Morte e resurrezione della dimostrazione

Calcolatori, esperimenti e validazione sociale non rendono superflua la logica: la dimostrazione si adegua alla complessità dei livelli trasformandosi in metadimostrazione

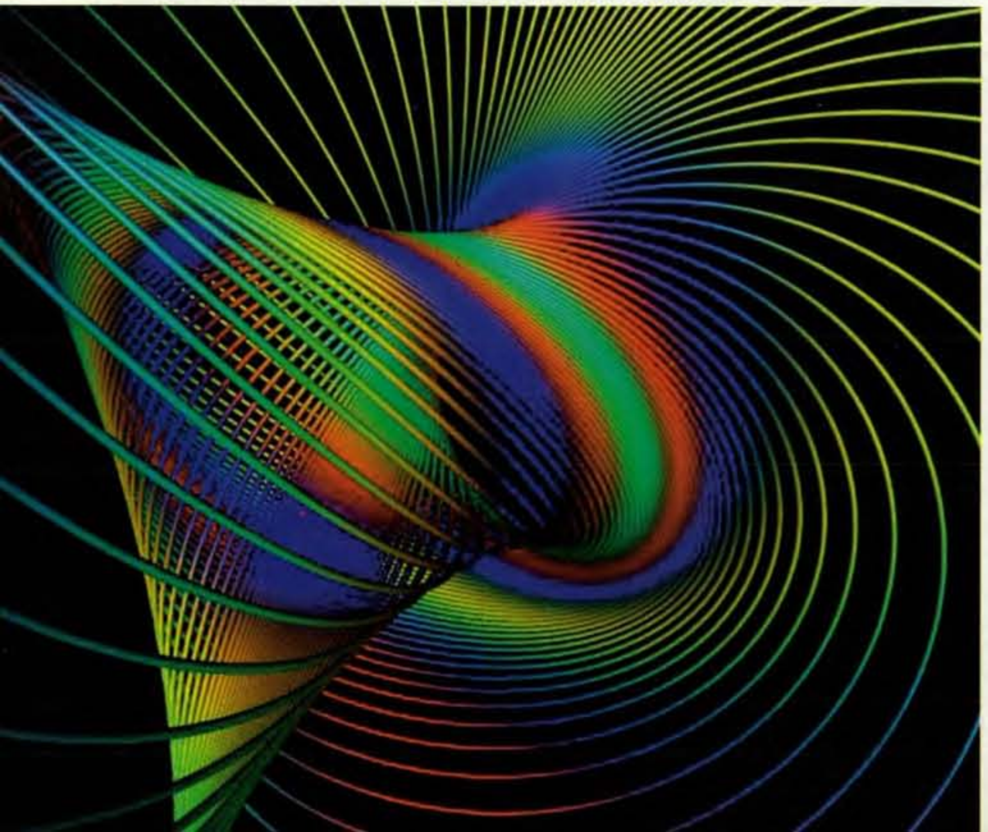
di Gabriele Lolli

«Ci si può chiedere se la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat non sia stato l'estremo sussulto di una cultura morente... Per millenni, i matematici hanno commisurato i loro progressi a ciò che si può dedurre tramite la dimostrazione, cioè *una successione di passaggi logici che da una serie di assiomi porta a una conclusione irrefutabile*. Ebbene, i dubbi che travagliano *il pensiero odierno* hanno ormai contaminato anche la matematica. Può darsi che i matematici siano prima o poi costretti ad accettare ciò che già molti scienziati e filosofi hanno ammesso, cioè che le loro asserzioni sono, nella migliore delle ipotesi, *vere solo provvisoriamente*, finché non se ne dimostri la falsità» [*corsivi nostri*]. Quello che precede è il necrologio della dimostrazione matematica stilato tempo addietro da John Horgan (*Morte della dimostrazione* in «Le Scienze» n. 304, dicembre 1993, pp. 82-91) che dava voce in modo meditato a sensazioni e opinioni diffuse sia nel campo scientifico sia in quello della scuola.

Gli esempi proposti da Horgan rientrano in due categorie; da una parte l'estrema complessità delle dimostrazioni recenti dei risultati più significativi, e, dall'altra, gli effetti del calcolatore. Effetti duplici, per non dire ambigui; se è vero che il calcolatore (ri)lancia la matematica sperimentale - sia in campo numerico sia in nuovi settori dove è sfruttata la grafica della geometria computazionale (modelli di cui si può seguire l'evoluzione, ricavandone congetture) - è anche vero che il calcolatore permette la formalizzazione completa delle dimostrazioni, realizzando l'ideale delle dimostrazioni logiche ben oltre i limiti manuali. Con le dimostrazioni automatiche si produce tuttavia una specie di riduzione all'assurdo dell'impresa stessa della formalizzazione, perché le dimostrazioni diventano opache e poco o nulla significative. In ogni caso, che siano lunghe, non scritte, sparpagliate su diverse riviste o nascoste nel calcolatore, le dimostrazioni risultano inaccessibili e sottratte al controllo sociale, e questo proprio mentre diventa sempre più diffusa l'opinione che la matematica sia «un corpo di conoscenze e di tecniche soggetto a condizionamenti sociali».

La matematica produce dimostrazioni sempre più spericolate e in chi deve dominarle, o insegnarle, la confusione e il disagio sono forti; si è arrivati a proporre l'istituzionalizzazione di un nuovo tipo di matematica, esplicitamente senza dimostrazioni, ma consistente di congetture, esempi, e allusioni, da chiamare «matematica teorica», in analogia (poco gradita ai fisici) alla fisica teorica.

Istituzioni prestigiose con responsabilità nella didattica, come lo US National Research Council, sostengono che, grazie ai calcolatori, studenti che abbiano anche solo una minima capacità nelle tecniche fondamentali dell'algebra dovrebbero poter affrontare corsi di calcolo appositamente concepiti, cioè senza dimostrazioni. La scuola secondaria non è il luogo per imparare a scrivere dimostrazioni matematiche rigorose e formali; per quello ci sono i corsi universitari avanzati. Ma pare che non sia così. Il giovane ricercatore impara a comportarsi come i suoi pari e a dialogare con essi; ma chi, invece, vuole dedicarsi all'insegnamento, non trova neanche nei corsi universitari un modello di dimostrazione comprensibile e trasferibile. «Quando ho iniziato il dottorato a Berkeley, avevo difficoltà a immaginare come avrei potuto "dimostrare" un teorema matematico nuovo e interessante. Andando ai seminari, leggendo articoli e parlando ad altri studenti, gradualmente cominciai a orientarmi. In ogni settore, ci sono teoremi e tecniche generalmente noti e accettati. Quando si scrive un articolo, ci si riferisce a questi senza dimostrazione. Si guardano gli altri articoli nel settore, e si vede quali fatti citano senza dimostrazione e a quali articoli rimandano nella loro bibliografia. Si impara dagli altri una certa idea delle dimostrazioni. Quindi ci si sente autorizzati a riferirsi agli stessi fatti e a citare le stesse citazioni [...] Dapprima ero sospettoso di questo modo di procedere. Avevo dei dubbi sul fatto che una certa idea fosse davvero stabilita. Ma mi accorsi che potevo chiedere in giro, e i colleghi potevano produrre spiegazioni e prove, oppure indicarmi altre persone o fonti scritte dove potevano trovarsi spiegazioni e dimostrazioni. C'erano teoremi pubblicati che si sapeva che erano falsi, le cui prove erano ritenute incomplete. La conoscenza e la comprensione matematica erano impiantate nelle menti e nel tessuto sociale della comunità di persone che pensavano a un certo argomento.» Così il noto matematico William P. Thurston.



