro che faranno matematica senza necessariamente fare dimostrazioni.»

Queste eresie vengono propugnate da potenti forze istituzionali. Da molti anni la National Science Foundation esorta i matematici a dedicarsi di più all'informatica e ad altri campi suscettibili di applicazioni. Anche alcuni luminari come Phillip A. Griffiths, direttore dell'Institute for Advanced Study di Princeton, e Michael Atiyah, insignito nel 1966 della Fields Medal (considerata il premio Nobel per la matematica) e direttore dell'Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences di Cambridge, hanno invitato i matematici a uscire dalla loro torre d'avorio e a prendere contatto con il mondo reale. In un momento in cui finanziamenti e posti di lavoro sono scarsi, i giovani matematici non possono permettersi di ignorare queste esortazioni.

Naturalmente vi sono sacche di resistenza. Alcuni ricercatori deplorano con amarezza l'informatizzazione della loro disciplina e l'importanza crescente delle (oh, che parola volgare!) «applicazioni». Uno dei più attivi paladini della tradizione è Steven G. Krantz della Washington University, che in conferenze e articoli ha ammonito gli studenti a scegliere la matematica e non l'informatica, che secondo lui potrebbe essere una moda passeggera. L'anno scorso, ricorda Krantz, un funzionario della National Science Foundation visitò l'università e dichiarò che il suo ente non poteva più permettersi di finanziare ricerche matematiche che non fossero «finalizzate». «Potevamo ribellarci e dire che è un grave errore» brontola Krantz, «ma i matematici sono degli smidollati e ribellarsi non rientra nelle loro tradizioni.»

David Mumford della Harvard University, che è stato insignito della Fields Medal nel 1974 per ricerche di matematica pura e che ora studia la visione artificiale, ha scritto di recente che «nonostante le iperboli giornalistiche, le pressioni degli enti finanziatori e così via, per lo più i matematici puri considerano ancora i calcolatori come invasori e saccheggiatori del sacro suolo». L'anno scorso Mumford propose un corso in cui i docenti avrebbero dovuto insegnare agli studenti come si programma un calcolatore per risolvere problemi di analisi superiore. «Mi opposero il veto» ricorda «e non per le possibili proteste degli studenti, come mi aspettavo, ma perché metà dei miei colleghi non sapeva programmare!».

Questa situazione sta cambiando rapidamente, a giudicare dalle indicazioni fornite dal Geometry Center dell'Università del Minnesota. Fondato due anni fa, esso occupa il quinto piano di uno sfavillante poliedro di vetro e acciaio a Minneapolis e riceve due milioni di dollari l'anno dalla National Science Foundation, dal Department of Energy e dall'università. Tra i docenti fissi, che per lo più hanno anche incarichi esterni, vi sono alcuni dei più eminenti matematici del mondo.

Prendiamo una tipica giornata al Geometry Center: alcuni giovani ricercatori stanno ultimando un video che mostra come si può sminuzzare, torcere, stirare e infine rivoltare una sfera. In un'aula tre esperti in informatica di grandi università spiegano a una ventina di insegnanti di scuola superiore come allestire programmi grafici per l'insegnamento della matematica. Davanti a terminali NeXT color antracite, altri ricercatori meditano su sgargianti immagini di «ipercubi» quadridimensionali, di frattali vorticanti e di reticoli che si proiettano verso l'infinito. In giro non si vedono né carta né penne.

Di fronte a un terminale c'è David Ben-Zvi, un giovane ricercatore di Princeton che trascorre qui un periodo di sei mesi per studiare dinamica non lineare. Non è d'accordo con quei matematici che temono i calcolatori perché potrebbero allontanarli dai metodi che per tanto tempo si sono dimostrati utilissimi. «Hanno solo paura del cambiamento» dice garbatamente.

Il Geometry Center è una fucina della matematica sperimentale, in cui le ipotesi sono verificate tramite la rappresentazione grafica e l'uso del calcolatore. L'anno scorso alcuni membri del centro contribuirono alla fondazione di una rivista, «Experimental Mathematics», che illustra questi studi. «I metodi sperimentali non sono una novità in matematica» dice il direttore della rivista, David B. A. Epstein dell'Università di Warwick in Inghilterra, ricordando che Carl Friedrich Gauss e altri grandi matematici spesso effettuavano calcoli sperimentali prima di elaborare una dimostrazione formale. «La novità è che adesso sono diventati rispettabili.» Epstein ammette che non tutti i suoi colleghi sono d'accordo. «Uno di loro ha detto che la nostra rivista si dovrebbe chiamare "Rivista dei teoremi non dimostrati".»

Bolle di sapone e fusilli

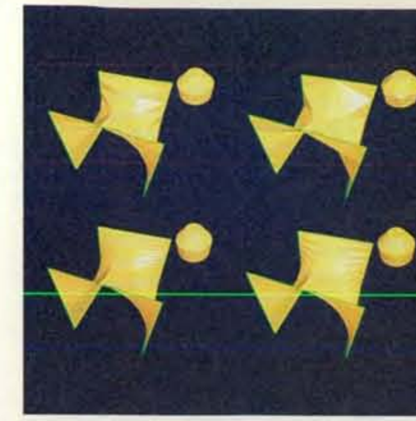
Una studiosa che bene esemplifica il nuovo stile della matematica è Jean E. Taylor della Rutgers University. «Il principio secondo cui non si deve usare il calcolatore sarà sempre più estraneo alla nuova generazione» dice la Taylor, che da vent'anni studia le superfici minime (l'area o il volume più piccoli limitati da una curva o superficie). Forse le superfici minime più semplici ed eleganti che si trovino in natura sono le bolle e le pellicole di sapone. La Taylor ha sempre avuto un'inclinazione sperimentale: agli inizi della carriera, collaudava i suoi modelli teorici delle superfici minime immergendo anelli di fil di ferro in un secchio di acqua e sapone.

Oggi preferisce costruire modelli di bolle mediante un raffinato programma di grafica al calcolatore; inoltre è passata dalle bolle di sapone ai cristalli, che obbediscono a regole un po' più complicate sulle superfici minime. Insieme con Frederick J. Almgren di Princeton, Robert F. Almgren dell'Università di Chicago (che sono rispettivamente suo marito e suo figlio) e Andrew R. Roosen del National Institute of Standards and Technology, la Taylor sta cercando di simulare al calcolatore l'accrescimento di fiocchi di neve e altri cristalli. Collabora sempre più strettamente con fisici e specialisti di scienza dei materiali, offrendo loro teorie matematiche e tecniche di programmazione in cambio di informazioni sull'accrescimento dei cristalli reali.

