Partielle Integration

1 Motivation

Eine der wichtigsten Methoden der Integralrechnung ist die partielle Integration. Mit ihr lassen sich Funktionen integrieren, die ein Produkt zweier Funktionen sind. Einige Beispiele hierfür sind $f_1(x) = x \cdot \sin(x)$ oder $f_2(x) = x^2 \cdot e^x$. Aber selbst die Stammfunktion von $f_3(x) = \ln(x)$ lässt sich durch die partielle Integration sehr einfach finden.

2 Partielle Integration

2.1 Von der Produktregel zur partiellen Integration

Aus der Produktregel der Differentialrechnung einer Funktion der Form $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ wollen wir die Formel der partiellen Integration gewinnen:

$$\begin{aligned}
(u(x) \cdot v(x))' &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) && | - u(x) \cdot v'(x) \\
(u(x) \cdot v(x))' - u(x) \cdot v'(x) &= u'(x) \cdot v(x) && |\text{Integration: } \textstyle\int dx \\
u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx &= \int u'(x) \cdot v(x)dx && |\text{also} \\
\int {\color{red}u'(x)} \cdot {\color{blue}v(x)}dx &= {\color{red}u(x)} \cdot {\color{blue}v(x)} - \underbrace{\int {\color{red}u(x)} \cdot {\color{blue}v'(x)}dx}_{\text{Restintegral}}
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist die Formel der partiellen Integration. Der Subtrahend $\int {\color{red}u(x)} \cdot {\color{blue}v'(x)}dx$ wird als Restintegral bezeichnet.

2.2 Beispiel: $f(x) = x \cdot \ln(x)$

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \ln(x)$. Gesucht wird ihre Stammfunktion, also die Lösung des unbestimmten Integrals $F(x) = \int f(x)dx = \int x \cdot \ln(x)dx$. Wir lösen dieses Problem mit der partiellen Integration:

1. **u'v-Bestimmung:** Zunächst wählen wir dafür: ${\color{red}u'(x) = x}$ und ${\color{blue}v(x) = \ln(x)}$.

2. **uv'-Berechnung:** Um die Formel nutzen zu können, benötigen wir eine Stammfunktion von ${\color{red}u'(x) = x}$, nach Potenzregel der Integralrechnung, ${\color{red}u(x) = \frac{1}{2}x^2}$, und die Ableitung von ${\color{blue}v(x) = \ln(x)}$, nach der Inversionsregel der Differentialrechnung, ${\color{blue}v'(x) = \frac{1}{x}}$.

3. **Einsetzen** in die Formel der partiellen Integration liefert:

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x dx$$

4. **Restintegral auswerten:** Durch Berechnung des Restintegrals $\int \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{4}x^2$ erhalten wir eine Stammfunktion $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$$

5. **Integrationskonstante addieren:** Da eine Stammfunktion nur bis auf eine Konstante C genau bestimmt werden kann, müssen wir das erhaltene Ergebnis mit einer Integrationskonstanten C addieren.

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C}}$$

Überprüfen wir unser Ergebnis, indem wir die Stammfunktion ableiten:

$$F'(x) = (\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C)' = 2\frac{1}{2}x \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} - 2\frac{1}{4}x + 0 = x \cdot \ln(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = \underline{x \cdot \ln(x) = f(x)}$$

Die Ableitung der Stammfunktion ergibt die Ausgangsfunktion $f(x)$. ✓

3 Methode: Integration mit Hilfe der partiellen Integration

Aufgabenstellung: Bestimme die Stammfunktion der Funktion $f(x) = u'(x) \cdot v(x)$.

1. u'v-Bestimmung
2. uv'-Berechnung
3. Einsetzen
4. Restintegral auswerten
5. Integrationskonstante addieren
   (Dieser Schritt wird bei der Berechnung bestimmter Integrale weggelassen.)

Beispiel 1: Bestimme die Stammfunktion der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$.