Visualizzazione di un toro di Hopf, realizzata al computer da Robert Scharein della University of British Columbia.

Peraltro, i matematici passano il tempo a discutere, correggere, migliorare, comunicare i loro risultati; è una attività di costruzione sperimentale, con prevalenza dialogica, ma il cui oggetto sono le dimostrazioni; sembrerebbe impertinente dire loro che stanno facendo altro, e che cosa? Ciò che non vogliono accettare è una rigida codifica del loro pensiero, tanto più in sistemi di logica. L'attività dei matematici sfugge a un modello di dimostrazione logica a cui la pratica non solo non si adegua, ma neanche sembra tendere, con gli oggetti che produce. L'insegnamento sistematico, invece, si basa su un modello statico, compiuto, che vive solo nei libri e nelle lezioni.

Miti e storia

Le tensioni coesistono con uno sviluppo senza precedenti della matematica. Ma gli esseri umani sono portati alla drammatizzazione e piace loro pensare di vivere sull'orlo di svolte epocali: la sindrome della fine del mondo si manifesta nella costruzione di un resoconto mitico e di un oggetto mitico; il resoconto è mitico perché del tutto statico, e poco rispettoso della storia; in esso si attribuiscono a un fantomatico oggetto (la dimostrazione, o la ragione) caratteristiche, pretese e promesse impegnative (e invariate per millenni o secoli), che ora starebbero crollando.

La matematica in effetti è diventata regina delle scienze non tanto e non solo per la sua utilità, a lungo confinata nel campo della meccanica e con poca influenza sulle ricerche empiriche, quanto per il tipo di certezza attribuitale, che si rifletteva su tutta l'impresa scientifica. Galileo pensava alla scienza in genere quando avvertiva nei *Discorsi* che «voglio dimostrativamente accertarvi, e non con solamente probabili discorsi persuadervi». La frase riecheggia Gemino (filosofo stoico del I secolo, citato da Proclo) che ricordava come «abbiamo imparato dagli stessi pionieri di questa scienza a non tenere in alcun conto le conclusioni solo plausibili, quando si tratta di ragionamenti che devono far parte della nostra dottrina geometrica».

La dimostrazione matematica si fa giustamente risalire ai greci. Da allora, ha osservato Bourbaki, chi dice matematica dice dimostrazione.

Ai greci possiamo invero far risalire l'idea che ci sia una conoscenza che si distingue dall'opinione; per distinguerla tuttavia si è mirato alto: la scienza è conoscenza delle verità necessarie; e conoscenza (necessariamente) assoluta, non basata solo sull'assenso retoricamente strappato. Ma non è tanto la matematica che, per i greci, realizza l'idea che una conoscenza delle cose necessarie sia possibile; è la scienza, per Aristotele, o la dialettica per Platone.

Per Aristotele «la dimostrazione riguarda le cose necessarie... Intendo per dimostrazione il sillogismo scientifico e chiamo scientifico il sillogismo in base al quale, per il fatto di possederlo, noi sappiamo... È necessario che la scienza dimostrativa si costituisca a partire da premesse vere, prime, immediate, più note e anteriori rispetto alla conclusione e causa di essa» (*Analitici Secondi*, I: 2).

Nei primi dialoghi Platone fa riferimento in modo positivo al «metodo per ipotesi» dei geometri, nella forma codificata da Ippocrate di Chio. Questi aveva tentato un'organizzazione parziale delle proposizioni geometriche, ma l'insieme dei principi era determinato dalle condizioni del problema specifico, non in funzione di tutta la teoria. I problemi

Il metodo di Descartes

«Io mi dilettavo soprattutto della matematica, a causa della certezza ed evidenza delle sue ragioni; ma io non avevo ancora colto il loro vero uso, e pensando che essa servisse alle arti meccaniche solo, mi meravigliavo che, essendo i suoi fondamenti così saldi e solidi, non vi si fosse costruito sopra nulla di più elevato.

Poi, per l'analisi degli antichi e l'algebra dei moderni, a parte il fatto che esse non si applicano che a delle materie molto astratte, e che non sembrano di alcuna utilità, la prima è sempre così vincolata alla considerazione delle figure che non può esercitare l'intendimento senza affaticare considerevolmente l'immaginazione; e nella seconda si è così assoggettati a certe regole e a certe cifre che se ne è fatta un'arte confusa e oscura che imbarazza lo spirito, invece di una scienza che lo coltiva...

[*Il nuovo metodo è fondato sui seguenti principi:*]

Il primo era quello di non accettare mai una cosa per vera, a meno che non la conoscessi evidentemente per tale... di non comprendere nei miei giudizi nulla che non mi si presentasse così chiaramente e distintamente allo spirito che non avessi alcuna occasione di metterla in dubbio.

Il secondo, di dividere ogni difficoltà che mi si presentasse in tante parti che si potesse e si richiedesse per meglio risolverla.

Il terzo, di condurre con ordine i miei pensieri, cominciando dagli oggetti più semplici e più facili da conoscere, per risalire a poco a poco, come per gradi, fino alla conoscenza dei più complessi...

E infine, di fare sempre delle enumerazioni così complete, e delle rassegne così generali, da essere sicuro di non omettere nulla.

Quelle lunghe catene di ragioni, tutte semplici e facili, di cui i geometri sono abituati a servirsi per pervenire alle loro dimostrazioni più difficili, mi avevano dato occasione di immaginare che tutte le cose che possono cadere sotto la conoscenza dell'uomo si raggiungono nello stesso modo...

Si vede chiaramente perché l'aritmetica e la geometria sono molto più certe delle altre scienze; è perché esse trattano di un oggetto così puro e semplice che non ammette nulla che l'esperienza possa aver reso incerto, e che esse consistono tutte in una serie di conseguenze dedotte per ragionamento, [*in cui*] salvo disattenzioni, sembra impossibile per l'uomo commettervi errori» (R. Descartes, *Discours de la méthode*, in *Œuvres et lettres*, Gallimard, Parigi, 1953.)

Sulla lunghezza delle dimostrazioni

Descartes

«Talvolta la deduzione si dà con una così lunga serie di conseguenze che, quando siamo arrivati alla fine, non ci ricordiamo più facilmente del cammino che abbiamo percorso fino là; per questo diciamo che dobbiamo soccorrere la debolezza della memoria con un movimento continuo del pensiero... allora io le percorro più volte con un movimento continuo dell'immaginazione che, nello stesso tempo, deve avere l'intuizione di ciascuna cosa e passare alle altre, finché non imparo a passare dalla prima all'ultima così rapidamente da non lasciare alcun ruolo alla memoria, e avere, sembra, l'intuizione di tutto in una volta» (R. Descartes, *Regulae ad directionem ingenii*, VII, in *Œuvres et lettres*, Gallimard, Parigi, 1953, p. 57).