Un altro esploratore del ciberspazio in cerca di nuove superfici minime è David A. Hoffman dell'Università del Massachusetts ad Amherst. Tra i suoi obiettivi preferiti vi sono i catenoidi e gli elicoidi, che assomigliano a fusilli e furono scoperti già nel Settecento. «Osservando le immagini di queste superfici al calcolatore» dice Hoffman, «ricaviamo un'enorme quantità di nuove idee».

Nel 1992 Hoffman, Fusheng Wei di Amherst ed Hermann Karcher dell'Università di Bonn ipotizzarono l'esistenza di una nuova classe di elicoidi, dotati di manici; solo dopo aver rappresentato questi elicoidi (i primi scoperti dal Settecento in poi) al calcolatore, essi riuscirono a fornire una dimostrazione formale della loro esistenza. «Se non avessimo potuto vedere una figura grosso modo corrispondente a ciò che immaginavamo, non saremmo mai riusciti nell'impresa» dice Hoffman.

Il settore della matematica sperimentale che nell'ultimo decennio ha fatto la parte del leone è la cosiddetta dinamica



Jean E. Taylor, che studia matematica sperimentale alla Rutgers University, indaga sulle regole cui obbediscono le superfici minime esaminando oggetti sia reali, come le bolle di sapone, sia generati al calcolatore, come i cristalli idealizzati (*a sinistra*).

Uno splendido anacronismo?

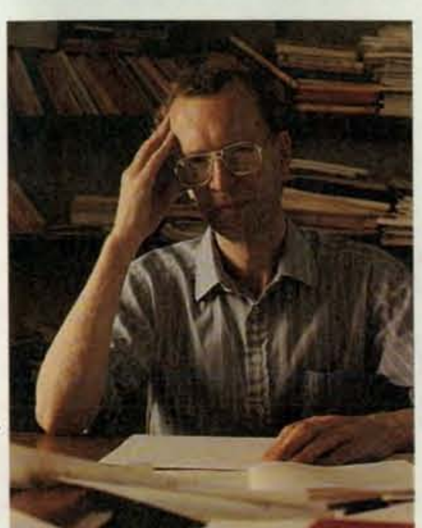
Quanti considerano la matematica sperimentale e le dimostrazioni al calcolatore un obbrobrio più che un'innovazione hanno un motivo particolare per rallegrarsi della dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat da parte di Andrew J. Wiles della Princeton University. L'impresa di Wiles è un trionfo della tradizione e si pone controcorrente rispetto a tutta la matematica moderna.

Wiles, strenuo sostenitore della matematica per la matematica, afferma: «Non vorrei certo vedere la matematica ridotta a schiava delle applicazioni, perché questo non sarebbe neppure nell'interesse delle applicazioni».

Il problema da lui risolto, posto più di 350 anni or sono dal matematico francese Pierre de Fermat, è uno splendido rompicapo di matematica pura. Fermat dichiarò di aver trovato una dimostrazione della proposizione seguente: per tutti i valori di n maggiori di 2, l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ammette soluzioni intere. I tentativi di trovarne la dimostrazione, mai rivelata da Fermat, hanno contribuito alla costruzione della teoria dei numeri moderna (lo studio dei numeri interi), che di recente è risultata utile in crittografia. Eppure «è molto improbabile che di per sé l'ultimo teorema di Fermat abbia qualche applicazione» dice Wiles.

Benché da tempo gli enti finanziatori invitino i matematici a collaborare sia tra loro sia con altri scienziati, Wiles ha lavorato pressoché da solo per sette anni. Soltanto verso la fine della ricerca ha comunicato le proprie idee ad alcuni colleghi.

La dimostrazione di Wiles ha in sostanza la stessa forma deduttiva che hanno i teoremi classici della geometria euclidea. Non contiene calcoli e rivendica la verità assoluta (non statistica). Wiles non ha usato il calcolatore nemmeno per dare una rappresentazione grafica alle sue idee, per effettuare calcoli o per scrivere la sua memoria, che una segretaria ha battuto a macchina dagli appunti manoscritti.



Egli ammette che verificare una congettura con il calcolatore può essere utile. Negli anni settanta certe verifiche al calcolatore indicarono che una cervellotica ipotesi, la congettura di Taniyama, poteva essere vera. Le ricerche nate da queste verifiche sono alla base della dimostrazione di Wiles. Tuttavia egli non crede che si darà la pena di imparare a fare ricerca col calcolatore. «È un'abilità a parte» spiega «e se s'investe tanto tempo in un'abilità a parte, è probabile che ci si lasci sviare dal vero lavoro sul problema».

Wiles respinge la possibilità che possa esistere un numero finito di verità accessibili alle forme tradizionali d'indagine. «Mi oppongo con forza all'idea che i buoni teoremi comincino a scarseggiare» dice. «Credo anzi che abbiamo appena scalfito la superficie.»

non lineare, più nota al pubblico con l'improprio pseudonimo di caos. In genere i sistemi non lineari sono retti da insiemi di regole semplici che, grazie alla retroazione e ad altri effetti analoghi, danno luogo a fenomeni complessi. I sistemi non lineari, beninteso, furono studiati anche prima dell'avvento dell'informatica, ma ora i calcolatori consentono di esplorare questi sistemi e di osservarne l'evoluzione con metodi di cui Henri Poincaré e gli altri pionieri di questa branca della matematica non potevano disporre.

