SECTION 2.1 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Équations linéaires

Définition Toute équation qui peut être exprimée sous la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b sont des constantes réelles est une **équation linéaire**. Les variables (ou inconnues) de cette équation sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont les coefficients sont respectivement $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Définition Une **solution** d'une équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ est une suite ordonnée de nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n$ telle que, si nous remplaçons x_1 par s_1, x_2 par s_2, …, x_n par s_n dans l'équation, nous obtenons une égalité entre les deux membres de l'équation, soit

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = b$$

Cette solution est notée le n-uplet ordonné : $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Définition L'**ensemble-solution** d'une équation, noté E.-S., est l'ensemble de toutes les solutions de cette équation.

Résoudre une équation linéaire consiste à déterminer l'ensemble-solution de cette équation.

Systèmes d'équations linéaires

Définition Un système de m équations linéaires à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, noté S, est constitué de m équations linéaires de la forme

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ + a_{1n}x_n = b_1 & \boxed{1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots\ + a_{2n}x_n = b_2 & \boxed{2} \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots\ + a_{mn}x_n = b_m & \boxed{m} \end{cases}$$

où les a_{ij}, les coefficients des variables, et les b_i sont des constantes réelles.

Définition Une **solution** d'un système d'équations linéaires de la forme

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots\ + a_{1n}x_n = b_1 & \boxed{1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots\ + a_{2n}x_n = b_2 & \boxed{2} \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots\ + a_{mn}x_n = b_m & \boxed{m} \end{cases}$$

est une suite ordonnée de nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n$ telle que, si nous remplaçons x_1 par s_1, x_2 par s_2, …, x_n par s_n dans l'équation, nous obtenons une égalité entre les deux membres de chaque équation du système.

Cette solution est notée par le n-uplet ordonné : $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Définition L'**ensemble-solution** d'un système d'équations, noté E.-S., est l'ensemble de toutes les solutions du système.

En général, nous pouvons dire que tout système d'équations linéaires de m équations à n inconnues peut :

- avoir une solution unique;
- avoir une infinité de solutions;
- n'avoir aucune solution.

Définition Un système d'équations linéaires est dit **compatible** lorsqu'il a au moins une solution.

Définition Un système d'équations linéaires est dit **incompatible** lorsqu'il n'a aucune solution. Nous écrivons alors E.-S. = $\varnothing$.

Systèmes d'équations linéaires équivalents

Définition Deux systèmes d'équations linéaires S_1 et S_2 à n variables sont des systèmes **équivalents**, si les deux systèmes ont le même ensemble-solution. Cette équivalence est notée $S_1 \sim S_2$.

Les trois opérations suivantes permettent de transformer un système d'équations linéaires en un système équivalent :

1) permuter des équations ($E_1 \leftrightarrow E_2$), c'est-à-dire ($E_i \rightarrow E_j$) et ($E_j \rightarrow E_i$);
2) multiplier les deux membres d'une équation par une constante k, où $k \in \mathbb{R}$ et $k \neq 0$ ($kE_i \rightarrow E_i$);
3) additionner, membre à membre, une équation à une autre équation dont les deux membres ont été multipliés par k, où $k \in \mathbb{R}$ ($E_i + kE_j \rightarrow E_i$).

Remarque En effectuant les opérations 2) et 3) simultanément sur les équations E_i et E_j, nous obtenons $k_1E_i + k_2E_j \rightarrow E_i$ où $k_1 \neq 0$.

SECTION 2.3 RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE DE GAUSS

Introduction à la méthode de Gauss

Les opérations élémentaires que nous pouvons effectuer sur les lignes d'une matrice sont identiques aux opérations permises pour transformer un système d'équations en un système équivalent.

1) permuter des lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$), c'est-à-dire ($L_i \to L_j$) et ($L_j \to L_i$);
2) multiplier une ligne par une constante k, où $k \in \mathbb{R}$ et $k \neq 0$ $\quad$ ($kL_i \to L_i$);
3) additionner un multiple k, où $k \in \mathbb{R}$, d'une ligne à une autre ligne ($L_i + kL_j \to L_i$).