Leibniz

«L'unico dubbio che può accompagnare una dimostrazione matematica si riferisce alla possibilità di errore nei calcoli degli aritmetici. A questo non v'è rimedio, se non quello di esaminare il calcolo molte volte, o con differenti calcoli, aumentando a ogni verifica l'affidabilità. Questa debolezza della mente umana, che nasce da mancanza di attenzione e di memoria, non può essere del tutto eliminata, il rimedio suggerito da Descartes è inutile. La garanzia che è sufficiente in matematica è la stessa che negli altri settori; invero ogni ragionamento, anche quello di Descartes, per quanto verificato e accurato, sarà soggetto a questo dubbio, qualunque cosa si pensi alla fine di potenti geni ingannatori o della differenza tra sonno e veglia.» (G.W. Leibniz, *Die philosophischen Schriften*, Olms, Hildesheim, 1965.)

Hume

«Se la mente, con maggiore facilità, ritiene le idee della geometria chiare e determinate [perché sensibili], essa deve però eseguire una catena di ragionamenti molto più lunga e più intricata, e confrontare idee molto più distanti l'una dall'altra, per raggiungere le verità più astruse di quella scienza. Al contrario, se le idee morali conducono facilmente in oscurità e confusione, se non si presta estrema cura, le inferenze relative sono sempre molto più corte, in queste disquisizioni, e i passi intermedi, che portano alla conclusione, molti di meno che nelle scienze che trattano di quantità e numero... Il maggiore ostacolo, perciò, al miglioramento delle scienze morali o metafisiche è l'oscurità delle idee, e l'ambiguità dei termini. La principale difficoltà nella matematica è la lunghezza delle inferenze e l'ampiezza di pensiero, necessarie al formarsi di ogni conclusione» (D. Hume, *An Enquiry Concerning Human Understanding*, Open Court Pu. Co., Chicago, 1966, p. 65).

«In tutte le scienze dimostrative le regole sono certe e infallibili; ma quando le applichiamo, le nostre facoltà fallibili e incerte sono prone ad allontanarsi da esse, e a cadere in errore. In ogni ragionamento noi dobbiamo perciò formare un nuovo giudizio, come verifica o controllo sul nostro primo giudizio o credenza; e dobbiamo allargare la nostra visione in modo da comprendere una specie di storia di tutti i casi in cui la nostra comprensione ci ha ingannati, confrontati con quelli in cui la sua testimonianza è risultata giusta e vera. La nostra ragione deve essere considerata una specie di causa, di cui la verità è l'effetto naturale; ma una causa tale che, per interferenza di altre cause, e per l'incostanza dei nostri poteri mentali, può frequentemente essere bloccata. Per queste circostanze, ogni conoscenza degenera in probabilità; e questa probabilità è maggiore o minore, a seconda della nostra esperienza della veracità o tendenza all'inganno della nostra comprensione, e a seconda della semplicità o complicazione del problema.

Non esiste alcun Algebrista o Matematico tanto esperto nella sua scienza da riporre completa confidenza in una verità qualsiasi immediatamente al momento della sua scoperta, e da considerarla in altro modo che come una mera probabilità. Ogni volta che riesamina le sue dimostrazioni, la sua confidenza si accresce; ma ancor più [si accresce] per l'approvazione dei suoi amici; e sale alla più alta perfezione in seguito all'assenso universale e alle lodi del mondo dei sapienti. Ora è evidente, che questo graduale aumento della sicurezza non è altro che l'aggiunta di nuove probabilità, ed è derivato dalla costante unione di cause ed effetti, secondo la passata esperienza e l'osservazione.

In rendiconti di una qualche lunghezza e importanza, i Mercanti raramente fanno affidamento sull'infallibile certezza dei numeri per la loro tranquillità; ma attraverso la struttura artificiale dei conti, producono una probabilità maggiore di quella che è derivata dall'abilità e dall'esperienza dell'attuario. Quella certamente di per sé ha un certo grado di probabilità; benché incerta e variabile, a seconda del livello della sua esperienza e della lunghezza del conto. Ora siccome nessuno vorrà sostenere che la nostra fiducia in una lunga numerazione trascende la probabilità, io posso con sicurezza affermare che non c'è forse nessuna proposizione relativa ai numeri di cui possiamo avere una certezza maggiore. Perché è possibile senza difficoltà, gradualmente diminuendo i numeri, ridurre la più lunga serie di addizioni al problema più semplice che possa essere dato, di addizionare due singoli numeri; e sulla base di questa assunzione troveremo impraticabile segnare il preciso limite tra conoscenza e probabilità, o scoprire quel particolare valore in cui una finisce e inizia l'altra. Ma conoscenza e probabilità sono di natura così opposta e divergente, che non possono sfumare insensibilmente una nell'altra, perché non sono divisibili ma devono essere o interamente presenti o assenti. Inoltre, se ogni singola addizione fosse sicura, tutte lo sarebbero, e di conseguenza l'insieme, e la loro somma; a meno che il tutto non possa essere diverso dalle parti. Stavo quasi per dire che questo è certo; ma riflettendo, vedo che anche *questo* si deve ridimensionare, come ogni altro ragionamento, e dalla conoscenza degenerare in probabilità» (D. Hume, *A Treatise of Human Nature*, Clarendon, Oxford, 1988, pp. 180-181.).

erano ricondotti alle loro condizioni di risolubilità. Ippocrate per primo ricondusse il problema della duplicazione del cubo alla ricerca di medie proporzionali tra due rette date. Ippocrate, nel risolvere un problema, prima enunciava la proposizione-chiave che gli permetteva di risolverlo. Quindi questa era a sua volta dimostrata, ma in un ordine diverso da quello che si avrebbe in Euclide. La riducibilità di un problema a un altro è sfruttata da Platone nell'analisi filosofica: per stabilire se la virtù sia insegnabile si sposta il problema a quello se la virtù sia scienza, perché allora insegnabile; nel *Fedone* il problema dell'immortalità dell'anima viene ridotto a quello della esistenza delle idee.

Nella *Repubblica*, invece, è espressa una posizione critica nei confronti della matematica. Secondo Platone i geometri fanno un uso scorretto delle ipotesi perché non risalgono al principio ma discendono verso la fine, lasciando immobili le ipotesi, non potendo darne ragione; dei principi, considerati evidenti, non si dà ragione. La conoscenza diventa discorsiva, non scienza ma convenzione. «Coloro che si occupano di geometria e di aritmetica... suppongono l'esistenza del pari e del dispari e di tre tipi di angoli; essi ne parlano come di cose note: una volta supposto questo, ritengono di non doverne più rendere conto a nessuno, neppure a se stessi, come chiaro a tutti; e, partendo da questo presupposto, procedono con ordine, per arrivare di comune accordo allo scopo che la loro ricerca si era prefisso... [*ma*] se si prende per principio una cosa che non si conosce, e la proposizione finale e quelle intermedie si tessono con un filo sconosciuto, può essere benissimo che il tutto meccanicamente torni, ma come di qui potrà mai nascere una scienza?» (*Repubblica*, libro VI, 510, c-e). La nuova posizione di Platone riflette un rifiuto del metodo assiomatico, che in quegli anni si stava imponendo con la teoria delle proporzioni di Eudosso.