1. **u'v-Bestimmung:**

   $f(x) = e^x \cdot x$

   $u'(x) = e^x$ $\qquad v(x) = x$

2. **uv'-Berechnung:**

   $u(x) = e^x$ $\qquad v'(x) = 1$

3. **Einsetzen:**

$$\int e^x \cdot x dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 dx = x \cdot e^x - \int e^x dx$$

4. **Restintegral auswerten:**

$$F(x) = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x$$

5. **Integrationskonstante addieren:**

$$\underline{\underline{F(x) = x \cdot e^x - e^x + C}}$$

Beispiel 2: Bestimme die Stammfunktion der Funktion $f(x) = \sin^2(x)$.

1. **u'v-Bestimmung:**

$$f(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$$

$$u'(x) = \sin(x) \qquad\qquad v(x) = \sin(x)$$

2. **uv'-Berechnung:**

$$u(x) = -\cos(x) \qquad\qquad v'(x) = \cos(x)$$

3. **Einsetzen:**

$$\int \sin(x) \cdot \sin(x) dx = -\cos(x) \cdot \sin(x) - \int (-\cos(x)) \cdot \cos(x) dx = -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int \cos^2(x) dx$$

4. **Restintegral auswerten:**

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int \cos^2(x) dx \\
F(x) &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int (1 - \sin^2(x)) dx \\
F(x) &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int \sin^2(x) dx \\
F(x) &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + x - F(x) && | + F(x) \\
2F(x) &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + x && | : 2 \\
F(x) &= -\frac{1}{2}(-\cos(x) \cdot \sin(x) + x)
\end{aligned}$$

5. **Integrationskonstante addieren:**

$$\underline{\underline{F(x) = -\frac{1}{2}(-\cos(x) \cdot \sin(x) + x) + C}}$$

Bemerkungen: Bei manchen Funktionen muss die partielle Integration öfter angewandt werden, um das Integral zu lösen.
Die richtige Wahl von $u(x)$ und $v(x)$ ist wichtig, da diese massiv das Restintegral beeinflussen.

4 Übungsaufgaben

4.1 Unbestimmte Integrale

Bestimme die Stammfunktion folgender Funktionen:

1. $f_1(x) = x \cdot \sin(x)$
2. $f_2(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$
3. $f_3(x) = \ln(x)$

Lösung:

1. $f_1(x) = x \cdot \sin(x)$

$$F_1(x) = \int x \cdot \sin(x)dx = -\cos(x) \cdot x - \int (-\cos(x)) \cdot 1dx$$

$$F_1(x) = -\cos(x) \cdot x + \int \cos(x)dx = -\cos(x) \cdot x + \sin(x) \qquad |\text{mit Integrationskonstanten addieren}$$

$$\underline{\underline{F_1(x) = -\cos(x) \cdot x + \sin(x) + C}}$$

2. $f_2(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

$$F_2(x) = \int \sin(x) \cdot \cos(x)dx$$

$$F_2(x) = \sin(x) \cdot \sin(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x)dx$$

$$F_2(x) = \sin^2(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x)dx$$

$$F_2(x) = \sin^2(x) - F_2(x) \qquad | + F_2(x)$$

$$2 \cdot F_2(x) = \sin^2(x) \qquad | : 2$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x) \qquad |\text{mit Integrationskonstanten addieren}$$

$$\underline{\underline{F_2(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C}}$$

Hinweis: Alternativ hätte man auch zuerst $\sin(x)$ integrieren und $\cos(x)$ ableiten können. Man kommt dann auf das Ergebnis $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C$. Beide Ergebnisse sind richtig, was man leicht durch Ableiten überprüfen kann. Sind beide Lösungen auch äquivalent? Um die Antwort auf diese Frage geben zu können, muss beachtet werden, dass die Stammfunktion bis auf eine Konstante genau bestimmt werden kann. (Daher bei Stammfunktionen immer eine Integrationskonstante addieren!)
Mit dieser Information ist die Antwort klar: Ja. Wegen

$$\frac{1}{2}\sin^2(x)+C = \frac{1}{2}(1-\cos^2(x))+C = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos^2(x)+C = -\frac{1}{2}\cos^2(x)+\overbrace{C+\frac{1}{2}}^{=\tilde{C}} = -\frac{1}{2}\cos^2(x)+\tilde{C}$$

unterscheiden sich die beiden Lösungen lediglich um eine Integrationskonstante. Da die Stammfunktion aber wie beschrieben nur bis auf eine Konstante genau bestimmt werden kann, sind beide Lösungen äquivalent.

