Grenzwertregel von de l'Hospital

Stößt man beim Bestimmen von Grenzwerten von Funktionen auf den Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so kann man vielleicht mit der Regel von de l'Hospital weiterkommen.

Sei $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)=0 \;\; und \;\; \lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)=0$.

Sind dann f und g differenzierbar in a, genauer in einer Umgebung von a, dann gilt:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

. Beispiel $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{-\sin(x)}{1}\right)=-1$

Beweis: Weil f und g in a differenzierbar sind, sind sie dort auch stetig und es gilt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}$$

Oben ist der Grenzwert f'(a) und unten g'(a)

$$=\begin{cases}\dfrac{f'(a)}{g'(a)} & \textit{für } g'(a)\neq 0\\[2ex] \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} & \text{für } f'(a)=0\wedge g'(a)=0\end{cases}$$

Im oberen Fall hat man das Problem gelöst. Im unteren Fall versucht man es noch einmal mit der Regel von de l'Hospital.

Anmerkung. Für $a=\infty$ gilt die Regel auch. Beim Beweis muss man substituieren $z=\dfrac{1}{x}$.

Beweis: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{-\frac{1}{z^2}f'(\frac{1}{z})}{-\frac{1}{z^2}g'(\frac{1}{z})}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Streng genommen folgt aus der Existenz des rechten Grenzwertes die Existenz des linken Grenzwertes, sogar wenn es sich nur um einseitige Grenzwerte handelt.
f und g müssen in a selbst nicht stetig sein, aber in einer mindesten einseitigen Umgebung von a.

Variante ① $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \;\; und \;\; \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ gilt die Regel auch.

Variante ② Für die Problemfälle $"0\cdot\infty"$ muss man umformen, wie im Beispiel.

Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\ln(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=-\lim\limits_{x\to 0}(x)=0$

Beweis von ①: Die Beweisidee liefert das obige Beispiel:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}$$

Nun hofft man, dass man dies besser bestimmen kann.

Man kann aber auch ungünstig vorgehen oder in jedem Fall Pech haben.
Aus Ausweg kann man eine Vereinfachung mit den Taylorreihen um a versuchen.