I matematici greci non si sarebbero riconosciuti in tale descrizione di un procedere in avanti da convenzioni; come minimo avevano un doppio movimento indietro e avanti, il «metodo di analisi e sintesi» che tanto diede da riflettere quando fu riscoperto in età moderna. La riflessione dei greci sulle dimostrazioni è varia e raffinata. Archimede sapeva distinguere la funzione della congettura da quella della dimostrazione; nel presentare a Eratostene il suo *Metodo sui teoremi meccanici*, lo assicurava che il metodo «sarà non meno utile anche per la dimostrazione degli stessi teoremi. Infatti anche a me alcune cose si manifestarono prima per via meccanica, e poi le dimostrai geometricamente; perché la ricerca fatta con questo metodo non importa una vera dimostrazione. Però è certamente più facile, dopo aver con tal metodo acquistato una certa cognizione delle questioni, trovarne la dimostrazione, anziché cercarla senza avere alcuna cognizione preliminare»: esempi citati da Archimede sono i teoremi di Eudosso sulla piramide e il cono, enunciati senza dimostrazione da Democrito.

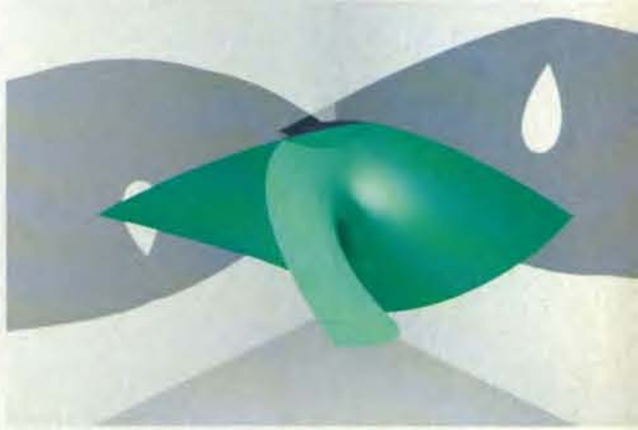
Ad Archimede si deve anche la teorizzazione di una condizione essenziale per l'accettazione di una dimostrazione, ossia l'esame e il riconoscimento da parte di esperti matematici: il controllo e la validazione sociale, come si dice oggi. Egli vuole sottoporre le sue dimostrazioni a coloro che sono in grado di capirle e valutarle; l'esito del controllo sociale si manifesta nel conferimento alle dimostrazioni di πίστις, nozione intermedia tra δόξα ed ἐπιστήμη, che si può tradurre con fiducia, garanzia, attendibilità. Archimede cerca questo sostegno perché per procedere alla quadratura della parabola deve assumere un assioma particolare (detto oggi assioma di Archimede), e confida di ottenere πίστις adeguata perché l'assioma è stato già impiegato per la dimostrazione o soluzione di problemi a cui è stata assegnata una πίστις non minore che alle altre. Altri assiomi (non facilmente ammissibili, non εὐπαραχώρητα) sono stati rifiutati, e i risultati ottenuti con essi non possono essere definiti scoperte.

Nell'età moderna si è conservata l'idea aristotelica che la scienza sia portatrice di una conoscenza assoluta di verità necessarie (nonostante la testimonianza storica della loro variabilità). Che questa sia realizzata nella matematica e secondo il modello della matematica lo dobbiamo soprattutto a Descartes, nel *Discorso sul metodo* *(si veda la finestra a pagina 51)*. Il metodo teorizzato da Descartes, e per la matematica codificato da Pascal, presenta l'ulteriore vantaggio di spiegare perché e come la conoscenza certa e assoluta possa essere ottenuta con una attività discorsiva, o razionale, con la conseguenza di essere in grado di convincere, di costringere a un assenso razionale.

Non che non ci fossero obiezioni, ben prima del post-nichilismo, al carattere assoluto della certezza ottenibile con la dimostrazione di Descartes; non sorprendono le riserve degli empiristi, ma anche un razionalista come Leibniz era scettico sulla possibilità di eliminare ogni dubbio, a causa della debolezza della memoria e dell'instabilità dell'attenzione; Leibniz e Hume introducono (con scarsa eco) nella riflessione sulla dimostrazione i temi della fallibilità delle facoltà umane nell'applicazione delle regole, ancorché meccaniche e infallibili; della lunghezza delle dimostrazioni come contropartita della perfetta determinazione delle idee; della necessità della ripetizione dei controlli e della formazione di un giudizio superiore sull'attendibilità del tipo di procedimento seguito; dell'opportunità, infine, e dell'inevitabilità della verifica sociale.

Crisi e rigore

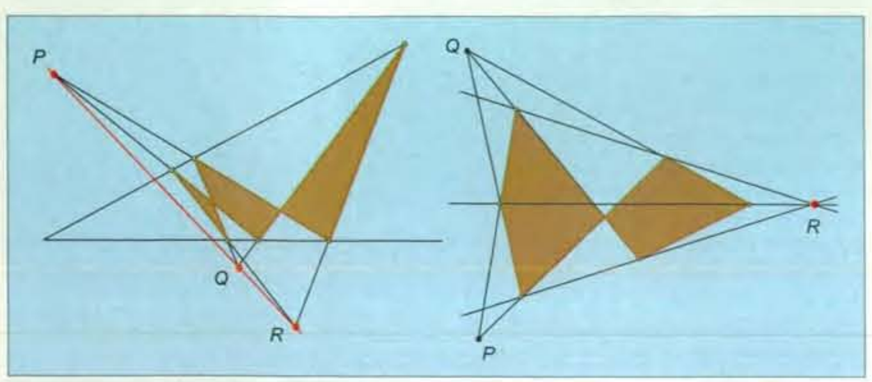
Sull'onda dei successi newtoniani la matematica celebra i suoi trionfi nella filosofia, proprio quando però la dimostrazione entra in crisi all'inizio dell'Ottocento. Nel fervore delle nuove ricer-



In alto, realizzazione del piano proiettivo scoperto da Jacob Steiner nel 1844. In basso, superficie minimale di Enneper. Le immagini sono state realizzate da Tore Nordstrand dell'Università di Bergen, in Norvegia.

che, che smentivano la previsione di Lagrange di pochi anni prima che la matematica fosse finita, nessuno sapeva più cosa fosse una dimostrazione: Jacobi diceva di potersi fidare solo di Dirichlet, al cinquanta per cento di Gauss e per nulla di Cauchy; Abel dubitava di se stesso per aver sempre accettato risultati senza dimostrazione rigorosa, «cioè di fatto senza dimostrazione». La crisi è stata positiva, perché indebolendo i canoni della tradizione euclidea ha dato spazio alla sperimentazione, e ha permesso il proliferare di nuove ricerche, la matematica *libera* celebrata da Cantor verso la fine del secolo.