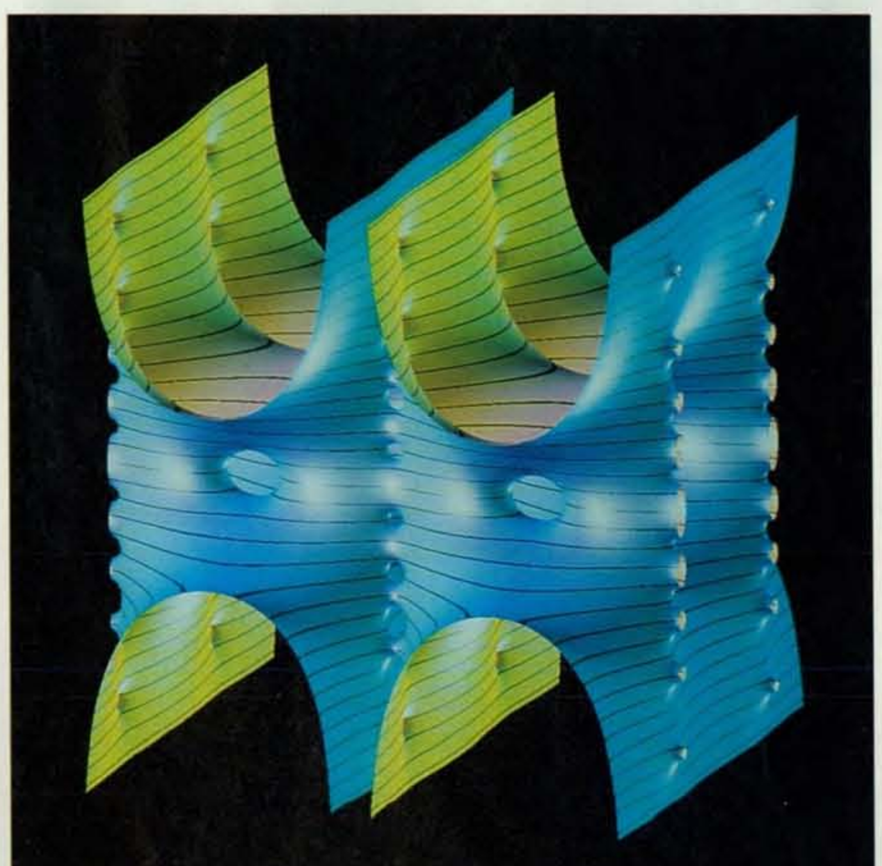
Gli automi cellulari, che dividono lo schermo del calcolatore in un insieme di celle analoghe agli elementi d'immagine, o pixel, illustrano in maniera lampante i principi della non linearità. In generale il colore, o «stato», di ciascuna cella è determinato da quello delle celle vicine; se lo stato di una singola cella cambia, una cascata di cambiamenti si diffonde in tutto il sistema.

Uno degli automi cellulari più famosi è quello inventato da John H. Conway di Princeton all'inizio degli anni settanta. Conway ha dimostrato che il suo automa, battezzato «Vita», è indecidibile: cioè non si può stabilire se le sue configurazioni varino all'infinito oppure se prima o poi siano destinate a ripetersi. Alcuni scienziati hanno sfruttato gli automi cellulari per studiare l'origine e l'evoluzione della vita; l'informatico e fisico Edward Fredkin dell'Università di Boston arriva addirittura a sostenere che l'universo nel suo complesso sia un automa cellulare.

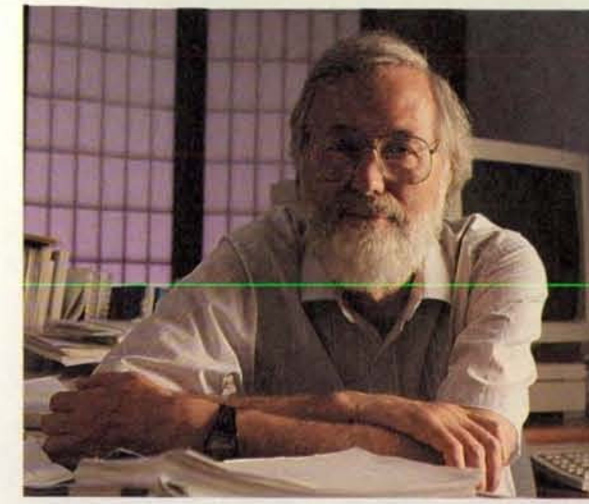
Ancor più famoso è l'insieme di Mandelbrot, la cui immagine è diventata un simbolo di tutti gli studi sul caos da quando Benoit B. Mandelbrot, del Thomas J. Watson Research Center della IBM, lo ha reso popolare nei primi anni ottanta. Questo insieme scaturisce da una semplice equazione comprendente un termine complesso (cioè un termine che contiene la radice quadrata di un numero negativo); l'equazione produce soluzioni che vengono poi iterate, ossia reintrodotte nell'equazione.

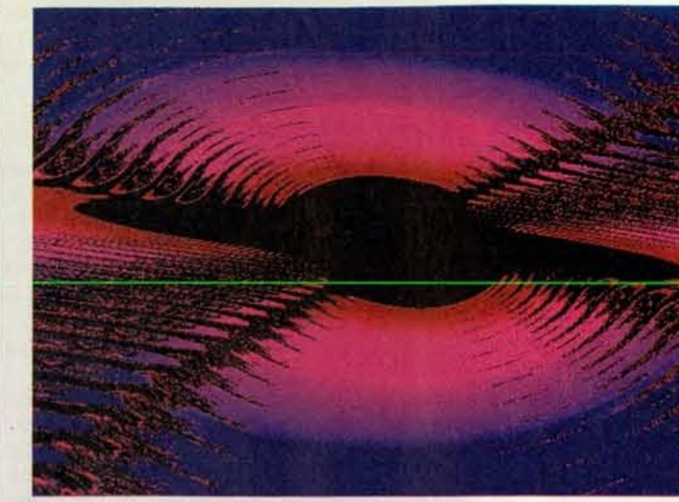
La teoria di questo insieme era stata formulata più di settant'anni fa da due matematici francesi, Gaston Julia e Pierre Fatou, ma solo il calcolatore ne ha rivelato a tutti la barocca bellezza. Quando viene rappresentato su uno schermo, l'insieme di Mandelbrot genera un'immagine che è stata paragonata a un cuore carcinomatoso, a un pollo bruciacchiato o a un pupazzo di neve bitorzoluto. L'immagine è un frattale: i suoi margini sfumati sono di lunghezza infinita e vi compaiono configurazioni ricorrenti a scale diverse.

Oggi si stanno studiando insiemi che sono simili all'insieme di Mandelbrot, ma si sviluppano in quattro dimensioni. «Le complicazioni che s'incontrano in questo caso sono simili a quelle che ci si trova a dover affrontare anche in molte altre scienze» dice John Milnor, della State University of New York a Stony Brook. Milnor sta attualmente tentando di analizzare le proprietà dell'insieme a quattro dimensioni esaminandone sezioni bidimensionali generate al calcolatore. I risultati preliminari da lui ottenuti sono stati pubblicati lo scorso anno nell'apertura del primo numero di «Experimental Mathematics». Milnor, che è stato insignito della Fields Medal nel 1962, racconta come ogni tanto si cimentasse in esperimenti al calcolatore anche ai tempi delle schede perforate, ma «era un procedimento penoso. Ora è molto più facile».