3. $f_3(x) = \ln(x)$

$$F_3(x) = \int \ln(x)dx = 1 \cdot \ln(x)dx$$

$$F_3(x) = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$F_3(x) = x \cdot \ln(x) - \int 1dx = x \cdot \ln(x) - x \qquad |\text{mit Integrationskonstanten addieren}$$

$$\underline{\underline{F_3(x) = x \cdot \ln(x) - x + C}}$$

4.2 Bestimmte Integrale I

Berechne die bestimmten Integrale:

1. $\int_0^\pi x \cdot \cos(x)dx$
2. $\int_{-1}^1 \tan(x) - x \cdot e^x dx$

Hinweis: Für punktsymmetrische (ungerade) Funktionen $f(x)$ gilt: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Lösung:

1. $\int_0^\pi x \cdot \cos(x)dx)$

$$\int_0^\pi x \cdot \cos(x)dx = \sin(x) \cdot x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)dx$$

$$= \Big[\sin(x) \cdot x + \cos(x)\Big]_0^\pi$$

$$= [0 - 1 - (0 + 1)] = \underline{\underline{-2}}$$

2. $\int_{-1}^1 \tan(x) - x \cdot e^x dx$

$$\int_{-1}^1 \tan(x) - x \cdot e^x dx = \int_{-1}^1 \tan(x)dx - \int_{-1}^1 x \cdot e^x dx$$

(a) $\int_{-1}^{1} \tan(x)dx$: Da dieses Integral allein mit der partiellen Integration nicht gelöst werden kann, nutzen wir den Hinweis und testen die Funktion $f(x) = \tan(x)$ auf Punktsymmetrie:

$$\begin{aligned}
f(-x) &\stackrel{?}{=} -f(x) \\
\tan(-x) &= \tan(x) \\
\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} &= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} && |\cos(-x) = \cos(x), \sin(-x) = -\sin(x) \\
\frac{-\sin(x)}{\cos(x)} &= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \\
\curvearrowright f(-x) &= -f(x) \checkmark
\end{aligned}$$

$f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$ ist damit punktsymmetrisch, damit gilt nach dem Hinweis:

$$\int_{-1}^{1} \tan(x)dx = \underline{0}$$

(b) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x dx$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} {\color{blue}x} \cdot {\color{red}e^x} dx &= {\color{red}e^x} \cdot {\color{blue}x}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} {\color{red}e^x} \cdot {\color{blue}1} dx = x \cdot e^x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx \\
&= \Big[x \cdot e^x - e^x\Big]_{-1}^{1} = [e - e - (-e^{-1} - e^{-1})] = 2e^{-1} = \underline{\frac{2}{e}}
\end{aligned}$$

(c) Gesamt:

$$\curvearrowright \int_{-1}^{1} \tan(x) - x \cdot e^x dx = 0 - \frac{2}{e} = \underline{\underline{-\frac{2}{e}}}$$

4.3 Bestimmte Integrale II: Das Integral: $\int_{0}^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$

Untersuche das bestimmte Integral $\int_{0}^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx, n \in \mathbb{N}$:

1. Setze die Ordnung $n = 0$ und löse das bestimmte Integral.
2. Setze die Ordnung $n = 1$ und löse das bestimmte Integral.
3. Setze die Ordnung $n = 2$ und löse das bestimmte Integral.

4. Setze die Ordnung $n = 3$ und löse das bestimmte Integral.
5. Setze die Ordnung $n = 4$ und löse das bestimmte Integral.
6. Setze die Ordnung $n = 5$ und löse das bestimmte Integral.
7. Löse das bestimmte Integral $\int\limits_0^\infty x^n \cdot e^{-x} dx, n \in \mathbb{N}$ ganz allgemein.