Quando si dice «crisi della dimostrazione», non si deve pensare che i matematici avessero dimenticato le regole logiche. Piuttosto, non si sapevano definire le strutture portanti, le loro proprietà fondamentali, le assunzioni accettate. Le difficoltà riguardavano nuovi argomenti, come le serie, e i processi infiniti in genere del calcolo infinitesimale; in bilico tra l'estensione delle leggi algebriche e le operazioni di limite, la loro trattazione esigeva di fare chiarezza su una vecchia e ostica conoscenza, messa tra parentesi finché era stato possibile: il continuo. Si pensi che la definizione dei numeri reali è venuta solo nel 1872; non c'era la definizione di continuità, non si sapeva se, come e quando si doveva usare il postulato di Archimede; Gauss nella prima dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra usa una proposizione «della geometria superiore»: se un ramo di una curva polinomiale reale entra in una regione piana, deve poi uscirne. Gauss la considera «apparentemente sufficientemente ben dimostrata», accettata e creduta da tutti, ma promette di darne in altra occasione una dimostrazione che non lasci dubbi; la dimostrazione ha dovuto attendere gli anni venti di questo secolo.



Per il teorema di Pascal (*a sinistra*), dato un esagono (*in marrone*), se i vertici giacciono alternatamente su due rette, i punti in cui si incontrano i prolungamenti dei lati opposti (P, Q, R) giacciono su una retta. Se si scambiano fra loro i termini «retta» e «punto» si ottiene per dualità il teorema di Brianchon (*a destra*): dato un esagono, se i prolungamenti dei lati di un esagono passano alternatamente per due punti (P, Q), le tre rette che congiungono vertici opposti passano per uno stesso punto (R).

Tuttavia lo sviluppo della logica alla fine dell'Ottocento è stato applaudito come il coronamento del rigore. Si è pensato che nei sistemi di logica simbolica si realizzasse infine l'obiettivo di dare corpo a un'idea di dimostrazione che riassumeva tutte le proprietà assolute della conoscenza razionale. Si è creduto che la sintesi fosse possibile grazie alla logica matematica, almeno nel senso in cui i suoi risultati filtravano nella cultura, o incultura, generale. I logici, loro, si distribuivano in un ampio spettro, dal razionalista Frege al più disincantato Russell. Russell stesso e Peano, che hanno pazientemente compiuto formalizzazioni di intere parti della matematica, hanno col loro lavoro dato un sostegno a chi credeva che la logica fosse da *usare*, come strumento per garantire tutti gli obiettivi vaghi, sovrapposti e contraddittori che nei secoli si erano accumulati sulla dimostrazione.

Il rigore matematico è stato ottenuto grazie a due conquiste intellettuali; la prima è la definizione delle strutture, sia di quelle classiche sia poi, proliferando, di un mucchio di nuove. La definizione è stata possibile grazie all'elaborazione della teoria degli insiemi, a sua volta innescata dalle stesse esigenze di dominare i nuovi concetti. La seconda conquista è stata la caratterizzazione del concetto di teorema, nel quadro del cosiddetto metodo assiomatico moderno: i teoremi delle teorie sono le conseguenze logiche degli assiomi. Lo si è sempre saputo, ma la novità sta in una rigorosa definizione della relazione di conseguenza. Ancora a metà dell'Ottocento si confrontavano diverse nozioni logiche, ereditate dalla tradizione e tutte vaghe, da quella espressa in termini di legame necessario a quella che faceva riferimento alle leggi del pensiero. La definizione data dalla matematica deriva dall'esperienza con i diversi modelli delle teorie, sia geometriche sia algebriche: un'affermazione A è conseguenza logica di un'affermazione B se in ogni interpretazione in cui B risulta vera anche A risulta vera. Così è precisato (estensionalmente, come anche si dice) il concetto di conseguenza necessaria; resta da chiarire cosa sia da intendersi con «interpretazione»; inizialmente si parla di possibile modifica del senso dei termini primitivi che compaiono negli assiomi (come nella dualità geometrica, in cui, scambiando nei teoremi «retta» e «punto», si ottengono ancora teoremi). I termini primitivi devono avere dunque un senso, e nello stesso tempo non devono averlo perché lo si può cambiare, fatte salve le relazioni fissate dagli assiomi. Le definizioni che illuminano una questione tagliando vecchi nodi gordiani spesso non sono affatto chiare. In seguito la nozione di interpretazione è stata precisata dalle ricerche logiche, che definiscono vari tipi di semantiche (di cui la più nota è quella tarskiana, in cui le interpretazioni sono strutture matematiche).

Teoremi e dimostrazioni

L'insieme delle proposizioni di una teoria matematica è ora organizzato in modo coerente. Ma la relazione di conseguenza è piuttosto complessa: difficile da dominare, anche vaga da cogliere, nella richiesta di considerare la totalità delle possibili interpretazioni. E non si vede che rapporto ci sia tra questa relazione e le solite dimostrazioni, che non fanno affatto riferimento alle interpretazioni, ma si svolgono come discorsi sensati su di un unico significato. Qui sovviene la logica, in due modi; innanzi tutto, attraverso l'esperienza fatta con i linguaggi simbolici, si vede che la trattazione della totalità delle interpretazioni può essere sostituita dalla trattazione di schemi formali *senza alcuna* interpretazione; in secondo luogo si scopre il teorema di completezza per i sistemi logici usuali (ma solo nel 1930, con Kurt Gödel).

Il teorema di Gödel afferma che se A è conseguenza di B - se sussiste la relazione secondo la definizione originaria - allora esiste anche una derivazione di A da B; ossia una catena finita di formule dello stesso linguaggio formale ottenuta applicando le regole del sistema logico. È vero ovviamente anche il viceversa, ma ora interessa la direzione che dal fatto oggettivo della conseguenza fa discendere l'esistenza della derivazione. La dimostrazione secondo le regole logiche formali non è un *optional*, ma il marchio di fabbrica ineludibile dei teoremi (c'è anche se non la si vuole).

Chi tenta di separare la dimostrazione dai teoremi deve negare la caratterizzazione che è stata data di questi in termini di conseguenza logica, ma è difficile inventarsi un'alternativa, contro millenni di tradizione. Imre Lakatos è uno dei personaggi spesso citati che ha provato a sostenere che i teoremi sono proposizioni che si reggono (per essere falsificabili e quindi popperianamente scientifiche) su pure argomentazioni persuasive e appelli retorici. Egli propone esempi di dimostrazioni nello stile incompleto e intuitivo usuale per sostenere che in esse «non ci sono postulati, nessuna logica soggiacente ben definita, e non sembra esserci alcuna via praticabile di formalizzare il ragionamento». Tipico è il caso del teorema di Eulero sui poliedri, con una dimostrazione basata su una triangolazione delle facce e la progressiva eliminazione di lati e vertici, fino a un triangolo finale. Il procedimento non è per nulla perverso, assomiglia all'analisi greca, e dovrebbe solo essere seguito dalla sintesi. Per Lakatos, «quello che abbiamo fatto è stato di mostrare intuitivamente che il teorema era vero. Questo è un modo molto frequente di stabilire fatti matematici... I greci la chiamavano δεικνυμε, noi esperimento mentale».