Questo elicoide forato (*in basso a sinistra*) è stato scoperto l'anno scorso da David A. Hoffman e colleghi dell'Università del Massachusetts ad Amherst servendosi della grafica al calcolatore. Di recente Edward C. Thayer, del gruppo di Hoffman, ha individuato una struttura (*qui sotto*) che simula la configurazione di certi polimeri.





Paesaggi alieni appaiono generati da un calcolatore che produce sezioni di un oggetto quadridimensionale simile al ben noto insieme di Mandelbrot. John Milnor della State University of New York a Stony Brook studia analoghe immagini bidimensionali per comprendere le proprietà di questo complesso oggetto matematico.

La popolarità della matematica basata sulla grafica ha provocato una reazione. Quattro anni fa, in «Mathematical Intelligencer», Krantz ha denunciato il fatto che «in certi ambienti è più facile ottenere fondi per comprare macchine che producano immagini di frattali che non per studiare geometria algebrica».

Un ammonimento di carattere più generale sulla matematica «speculativa» è comparso nel luglio scorso in «Bulletin of the American Mathematical Society». Gli autori, Arthur Jaffe di Harvard e Frank S. Quinn del Virginia Polytechnic Institute, sostengono che nello stabilire la verità gli esperimenti al calcolatore e la corrispondenza con fenomeni naturali non possano sostituirsi alle dimostrazioni. Scrivono Jaffe e Quinn: «Di quando in quando, in seno alla comunità dei matematici, vi sono stati gruppi e individui che hanno tentato di attenuare il rigore delle dimostrazioni; i risultati sono stati contrastanti e talvolta disastrosi».

Anche i matematici che sfruttano la grafica al calcolatore e altre tecniche sperimentali per lo più concordano sul fatto che vedere non basta per credere e che le dimostrazioni sono ancora necessarie per verificare le congetture ottenute con il calcolo. «Io credo che per troppo tempo i matematici siano stati legati al passato, ma questo non implica che le dimostrazioni non siano importanti» dice la Taylor. Hoffman difende la dimostrazione tradizionale con forza ancora maggiore: «Le dimostrazioni sono gli unici strumenti di laboratorio che i matematici posseggano, e c'è il pericolo che stiano per essere gettati via». Benché la grafica al calcolatore sia «straordinaria e meravigliosa» aggiunge, «negli anni sessanta anche gli stupefacenti erano straordinari e meravigliosi, ma alcune persone ci rimisero la pelle».

In effetti gli informatici esperti sanno meglio di chiunque altro che gli esperimenti al calcolatore (che siano basati sulla grafica o sul calcolo numerico) possono essere ingannevoli. Un esempio ammonitore riguarda l'ipotesi di Riemann, una famosa congettura su come si distribuiscano i numeri primi nel tendere all'infinito. Avanzata da Bernhard Riemann più di cent'anni fa, questa ipotesi è considerata uno dei più importanti problemi non risolti della matematica.

Franz Mertens, un matematico dell'epoca di Riemann, avanzò una congettura analoga relativa ai numeri interi positivi; se si fosse rivelata vera, essa avrebbe costituito un valido argomento a favore dell'ipotesi di Riemann. All'inizio degli anni ottanta si era stabilito, con l'uso del calcolatore, che in effetti l'ipotesi di Mertens valeva almeno per i primi dieci miliardi di interi; nel 1984, ulteriori calcoli dimostrarono tuttavia che a un certo punto - per numeri dell'ordine di $10^{(10^{70})}$ - la distribuzione prevista da Mertens scompare.

Un potenziale svantaggio dei calcolatori è che tutte le loro operazioni si basano sulla manipolazione di numeri interi discreti (per la precisione, dei numeri zero e uno); i numeri reali, come π o la radice di 2, possono essere solo approssimati. Chiunque abbia un po' di esperienza con le funzioni di arrotondamento di una semplice calcolatrice tascabile può indurla facilmente a fornire risultati errati. Programmi più raffinati possono introdurre errori più complicati ed elusivi. Nel 1991 David R. Stoutemyer, specialista di software dell'Università di Hawaii, illustrò 18 esperimenti di algebra che, eseguiti con gli ordinari programmi per la matematica, fornivano risultati sbagliati.

Stephen Smale dell'Università della California a Berkeley, insignito della Fields Medal nel 1966, ha cercato di dare fondamenta più solide al calcolo matematico, o almeno di individuare la posizione e le dimensioni delle crepe che serpeggiano in queste fondamenta. Insieme con Lenore Blum del Mathematical Sciences Research Institute di Berkeley e Michael Shub della IBM, Smale ha allestito un modello teorico di calcolatore capace di elaborare numeri reali anziché semplici interi.

Smale e la Blum hanno di recente concluso che l'insieme di Mandelbrot è, in senso tecnico, non computabile: cioè non si può stabilire con certezza se un punto arbitrario del piano complesso si trovi all'interno o all'esterno della sua irta frontiera. Secondo Smale, questo risultato dimostra che, quando si estrapolano i risultati di esperimenti al calcolatore, è necessaria molta attenzione.

Stephen Wolfram, fisico matematico dell'Università dell'Illinois, non condivide queste preoccupazioni. Egli è l'inventore di *Mathematica*, che da quando è stato immesso sul mercato, cinque anni fa, è diventato il più diffuso software per la matematica. Egli riconosce che «in effetti nella matematica sperimentale ci sono dei trabocchetti. Come accade per tutti gli esperimenti, può capitare di sbagliare». Ma sottolinea che gli esperimenti al calcolatore, se compiuti e analizzati con intelligenza, possono fornire più risultati del vecchio metodo basato su congettura e dimostrazione. «In ogni altro campo della scienza gli sperimentatori sono molto più numerosi dei teorici» dice Wolfram «e credo che anche in matematica prevarrà sempre più questa tendenza».

Wolfram sostiene che «l'ossessione della dimostrazione» ha impedito ai matematici di scoprire i nuovi vasti dominî dei fenomeni accessibili al calcolatore. E aggiunge che anche i più intrepidi matematici sperimentali per lo più non «osano abbastanza». «Della matematica prendono i problemi esistenti e li studiano. Non fanno altro che aggiungere qualche ghirigoro in cima a una struttura gigantesca.»