Méthode de Gauss

Soit le système d'équations linéaires

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots & + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

de m équations à n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Nous pouvons exprimer le système S précédent sous la forme AX = B, c'est-à-dire

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des coefficients}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matrice} \\ \text{des variables}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matrice} \\ \text{des constantes}}}$$

Définition La matrice $\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ est appelée la **matrice augmentée** de S.

Définition Une matrice est appelée **matrice échelon** si le nombre de zéros précédant la première entrée non nulle de chaque ligne augmente de ligne en ligne jusqu'à n'avoir possiblement que des zéros.

Définition Dans une matrice échelon, le premier élément non nul d'une ligne s'appelle le **pivot** de cette ligne.

La méthode de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires consiste à transformer la matrice augmentée, qui correspond au système d'équations, en une matrice augmentée échelon.

Il suffit alors de résoudre le système d'équations équivalent à la matrice augmentée échelon en commençant par la dernière équation et en remplaçant la ou les valeurs trouvées dans les équations précédentes. Nous appelons cette étape la substitution inverse.

Remarque Généralement, les variables associées au pivot de chaque ligne sont appelées variables liées; les autres variables sont appelées variables libres.

Remarque Si une matrice augmentée contient une ligne de la forme

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right], \text{ où } k \neq 0,$$

alors le système d'équations linéaires correspondant est incompatible et E.-S. $= \varnothing$.

Remarque Si une matrice augmentée contient une ligne de la forme

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right],$$

cette ligne est omise lorsque nous écrivons le système d'équations, car elle ne fournit aucune information sur la valeur des variables.

SECTION 2.4 RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE DE GAUSS-JORDAN ET INVERSION DE MATRICES CARRÉES

Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan pour résoudre un système d'équations linéaires consiste d'abord à transformer la matrice augmentée, qui correspond au système d'équations, en une matrice augmentée échelon.

Ensuite, cette matrice augmentée échelon doit encore être transformée afin d'obtenir une matrice augmentée échelon de Gauss-Jordan.

Définition Une matrice échelon est appelée **matrice échelon de Gauss-Jordan** si elle possède les propriétés suivantes.

1) Le premier élément non nul de chaque ligne de la matrice des coefficients est 1.
2) Cet élément 1 doit être le seul élément non nul de la colonne où il se trouve.

Inversion de matrices carrées

La méthode de Gauss-Jordan, utilisée pour résoudre un système d'équations linéaires, peut être adaptée pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée si cette matrice est inversible.

La méthode de Gauss-Jordan pour trouver l'inverse d'une matrice carrée A lorsque cette matrice est inversible consiste à écrire une matrice augmentée de la forme $\left[\mathrm{A} \mid \mathrm{I}\right]$ et de la transformer, si c'est possible, à l'aide des opérations permises, de manière à obtenir une nouvelle matrice augmentée de la forme $\left[\mathrm{I} \mid \mathrm{B}\right]$, c'est-à-dire

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}_{\mathrm{A}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{\mathrm{I}} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{\mathrm{I}} & \underbrace{\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{matrix}}_{\mathrm{B}} \end{array}\right],$$

où $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$.

Définition Une matrice carrée est dite **régulière** ou **non singulière** lorsqu'elle est inversible.
Une matrice carrée est dite **singulière** lorsqu'elle n'est pas inversible.

SECTION 2.5 SYSTÈME HOMOGÈNE D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Définition Tout système de m équations à n inconnues de la forme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

est appelé **système homogène d'équations linéaires.**

Dans un système homogène d'équations linéaires, toutes les constantes *bi* sont nulles. Nous avons alors sous la forme de l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où AX = 0.

Définition Dans un système homogène d'équations linéaires, la solution (0, 0, 0, …, 0) est appelée **solution triviale** du système.

Définition Un système homogène d'équations linéaires est dit **indépendant** lorsque la solution triviale est la seule solution du système.

Définition Un système homogène d'équations linéaires est dit **dépendant** lorsqu'il admet d'autres solutions que la solution triviale.

Théorème 1 Tout système homogène d'équations linéaires où le nombre de variables est supérieur au nombre d'équations possède une infinité de solutions réelles.