Per cogliere la sostanza di un argomento conviene sempre rivolgersi alle esemplificazioni più elementari; Lakatos stesso propone il seguente teorema: due punti di un triangolo con la massima distanza tra loro devono essere i vertici del lato maggiore. La δεικνυμε si manifesta così: se uno dei due punti P è interno, su PQ si può trovare un P' più distante da Q; se entrambi sono su un lato, ma non sono i vertici, sullo stesso lato ne esistono due più lontani; se sono i vertici di un lato che non è il maggiore, su quello maggiore ci sono due punti più distanti. Il ragionamento fila (a parte il fatto che il caso della frontiera è trattato un po' sbrigativamente, senza soffermarsi sull'eventualità di due punti su due lati diversi); tuttavia Lakatos nota che il teorema ha la struttura delle affermazioni falsificabili perché (egli) non ha enunciato l'ipotesi «se c'è un massimo», peraltro ovviamente verificata (non lo è più nel caso di una specie di triangolo che non si chiuda, con un vertice all'infinito; l'enunciato corretto dovrebbe essere: in un triangolo esistono due punti che hanno distanza massima, e sono i vertici del lato maggiore; la prima parte dipende dal fatto che il triangolo è limitato). L'esempio non fa che confermare che se non si prendono in considerazione *tutte* le ipotesi, non si ha la relazione di conseguenza logica; enunciando solo la tesi del teorema, senza le ipotesi, si ha un enunciato che è falsificabile tutte le volte che sono insoddisfatte le ipotesi necessarie.

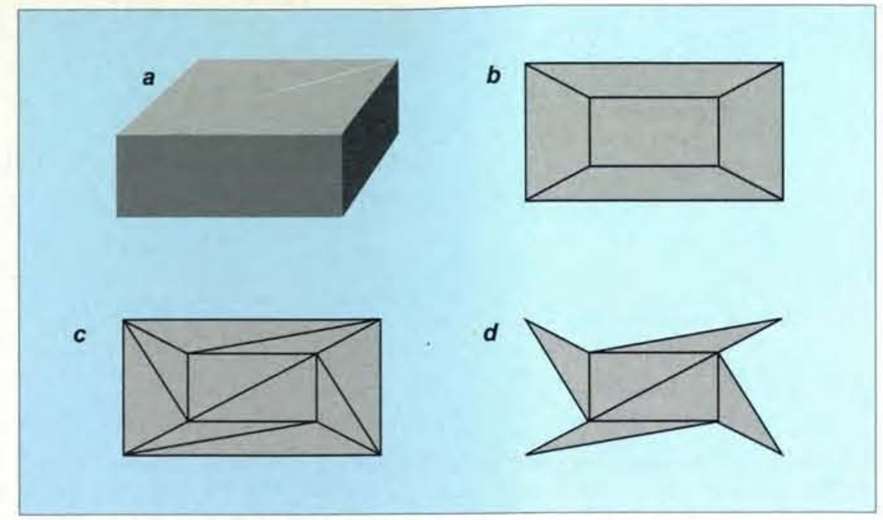
Altrettanto inconcludenti sono i tentativi di caratterizzare i teoremi come proposizioni vere, sia nel mondo naturale sia in quello astratto (c'è un teorema di Tarski, spesso dimenticato, sull'indefinibilità della verità); i teoremi sono affermazioni non assolute ma relazionali, tra due o più proposizioni, legate da una dimostrazione.

Dimostrazioni formali e informali

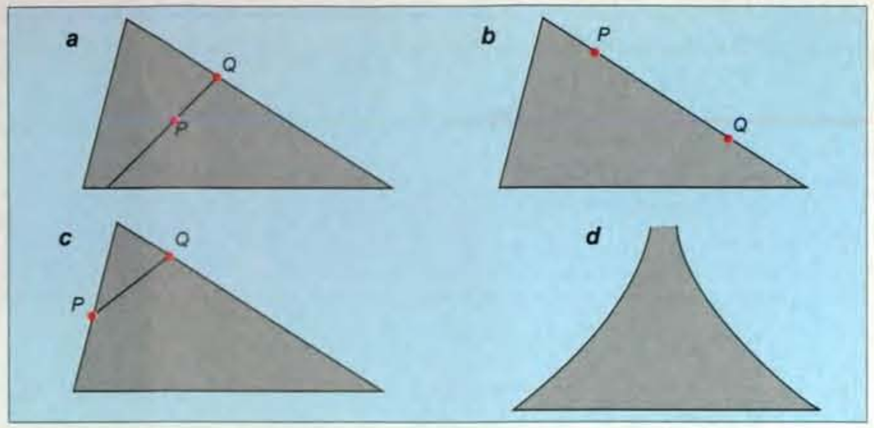
Fare matematica e fare dimostrazioni sono dunque la stessa cosa. Ciò non vuol dire che debbano essere un tormentone. C'è chi sostiene che, essendo la loro funzione quella di stabilire il legame di conseguenza logica dagli assiomi, esse vadano commisurate solo su questa funzione globale, e che non importa se si fanno (anzi si devono fare) dimostrazioni complicate di fatti ovvi; le ragioni dell'organizzazione logica della teoria prevalgono su tutto. Ma così si trascurano altre funzioni della dimostrazione, che sono il motivo per cui si continua a cercare di perfezionarle, di semplificarle, di trovarne di nuove; tra queste c'è quella di far capire, senza risalire ai princìpi, la ragione del sussistere del teorema, di mostrare, nel mentre si dimostra, di essere a un tempo strumento di comunicazione e di convinzione.

Resta il fatto che la lunghezza è causa e occasione di errori; che le dimostrazioni calcolistiche (ora generalizzate a quelle formali) non aiutano a cogliere il senso del ragionamento; che quelle fatte dalle macchine possono essere verificate solo indirettamente attraverso un controllo del programma generativo: insomma, tutto l'arsenale delle polemiche correnti sulle dimostrazioni. E resta che i matematici continuano a fare le dimostrazioni come hanno sempre fatto, al distributore del caffè o intorno a un tavolo, scrivendo sui tovaglioli (è vero, ma è anche un modo di dire usato nella polemica contro le dimostrazioni formali).

Tuttavia non è tutto come prima. Molte discussioni odierne sono possibili anche grazie al fatto che la logica ha fornito strumenti di analisi e di comprensione (non solo di scrittura). La dimostrazione formale presentata in modo rigoroso e dettagliato, per quanto possibile, può somigliare al discorso con cui si è giustificato il teorema; essa si articola in un linguaggio vuoto sì di significati, ma che, grazie alle analisi linguistiche di Frege e Peano, è abbastanza espressivo da cogliere le articolazioni sintattiche del linguaggio naturale; la dimostrazione formale può perciò essere lo scheletro di un discorso in cui i significati (riferiti a qualche struttura o classe di strutture) erano presenti. «Nel corso di una deduzione - avvertiva Moritz Pasch ancora nel periodo pre-logico (1892) - è permesso e può essere utile pensare al significato dei concetti geometrici in gio-



Il teorema di Eulero afferma la relazione $V - E + F = 2$ per un poliedro semplice (senza buchi, deformabile in una sfera) dove V è il numero dei vertici, E gli spigoli e F le facce. Tolta una faccia al poliedro (*a*), la superficie restante è distesa su un piano (*b*); avendo diminuito di 1 il numero di facce, resta da provare ora $V - E + F = 1$. Si introducono tutte le diagonali; per ogni faccia che non sia un triangolo si disegna una diagonale; eventualmente si ripete, fino ad avere tutti triangoli (*c*); per ogni diagonale disegnata aumentano sia $E := E + 1$ sia $F := F + 1$, e quindi la relazione è invariata. Quindi si tolgono i lati esterni di ogni triangolo, come in *d*, operazione per cui ogni volta $E := E - 1$ e $F := F - 1$, di nuovo lasciando invariata la relazione. Infine si tolgono i triangoli esterni, con un'operazione che ogni volta dà $V := V - 1$, $E := E - 2$, $F := F - 1$, lasciando invariata la relazione. Quando si arriva alla fine a un solo triangolo, per esso la relazione è verificata: $3 - 3 + 1 = 1$.