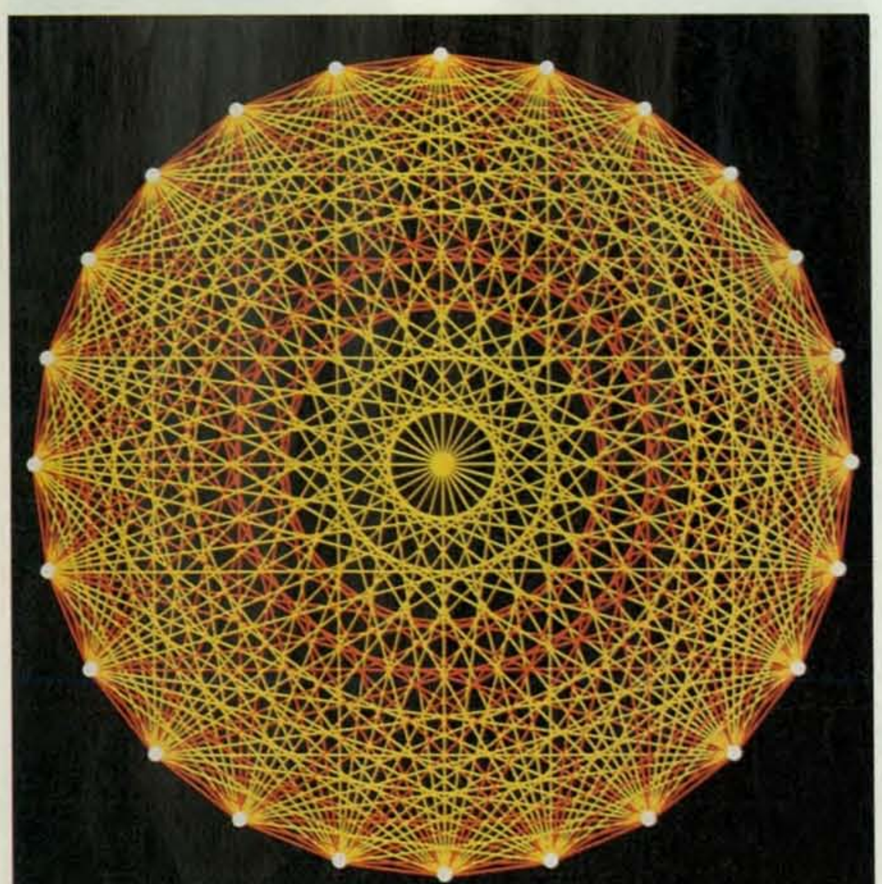
I matematici potrebbero forse essere d'accordo, ma con qualche riserva. Anche Conway è affascinato dagli automi cellulari, eppure sostiene che la carriera di Wolfram - come pure il suo disprezzo per la dimostrazione - indica che egli non è un matematico autentico. «Di solito i matematici puri non fondano società e non affrontano il mondo in modo così aggressivo. Noi preferiamo stare nella nostra torre d'avorio a riflettere.»

Più difficile è per i puristi ignorare la voce di un altro fervido sostenitore della sperimentazione e dell'uso dei calcolatori in matematica, William P. Thurston. Direttore del Mathematical Sciences Research Institute di Berkeley e condirettore (con Albert Marden dell'Università del Minnesota) del Geometry Center, Thurston vanta credenziali impeccabili: a metà degli anni settanta evidenziò la possibilità di una profonda connessione tra due branche separate della matematica, la topologia e la geometria, e per queste ricerche nel 1982 gli fu assegnata la Fields Medal.

Thurston crede fermamente che le verità matematiche siano scoperte e non inventate, ma per ciò che riguarda la dimostrazione non si rifà tanto a Platone quanto a Thomas S. Kuhn, il quale, in *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, sosteneva che le teorie scientifiche vengano accettate per ragioni sociali e non perché siano oggettivamente «vere». «Che in linea di principio la matematica si riduca alle dimostrazioni formali è un'idea senza solide basi» tipica di questo secolo, afferma Thurston. E aggiunge: «In pratica i matematici dimostrano i teoremi in un contesto sociale. È un corpo di conoscenze e di tecniche soggetto a condizionamenti sociali».

Thurston osserva che più di sessant'anni fa il logico Kurt Gödel dimostrò con il suo teorema di incompletezza che «è impossibile codificare la matematica». Qualunque insieme di assiomi fornisce enunciati che, pur essendo evidentemente veri, non possono essere dimostrati partendo da quegli assiomi. Ancor prima Bertrand Russell aveva fatto notare che la teoria degli insiemi, che sta alla base di gran parte della matematica, pullula di contraddizioni logiche legate al problema dell'autoreferenza (che è illustrato dall'enunciato autocontraddittorio «Questa proposizione è falsa»). «La teoria degli insiemi è basata su garbate bugie, cose su cui conveniamo anche se sappiamo che non sono vere» dice Thurston. «Per certi versi i fondamenti della matematica hanno qualcosa di irreale.»

Secondo Thurston le magagne si celano più facilmente nelle dimostrazioni altamente formali che in quelle dove ci si richiama a un livello di comprensione più intuitivo. In particolare è affascinato dalla capacità della grafica al calcolatore di comunicare concetti matematici astratti anche a persone estranee alla cerchia degli specialisti. Due anni fa, per sua sollecitazione, il Geometry Center allestì con l'aiuto del calcolatore una «dimostrazione video», *Not Knot*, che illustra una congettura rivoluzionaria da lui stesso dimostrata una decina d'anni fa. Thurston ricorda con orgoglio che il gruppo rock dei Grateful Dead ha proiettato il video durante i propri concerti.



Il problema del ricevimento è stato risolto da Stanislaw P. Radziszowski e Brendan D. McKay dopo lunghissimi calcoli. Essi hanno dimostrato che occorrono almeno 25 invitati per garantire che quattro di essi si conoscano tutti oppure che cinque siano tra loro estranei. Da questo diagramma, dove i segmenti rossi collegano gli amici e quelli gialli gli estranei, si vede che un gruppo di 24 invitati non soddisfa l'enunciato.