Lösung: Untersuche das bestimmte Integral $\int\limits_0^\infty x^n \cdot e^{-x} dx, n \in \mathbb{N}$:

1. Setze die Ordnung $n = 0$ und löse das bestimmte Integral.

$$\int_0^\infty x^0 \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = \Big[- e^{-x} \Big]_0^\infty = -0 - (-1) = \underline{1}$$

2. Setze die Ordnung $n = 1$ und löse das bestimmte Integral.

$$\int_0^\infty x^1 \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty {\color{blue}x} \cdot {\color{red}e^{-x}} dx = \underbrace{-e^{-x} \cdot x \Big|_0^\infty}_{=-0-(-0)=0} - \int_0^\infty (-e^{-x}) \cdot 1 dx = \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} dx}_{=1} = \underline{1}$$

3. Setze die Ordnung $n = 2$ und löse das bestimmte Integral.

$$\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty {\color{blue}x^2} \cdot {\color{red}e^{-x}} dx = \underbrace{-e^{-x} \cdot x^2 \Big|_0^\infty}_{=-0-(-0)=0} - \int_0^\infty (-e^{-x}) \cdot 2x dx = 2 \cdot \underbrace{\int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx}_{=1} = 2 \cdot 1 = \underline{2}$$

4. Setze die Ordnung $n = 3$ und löse das bestimmte Integral.

$$\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty {\color{blue}x^3} \cdot {\color{red}e^{-x}} dx = \underbrace{-e^{-x} \cdot x^3 \Big|_0^\infty}_{=-0-(-0)=0} - \int_0^\infty (-e^{-x}) \cdot 3x^2 dx = 3 \cdot \underbrace{\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x} dx}_{=2\cdot 1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{3!}$$

5. Setze die Ordnung $n = 4$ und löse das bestimmte Integral.

$$\int_0^\infty x^4 \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty {\color{blue}x^4} \cdot {\color{red}e^{-x}} dx = \underbrace{-e^{-x} \cdot x^4 \Big|_0^\infty}_{=-0-(-0)=0} - \int_0^\infty (-e^{-x}) \cdot 4x^3 dx = 4 \cdot \underbrace{\int_0^\infty x^4 \cdot e^{-x} dx}_{=3\cdot 2\cdot 1=3!} = 4 \cdot 3! = \underline{4!}$$

6. Setze die Ordnung $n = 5$ und löse das bestimmte Integral.

$$\int\limits_0^\infty x^5 \cdot e^{-x} dx = \int\limits_0^\infty x^5 \cdot e^{-x} dx = \underbrace{-e^{-x} \cdot x^5 \Big|_0^\infty}_{=-0-(-0)=0} - \int\limits_0^\infty (-e^{-x}) \cdot 5x^4 dx = 5 \cdot \underbrace{\int\limits_0^\infty x^4 \cdot e^{-x} dx}_{=4!} = 5 \cdot 4! = \underline{5!}$$

7. Löse das bestimmte Integral $\int\limits_0^\infty x^n \cdot e^{-x} dx, n \in \mathbb{N}$ ganz allgemein.

$$\int\limits_0^\infty x^n \cdot e^{-x} dx = \int\limits_0^\infty x^n \cdot e^{-x} dx = \underbrace{-e^{-x} \cdot x^n \Big|_0^\infty}_{=-0-(-0)=0} - \int\limits_0^\infty (-e^{-x}) \cdot n \cdot x^{n-1} dx = n \cdot \underbrace{\int\limits_0^\infty x^{n-1} \cdot e^{-x} dx}_{=(n-1)!} = n \cdot (n-1)! = \underline{\underline{n!}}$$

Die Durchführung der partiellen Integration in der Ordnung n liefert den Faktor n multpliziert mit dem Integral der Ordnung $n-1$. Dieses Integral der Ordnung $n-1$ wird dann ein Faktor $n-1$ multipliziert mit dem Integral der Ordnung $n-2$ liefern usw. Sobald die Ordnung 0 erreicht wird, erhält man nurnoch einen Faktor $0! = 1$.