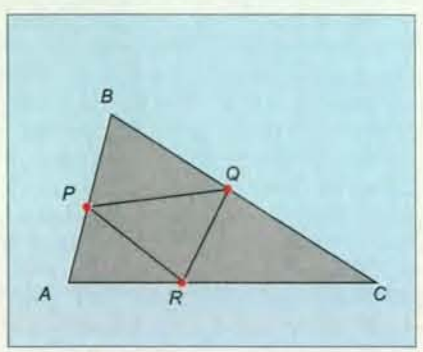
Un teorema sui triangoli: due punti di un triangolo con la massima distanza fra loro devono essere i vertici del lato maggiore. Se uno dei due punti *P* è interno (*a*), su *PQ* si può trovare un *P'* più distante da *Q*; se entrambi sono su un lato, ma non sono i vertici (*b*), sullo stesso lato ne esistono due più lontani; se sono i vertici di un lato che non è il maggiore, su quello maggiore ci sono due punti più distanti. Lo stesso vale per *c*. Il caso *d* rappresenta uno pseudotriangolo per cui il teorema è falso.

co; ma non è per nulla necessario; se diventa necessario, è il sintomo di un carattere imperfetto delle deduzioni, e dell'inadeguatezza delle assunzioni della dimostrazione.»

Se è possibile pensare formalmente, è grazie al fatto che il teorema di completezza si riferisce a sistemi di logica le cui regole non sono state inventate *ad hoc*, ma sono quelle ereditate dalla lunga tradizione logica, ed esprimono le mosse usuali del pensiero. Ciò prova tra l'altro il fatto sorprendente che l'astratta relazione di conseguenza può essere colta dal pensiero (non così il più vago «legame necessario»).

Ma lo stesso teorema di completezza ci dice che anche l'opposto è possibile; non è affatto detto che le riflessioni di chi scopre un teorema (che vuol dire scoprirne una dimostrazione) debbano svolgersi nella forma di una catena di frasi dello stesso linguaggio. Che la relazione sussista è indifferente rispetto al modo come noi argomentiamo o ci convinciamo che sussiste; l'argomentazione si può svolgere in un altro linguaggio, in riferimento a enti non menzionati nel teorema; può coinvolgere sperimentazioni e calcoli meccanici; può essere del tutto semantica, cioè un ragionamento astratto sui modelli; se questo argomentare *informale* punta nella direzione giusta, se è convincente nello stabilire questa relazione, allora si può con fiducia cercare anche la derivazione formale, che esiste (le derivazioni formali sono oggetti finiti che si possono verificare in modo effettivo, almeno in linea di principio, cioè a meno delle difficoltà dovute alla lunghezza); oppure si può non cercarla e lasciare l'argomentazione proposta come una sufficiente garanzia della verità del teorema, con un appello implicito alla completezza.

Più comunemente ci si attesta su una via di mezzo, dove l'argomentare svolto rappresenta un insieme di istruzioni per costruire la dimostrazione, magari a blocchi modularizzati, di cui l'esperto riconosce la sufficienza.



Se *P*, *Q* e *R* sono tre punti sui lati *AB*, *BC* e *AC* di un triangolo, e se $RA + AP = PB + BQ = QC + CR + 1/3$, allora $PQ + QR + RP \geq 1/2$. Questo teorema, ha scritto Jia-wei Hong, «che non è mai stato dimostrato da alcuno perché troppo complicato, è stato dimostrato al calcolatore con il metodo delle dimostrazioni per esempi».

Così i matematici possono continuare a vantarsi di non conoscere le regole logiche; per usare di nuovo le parole di Thurston, «i matematici a quanto pare non si basano in generale sulle regole formali della deduzione quando pensano. Piuttosto, essi trattengono nella testa una certa misura di struttura logica della dimostrazione, spezzando le dimostrazioni in passi intermedi in modo da non dover trattenere troppa logica per volta. È prassi diffusa anche tra matematici eccellenti di non conoscere neanche le regole per l'uso formale comune di quantificatori». Basta non esagerare: si ricordi che l'errore di A.-L. Cauchy sulla continuità uniforme era dovuto proprio a una confusione sui quantificatori; ma in verità adesso i matematici le regole le conoscono: non si limitano ad applicarle bene per intuito ed esperienza; almeno un corso di logica lo hanno seguito.

La saggezza impartita dalla logica non serve solo di consolazione, ma è un sostegno intellettuale anche nella costruzione e organizzazione delle dimostrazioni, che sono sempre più complicate. Le dimostrazioni odierne, quelle che si svolgono alla frontiera della ricerca, sono in effetti lunghe e complesse; ma il motivo non sta nella volontà di presentarle in maniera rispettosa dei canoni formali (sappiamo da tante testimonianze che non è così); il motivo sta nel fatto che la matematica è diventata sempre più ricca, sempre più difficile. Uno dei motivi - a parte quelli che riguardano l'uso del calcolatore, da quando si è capito che usandolo si potevano affrontare anche questioni di ragionamento che prima sfuggivano al controllo verbale e cartaceo - sta nella maggiore interazione delle strutture della matematica, ovvero nella compresenza di linguaggi diversi.

Sono sempre più numerose le aree di ricerca che mettono insieme argomenti e tecniche di più settori; l'algebra e la geometria sono un classico caso di mutua fertilizzazione, a partire dalla geometria analitica di Descartes; ma si pensi all'uso della topologia nello studio qualitativo delle equazioni differenziali, le cui soluzioni si cercavano una volta solo con calcoli numerici o simbolici.

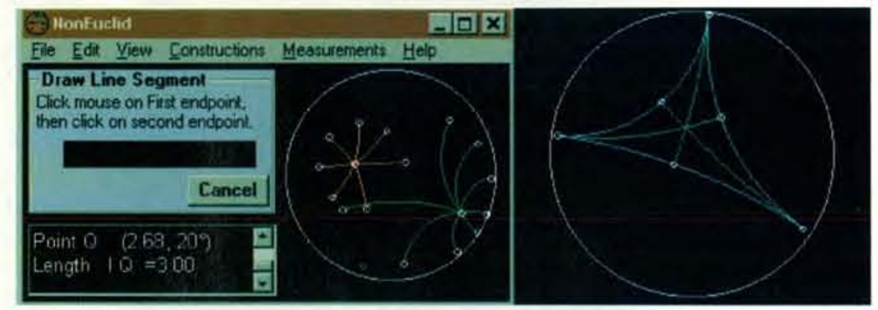
In questi campi, una dimostrazione ha quasi inevitabilmente un carattere informale, mescolando tecniche e concetti di più teorie. Spesso ci si ferma prima della versione logica nel linguaggio specifico della teoria in questione, ossia a un ragionamento che dimostra, o convince, dell'esistenza di una dimostrazione.