Che poi gli ammiratori dei Grateful Dead afferrino completamente la sostanza del video (che riguarda il comportamento in uno spazio non euclideo «iperbolico» di oggetti matematici detti varietà tridimensionali) è un altro paio di maniche. Thurston ammette che il video è difficile da comprendere fino in fondo per i non matematici, e anche per alcuni specialisti, ma ciò non lo sgomenta. Il Geometry Center sta infatti allestendo un video su un altro dei suoi teoremi, che mostra come si possa rivoltare una sfera come un guanto. L'autunno scorso, inoltre, Thurston ha organizzato un convegno per discutere in che modo la realtà virtuale e altre tecnologie avanzate possano essere utili alla visualizzazione matematica.

È paradossale il fatto che i calcolatori abbiano catalizzato una controtendenza per cui la verità viene ottenuta a spese della comprensibilità. Nel 1976 Kenneth Appel e Wolfgang Haken dell'Università dell'Illinois annunciarono di aver dimostrato la congettura dei quattro colori, secondo la quale bastano quattro colori diversi per disegnare una carta geografica anche infinita in cui due paesi indicati con lo stesso colore non siano mai confinanti. Per certi versi la dimostrazione di Appel e Haken era tradizionale, cioè consisteva in una serie di passaggi logici e concatenati che portavano a una conclusione; e la conclusione era che la congettura poteva essere ricondotta alla verifica del comportamento di circa 2000 carte diverse.

Poiché eseguire a mano questo controllo sarebbe risultato proibitivo, Appel e Haken programmarono un calcolatore e gli affidarono la verifica. Dopo un migliaio di ore di calcoli, la macchina concluse che le 2000 carte geografiche si comportavano come previsto: dunque la congettura dei quattro colori era vera.

Il problema del ricevimento

In seguito sono state effettuate altre dimostrazioni con l'ausilio del calcolatore. Proprio quest'anno Stanislaw P. Radziszowski del Rochester Institute of Technology e Brendan D. McKay dell'Australian National University di Canberra hanno annunciato di aver dimostrato il cosiddetto problema del ricevimento. Questo problema, scaturito dalle ricerche sulla teoria degli insiemi compiute negli anni venti dal matematico britannico Frank P. Ramsey, può essere enunciato con una domanda sui rapporti intercorrenti tra gli ospiti di un ricevimento: qual è il minimo numero di persone che devono essere invitate per essere certi che almeno x ospiti si conoscano tutti o che almeno y ospiti siano tra loro estranei? Questo numero è detto numero di Ramsey.

Dimostrazioni ottenute in precedenza avevano stabilito che occorrono almeno 18 ospiti per garantire che vi siano quattro conoscenti o quattro estranei; con la loro dimostrazione Radziszowski e McKay hanno stabilito che il numero di Ramsey per quattro conoscenti o cinque estranei è 25. Gli amanti della mondanità ci pensino due volte prima di tentare il calcolo del numero di Ramsey per x e y più grandi: secondo le stime di Radziszowski e McKay, la dimostrazione ha richiesto l'equivalente di undici anni di calcoli con una normale macchina da tavolo. Radziszowski ritiene che, per i problemi di matematica pura, questo sia un primato.

Il significato di questa impresa è stato discusso in una sede inconsueta, la rubrica delle risposte ai lettori curata da Ann Landers su un quotidiano. In giugno un lettore scrisse alla Landers sostenendo che le risorse impiegate per risolvere il problema del ricevimento avrebbero dovuto essere usate per aiutare i «bambini affamati dei paesi devastati dalla guerra». Alcuni matematici sollevano un'altra obiezione contro le dimostrazioni assistite dal calcolatore. «Io non credo nelle dimostrazioni fatte dal calcolatore» dice Pierre Deligne dell'Institute for Advanced Study, specialista di geometria algebrica e insignito della Fields Medal nel 1978. «In un certo senso io sono molto egocentrico. Credo in una dimostrazione se la capisco, se è chiara.» Benché riconosca che le persone possano commettere errori, Deligne aggiunge: «Anche un calcolatore commette errori, e sono molto più difficili da scoprire».

Altri adottano un atteggiamento più pragmatico e sostengono che stabilire la verità è più importante che dare ai matematici una soddisfazione estetica, soprattutto se si vuole che un risultato trovi applicazioni. I sostenitori di questo punto di vista, che in genere sono informatici, osservano che anche le dimostrazioni tradizionali sono tutt'altro che esenti

Matematici di silicio

La progressiva invasione della matematica da parte dei calcolatori ha riacceso un'antica disputa: la matematica può essere completamente automatizzata? I grandi matematici del prossimo secolo saranno di silicio?

In effetti gli informatici lavorano da decenni a programmi che generano congetture e dimostrazioni matematiche. Verso la fine degli anni cinquanta il guru dell'intelligenza artificiale Marvin Minsky mostrò come un calcolatore potesse «riscoprire» alcuni teoremi fondamentali della geometria euclidea. Negli anni settanta Douglas Lenat, ex studente di Minsky, presentò un programma che formulava teoremi di geometria ancora più avanzati. Gli scettici obiettarono che in realtà i risultati erano già contenuti nel programma originale.

Una decina d'anni fa l'informatico e imprenditore Edward Fredkin cercò di riaccendere il declinante interesse per la matematica eseguita dal calcolatore istituendo quello che poi fu chiamato premio Leibniz. Questo premio di 100 000 dollari, gestito dalla Carnegie Mellon University, spetta al primo programma per calcolatore capace di formulare un teorema che abbia un «profondo effetto» sulla matematica.

Alcuni esperti di quello che viene chiamato ragionamento automatico pensano di avere ormai diritto al premio. Uno di essi è Larry Wos dell'Argonne National Laboratory, direttore di «Journal of Automated Reasoning», il quale sostiene che il programma da lui allestito ha risolto problemi di matematica e di logica «che avevano sfidato i ricercatori per anni». Un altro è Siemeon Fajtlowicz dell'Università di Houston, inventore di un programma, «Graffiti», che ha proposto «migliaia» di congetture di teoria dei grafi.

Secondo David Mumford della Harvard University, che fa parte della giuria del premio, nessuno di questi risultati soddisfa neppure lontanamente il criterio del «profondo effetto». Se gli si chiede quando, secondo lui, verrà assegnato il premio, Mumford risponde: «Non ora, e neppure fra cent'anni».