La dimostrazione indiretta dell'esistenza della dimostrazione, invece della stesura della stessa, è una caratteristica importante dell'attività matematica attuale; è una possibilità ben nota e studiata dai logici, che ne conoscono anche i limiti; alcune conseguenze del teorema di incompletezza si riferiscono proprio al rapporto tra la dimostrazione dell'esistenza di una dimostrazione e l'esibizione concreta della stessa. Le due dimostrazioni vivono in due mondi diversi, una metateoria e una teoria, distinzione fondamentale che rappresenta uno dei contributi più noti della logica delle teorie scientifiche. In una metateoria si studia la teoria come un dominio matematico, costituito da formule e modelli e derivazioni della teoria-oggetto; la possibilità di una simile trattazione rigorosa discende dall'esistenza di linguaggi matematici universali come quello insiemistico, in cui si può parlare di tutto, dai numeri ai discorsi sui numeri; è nella metateoria che vive il teorema di completezza. I matematici non se ne rendono conto, *à la Molière*, ma fanno soprattutto metamatematica. Se non lo sanno, può capitare che, nel presentare nuovi e astrusi risultati, a cui sono correttamente arrivati grazie al loro sesto senso e all'abilità di ragionamento, non siano capaci di interpretare bene ciò che hanno fatto, alimentando la confusione del dibattito.

LE DIMOSTRAZIONI PER ESEMPI

Un esempio interessante e divertente è fornito dai recenti risultati (1986) di Jia-wei Hong sulle dimostrazioni per esempi nella geometria elementare. Hong presenta la sua ricerca come una ulteriore mazzata alla dimostrazione tradizionale, e Horgan avrebbe potuto arruolarlo tra i suoi testimoni. Noi lo arruoliamo tra i nostri. Hong ci ricorda di quando a scuola facevamo disegni relativi a costruzioni geometriche, per esempio tracciando le mediane di un triangolo per vedere che s'incontrano in un punto. L'insegnante ci diceva che questa non era una dimostrazione. Per la dimostrazione bisognava ripartire dagli assiomi o dai lemmi precedenti, e fare un lungo ragionamento spesso non perspicuo. Oggi quel modo di fare è vendicato: se le tre mediane nel disegno si incontrano, il disegno è la prova definitiva della verità dell'asserto. Questa è l'introduzione ideologica, e l'allettante *captatio benevolentiae*. Vediamo ora cosa c'è dietro.

Hong considera proposizioni sulle costruzioni con riga e compasso, senza ordine, e in versione algebrica. Ogni proposizione di questo frammento di geometria contempla: la scelta di un numero *s* di punti arbitrari nel piano, un insieme ordinato di *l* costruzioni (tracciare rette, cerchi e punti a partire da quelli dati) che si traducono in sistemi di equazioni di primo e secondo grado, e una conclusione nella forma di una uguaglianza. Data una tale proposizione, «possiamo scegliere un esempio, cioè *s* punti concreti, che dipendono solo da *s* ed *l*, eseguire le costruzioni e alla fine controllare se la conclusione è corretta per questo esempio. Lo è se e solo se la proposizione generale è vera».



Presso il Dipartimento di matematica e statistica della Simon Fraser University della British Columbia (Canada) è stato istituito un Centro per la matematica sperimentale e costruttiva (CECM). Il Centro, che si prefigge di promuovere e approfondire le relazioni fra matematica convenzionale e moderne tecniche di computazione, mette a disposizione un sofisticato (ma *user-friendly*) ambiente computazionale per la ricerca matematica. Alle risorse del CECM è possibile accedere anche attraverso il World Wide Web. È aperto anche un forum di discussione.

Per quel che riguarda la scelta arbitraria dei punti, è ovvio che la costruzione non dipende dalla parte del foglio su cui disegniamo, ma sappiamo anche dall'esperienza scolastica che, se i punti sono scelti in modo troppo particolare, l'esempio non è sufficientemente generale (un triangolo che non sia rappresentativo di uno qualunque, ma rettangolo). Per eliminare tale perplessità Hong deve dimostrare nuove proprietà delle varietà algebriche irriducibili, che provano che tutti i processi di soluzione sono isomorfi rispetto ai parametri delle equazioni (gli *s* punti), a parte un numero finito di questi che sono, nel piano, gli zeri di un polinomio, quindi molto rari.

Più preoccupante è un'altra questione, relativa alle inevitabili imperfezioni del disegno o, nella versione algebrica, agli errori e approssimazioni del calcolo. «Come possiamo dire se la conclusione a cui siamo arrivati è vera o no, se la differenza dei due membri è molto prossima a zero?» La risposta sta in ulteriori risultati ottenuti da Hong e chiamati *gap theorems*; nel calcolo delle soluzioni per i particolari sistemi algebrici in questione si ottengono numeri reali di cui bisogna decidere se siano zero o diversi da zero; un risultato di *gap* è che «se l'*n*-esimo termine a_n di una successione [che rappresenta un numero reale] è ottenuto attraverso operazioni algebriche sui precedenti, allora o $a_n = 0$ oppure $|a_n| \geq 2\exp\text{-}c^n$, *c* costante». O le cifre sono zero, e quindi il numero lo è, oppure il numero è ben distante da zero. Si può allora stabilire il numero di cifre esatte che si debbono ottenere, e organizzare il calcolo in modo da avere l'approssimazione voluta; se nel risultato le cifre sono tutte 0, allora il numero è 0. Dall'esame della struttura dei sistemi di equazioni risulta che esiste una costante *c* (dipendente solo dalla somma iniziale dei coefficienti) per cui, per ogni *s* e *l*, basta scegliere c^{ls} cifre significative per i calcoli perché nessun a_n cada propriamente tra 0 e $2\exp\text{-}c^n$.

I risultati di Hong sono originali e difficili teoremi di complessità computazionale, al confine tra algebra e calcolo numerico; essi stabiliscono che, data la struttura dei problemi, se si fissa una certa approssimazione *che si ricava dalla dimostrazione* e la si rispetta, allora la costruzione (grafica o numerica) non può che o essere perfetta, se il risultato sussiste, oppure contraddire palesemente la tesi. Nel primo caso le operazioni svolte hanno sufficiente generalità per costituire una dimostrazione. Quello di Hong è un bell'esempio delle dimostrazioni della matematica moderna, con una conclusione tipicamente metamatematica. Ma non è certo in base a questi risultati che dobbiamo scalzare Euclide dalla scuola.

Se c'è una morale, la storia e la logica ci insegnano che è sempre più facile annunciare crolli di paradigmi che non imparare faticosamente gli strumenti per fare bene un lavoro sempre più difficile.

GABRIELE LOLLI è docente di logica matematica presso il Dipartimento di informatica dell'Università di Torino. I suoi campi di studio sono la teoria degli insiemi, i fondamenti della logica e della matematica e le interconnessioni fra logica, matematica e informatica.

I. LAKATOS, *What does a Mathematical Proof Prove?* in *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

JAFFE A. e QUINN F., *«Theoretical Mathematics»: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics*, in «Bulletin of the American Mathematical Society», 29, 1993.

THURSTON W. P., *On Proof and Progress in Mathematics,* in «Bulletin AMS», 30, n. 2, 1994.