Alcuni osservatori ritengono però che prima o poi i calcolatori supereranno le nostre capacità matematiche. In fin dei conti, osserva Ronald L. Graham degli AT&T Bell Laboratories, «noi non siamo molto adatti a elucubrare sul continuo spazio-temporale o sull'ipotesi di Riemann. Siamo progettati per raccogliere bacche o per evitare di essere mangiati».

Altri si schierano con il fisico matematico Roger Penrose dell'Università di Oxford, il quale nel suo libro *La mente nuova dell'imperatore* sostiene che i calcolatori non potranno mai sostituire i matematici. La sua argomentazione si rifà alla teoria quantistica e al teorema di incompletezza di Gödel, ma forse Penrose è più convincente quando discute la propria esperienza personale. Secondo lui, ai livelli più alti, la matematica è un'arte, un atto creativo che non può essere ridotto alla logica più di quanto sia possibile ricondurvi *Re Lear* o la *Quinta* di Beethoven.

Bolle di sapone: effimere e complesse

Tra i metodi della matematica sperimentale cui si accenna nell'articolo di John Horgan vi sono le bolle di sapone. Alle notevoli proprietà geometriche e fisiche di queste lucide sfere hanno da secoli dedicato la loro attenzione scienziati anche illustri, tra cui Isaac Newton, Robert Boyle e Robert Hooke. La proprietà matematica più importante delle bolle è senz'altro quella di minimo: dato un certo volume (quello dell'aria soffiata), la più piccola superficie capace di racchiuderlo è la sfera, forma che la bolla assume quasi per magia risolvendo questo classico problema matematico in un caso semplicissimo. Vi sono anche casi molto più complessi, che furono affrontati sistematicamente soprattutto da Joseph-Antoine-Ferdinand Plateau (1801-1883).

Plateau considerava una curva qualsiasi e, utilizzando proprio le lamine saponate, cercava, tra le superfici aventi come bordo la curva assegnata, quella di area minima. È la tensione superficiale (cioè la forza attrattiva tra le molecole) che «obbliga» una bolla o una lamina saponata ad assumere, all'equilibrio, una superficie che abbia la minima area compatibile coi vincoli imposti (il contorno). Plateau (che per ironia della sorte divenne cieco, ma continuò a studiare le bolle con l'aiuto di un fedele assistente) scoprì in questo modo che le forme delle lamine rette da telai metallici di svariatissime fogge (tetraedrica, dodecaedrica, elicoidale e così via) non sono casuali, ma obbediscono a regole precise.

Anche se oggi il calcolatore consente di studiare i problemi di minimo, e altri problemi connessi, con l'aiuto dell'eidomatica, le bolle e le lamine di sapone, oltre a esercitare il loro fascino di sempre, restano strumenti validi e praticissimi per suggerire, almeno in certi casi, utili soluzioni sperimentali. Per esempio, per il problema della rete di lunghezza minima - si pensi al solito commesso viaggiatore, che deve visitare tutti i suoi clienti, ma vuole percorrere la strada più breve (si veda «Le Scienze» n. 247, marzo 1989, p. 81) - si possono ottenere, in casi non troppo complessi, soluzioni immediate con un semplicissimo telaio, che a buon diritto si può chiamare «calcolatore a lamine di sapone».

Segnaliamo il volume che a queste eteree creature ha dedicato il matematico Michele Emmer (*Bolle di sapone*, La Nuova Italia, Firenze 1991, pp. 144, L. 120 000). Il libro, di grande interesse e splendidamente illustrato, sembra proprio ispirato al detto di Lord Kelvin: «Fate una bolla di sapone e osservatela: potreste passare tutta la vita a studiarla». Oltre a offrirci un'abbondante iconografia che documenta la presenza delle bolle nelle arti figurative dal Rinascimento in poi, l'autore ci guida alla scoperta di un mondo affascinante e sorprendente, in cui s'intrecciano letteratura e fisica, architettura e biologia, chimica, matematica e pittura. Un cenno a parte merita il capitolo dedicato alle affinità strutturali tra bolle di sapone e radiolari, minuscoli componenti del plancton. Questo capitolo è illustrato da alcuni dei disegni del naturalista Ernst Haeckel per uno dei cinquanta volumi di dati e osservazioni raccolti durante la spedizione della corvetta inglese *H.M.S. Challenger* tra il 1872 e il 1876. (*Giuseppe O. Longo*)

Telai a forma di tetraedro, di prisma regolare e di ottaedro tratti dal film di Michele Emmer *Soap bubbles*.

da errori. All'inizio del secolo quasi tutti i teoremi erano abbastanza brevi da poter essere letti da cima a fondo in una sola volta ed erano opera di un unico autore. Oggi le dimostrazioni occupano spesso centinaia di pagine e sono così complicate che possono passare anni prima che siano confermate da altri.

Tra le dimostrazioni tradizionali, il primato spetta attualmente alla classificazione dei gruppi semplici finiti, terminata nei primi anni ottanta. (Un gruppo è un insieme di elementi, per esempio gli interi, con un'operazione, per esempio l'addizione, che, dati due elementi, ne fornisce un terzo.) La dimostrazione consiste in circa 500 articoli, scritti da più di cento ricercatori, per un totale di quasi 15 000 pagine. Si è affermato che l'unica persona che aveva capito la dimostrazione nella sua interezza era il responsabile del progetto, Daniel Gorenstein della Rutgers University. Gorenstein è morto l'anno scorso.

Anche dimostrazioni molto più brevi possono sollevare dubbi. Tre anni fa Wu-Yi Hsiang di Berkeley annunciò di aver dimostrato una vecchia congettura secondo cui, per stipare in un volume assegnato il massimo numero di sfere, bisogna impilarle come palle di cannone. Oggi alcuni scettici sono convinti che nelle 100 pagine della dimostrazione si annidi un errore fatale; altri sono ugualmente certi che la dimostrazione sia sostanzialmente corretta.

In effetti, secondo alcuni specialisti di informatica, per migliorare l'affidabilità bisogna intensificare e non ridurre il ricorso al calcolatore. Robert S. Boyer dell'Università del Texas ad Austin ha diretto il Progetto QED, un tentativo di comprimere tutto il dilagante corpus della matematica moderna in un'unica base di dati, la cui coerenza potrà essere verificata mediante «controllori automatici di dimostrazioni».

Stando al manifesto del progetto, gli utenti di questa base di dati potranno «esaminare la totalità delle conoscenze matematiche per ricavarne i risultati a cui sono interessati e, ricorrendo agli strumenti del sistema QED, sfruttare questi risultati con sicurezza e fiducia, senza bisogno di comprenderne i dettagli e neppure i fondamenti ultimi». Il sistema QED, proclama con una certa magniloquenza il manifesto, potrà anche «costituire un antidoto agli effetti degenerativi del relativismo culturale e del nichilismo» e, presumibilmente, proteggere la matematica dalla tentazione del tutto umana di cedere alle mode.

Il dibattito sulle dimostrazioni al calcolatore si è intensificato di recente con l'avvento di una tecnica che offre non la certezza della verità, ma solo una probabilità statistica. Queste dimostrazioni sfruttano metodi simili a quelli su cui si basano i codici per la correzione degli errori, i quali, rendendo i messaggi trasmessi altamente ridondanti, li proteggono dal rumore e da altri effetti dannosi. La dimostrazione deve per prima cosa essere espressa in tutti i particolari secondo una forma rigorosa di logica matematica. Poi la logica subisce un'ulteriore trasformazione, l'aritmetizzazione, in cui «and», «or» e altre funzioni sono tradotte in operazioni aritmetiche come l'addizione e la moltiplicazione.

Come un messaggio trasformato da un codice per la correzione degli errori, la «risposta» di una dimostrazione probabilistica è distribuita su tutta la sua lunghezza, come lo sono gli eventuali errori. La dimostrazione viene controllata esaminandola in diversi punti e stabilendo se le risposte sono coerenti; all'aumentare del numero dei controlli, aumenta la certezza che l'argomentazione sia corretta. Laszló Babai dell'Università di Chicago, che ha messo a punto questo tipo di dimostrazioni due anni fa (insieme con Lance Fortnow, Carsten Lund e Mario Szegedy di Chicago e Leonid A. Levin dell'Università di Boston), le chiama «trasparenti». Manuel Blum di Berkeley, le cui ricerche hanno aperto la via al gruppo di Babai, propone invece il termine «olografiche».

Un avvenire incerto

Comunque le si chiami, queste dimostrazioni presentano alcuni inconvenienti pratici. Szegedy riconosce che trasformare una dimostrazione tradizionale in forma probabilistica è difficile e ne può risultare «qualcosa di molto più brutto e ingombrante». Per esempio una dimostrazione di 1000 righe può facilmente lievitare fino a 1000^3 (cioè un miliardo) righe. Tuttavia Szegedy sostiene che se lui e i suoi colleghi riuscissero a semplificare il procedimento di trasformazione, le dimostrazioni probabilistiche potrebbero diventare un metodo utile per verificare enunciati matematici e calcoli molto impegnativi (come quelli che portano alla dimostrazione del teorema dei quattro colori). «Il costo filosofico di questo metodo, così efficiente, è la perdita della certezza assoluta tipica di una dimostrazione euclidea» ha osservato Babai in un suo recente saggio, «ma se aveste dei dubbi, ve la sentireste di scommettere?».

Levin ritiene che sarebbe facile essere tratti in inganno da una tale scommessa, poiché anche un numero relativamente piccolo di controlli renderebbe trascurabile la probabilità di errore: uno diviso per il numero di particelle dell'universo. Levin rileva inoltre che perfino le più semplici dimostrazioni tradizionali sono soggette a dubbi di quest'ordine. «Per il principio d'indeterminazione di Heisenberg, nell'istante in cui scopro un errore il mio cervello potrebbe scomparire ed essere sostituito da un cervello che ritiene corretta la dimostrazione.»

Ronald L. Graham degli AT&T Bell Laboratories ipotizza che sia inevitabile una tendenza ad allontanarsi dalle brevi e chiare dimostrazioni tradizionali, che sono al di là di ogni ragionevole dubbio. «Può darsi» spiega «che le cose che è possibile dimostrare siano solo minuscole isole, eccezioni, in un vasto mare di risultati che non possono essere dimostrati dal solo pensiero umano». I matematici che cercano di solcare rotte non ancora segnate potrebbero essere costretti a dipendere sempre più da esperimenti, dimostrazioni probabilistiche e altre guide: «Forse non saremo più in grado di fornire dimostrazioni in senso classico».

Naturalmente, a mano a mano che gli studiosi diventeranno più dipendenti dal calcolatore, la matematica potrebbe fornire sempre meno soddisfazioni estetiche. «Sarebbe molto scoraggiante» osserva Graham «se a un certo punto io chiedessi a un calcolatore se l'ipotesi di Riemann è corretta e la macchina mi rispondesse: "Sì, ma non riuscirai mai a capire la dimostrazione"».

Al solo pensiero, senza dubbio, i tradizionalisti rabbrividiscono. Per il momento possono far quadrato intorno a eroi come Wiles, colui che ha sbaragliato l'ultimo teorema di Fermat, che rifugge da calcolatori, applicazioni e altri obbrobri. Ma se si vuol dare credito ai rapporti che giungono dal fronte dell'istruzione preuniversitaria, in futuro i Wiles potrebbero essere sempre più rari. Al Mathematical Sciences Research Institute di Berkeley, diretto da Thurston, si svolge una serie permanente di seminari con insegnanti delle scuole superiori per scoprire nuovi modi di attrarre gli studenti verso la matematica. Nel gennaio scorso la vicedirettrice dell'istituto, Lenore Blum, ha organizzato un seminario sul tema: «Sono superate le dimostrazioni di geometria nelle scuole superiori?».

I matematici hanno sostenuto che le dimostrazioni sono essenziali per garantire la verità di un risultato, ma gli insegnanti hanno obiettato che gli studenti considerano le tradizionali argomentazioni assiomatiche meno convincenti che non, per esempio, le dimostrazioni visive. Secondo gli atti del convegno, «la stragrande maggioranza degli insegnanti ha dichiarato che per lo più gli studenti di oggi (la generazione dei videogiochi e della televisione) non sono sensibili alle "dimostrazioni" e non ne capiscono l'importanza». Si notino le virgolette che accompagnano la parola «dimostrazioni».

BIBLIOGRAFIA

PETERSON IVARS, *Islands of Truth: A Mathematical Mystery Cruise*, W. H. Freeman and Company, 1990.

STEWART IAN, *The Problems of Mathematics*, Oxford University Press, 1992.

BARROW JOHN D., *Pi in the Sky: Counting, Thinking, and Being*, Oxford University Press, 1992.