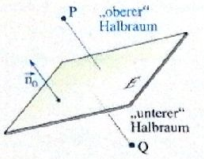
Eine Ebene teilt den dreidimensionalen Anschauungsraum in zwei Hälften. Da ein Normalenvektor der Ebene stets in einen der beiden ***Halbräume*** zeigt, kann man diese voneinander unterscheiden.
Dies ist der Grund dafür, dass man mithilfe der Abstandsformel Punkt/Ebene feststellen kann, ob zwei gegebene Punkte P und Q bezüglich einer Ebene E im gleichen oder in verschiedenen Halbräumen liegen.



Beispiel: Halbräume

Gegeben sind die Ebene E: $3x - 4y + 4z = 12$ sowie die Punkte $P(0|0|1)$ und $Q(3|-1|1)$. Bestimmen Sie die Abstände von P und Q zu E und stellen Sie fest, ob P und Q auf der „gleichen Seite" von E liegen. Welcher Punkt liegt näher an E?

Lösung:
Der Koordinatengleichung von E können wir durch Einsetzen ($x = 0$, $y = 0 \Rightarrow z = 3$) einen Punkt und anhand der Koeffizienten ($3x - 4y + 4z$) einen Normalenvektor entnehmen, woraus wir die Hesse'sche Normalengleichung erstellen.

1. Hessesche Normalengleichung von E:

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{41} \\ -4/\sqrt{41} \\ 4/\sqrt{41} \end{pmatrix} = 0$$

Nun setzen wir die Ortsvektoren der Punkte P und Q in die linke Seite der HNF ein, ohne allerdings deren Betrag zu bilden. Wir erhalten für P den Wert $-1{,}25$ und für Q den Wert 0,78.

2. Abstandsberechnung:

$$P: \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{41} \\ -4/\sqrt{41} \\ 4/\sqrt{41} \end{pmatrix} = -\frac{8}{\sqrt{41}} \approx -1{,}25$$

$$Q: \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{41} \\ -4/\sqrt{41} \\ 4/\sqrt{41} \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{41}} \approx +0{,}78$$

Das bedeutet:
Q liegt wegen des positiven Vorzeichens in demjenigen Halbraum bezüglich E, in den der Normalenvektor zeigt, wenn sein Fußpunkt auf E angenommen wird.
P liegt wegen des negativen Vorzeichens im anderen Halbraum.
Die Abstände zu E sind 1,25 bzw. 0,78.
Q liegt näher an E als P.

3. Interpretation:

P und Q liegen auf unterschiedlichen Seiten von E.
Abstand von P zu E: $d(P, E) = 1{,}25$
Abstand von Q zu E: $d(Q, E) = 0{,}78$
Q liegt näher an E als P.

Übung 4

Gegeben sind die Ebene E: $2x + y + z = 4$ sowie die Punkte $P(0|1|2)$, $Q(-1|2|5)$, $R(1|1|1)$ und $T(1|3|2)$.

a) Berechnen Sie die Abstände von P, Q, R und T zu E.
b) Welche der Punkte liegen im gleichen Halbraum bezüglich E?
c) Liegt der Ursprung auf der gleichen Seite der Ebene wie der Punkt $P(0|1|2)$?

Übungen

5. Lotfußpunktverfahren

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P zur Ebene E mithilfe des Lotfußpunktv

a) E: $x + 2y + 2z = 10$, $P(4|6|6)$
b) E: $3x + 4y = 2$, $P(9|0|2)$
c) E: $2x - 3y - 6z = -4$, $P(6|-1|-5)$
d) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P(2|7|-$

6. Hesse'sche Normalengleichung (HNF)

Bestimmen Sie eine Hesse'sche Normalengleichung der Ebene E durch die Punkte

a) $A(1|1|3)$, $B(2|-1|5)$, $C(0|1|5)$
b) $A(3|4|-1)$, $B(6|2|1)$, $C(0|5|-1)$
c) $A(7|3|2)$, $B(11|1|2)$, $C(9|1|3)$

7. Abstandsformel (HNF)

Stellen Sie zunächst eine Hesse'sche Normalengleichung der Ebene E auf. Bere anschließend den Abstand von P und Q von der Ebene E mithilfe der Abstandsforn

a) E: $6x + 3y + 2z = 22$
$P(7|5|7)$, $Q(6|1|2)$

b) E: $x - 2y + 2z = 8$
$P(7|1|6)$, $Q(2|-4|8)$

c) E: $2x + 3y + 6z = 12$
$P(4|3|5)$, $Q(2|1|-6)$

d) E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ $P(4|4|4)$, $Q(4|-0{,}5|1)$

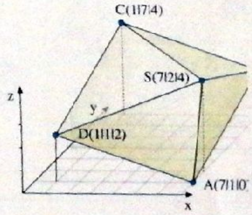
e) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -15 \end{pmatrix}$ $P(7|11|5)$, $Q(5|-7|1)$

f) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$ $P(17|5|12)$, $Q(5|5|-24)$

8. Pyramidenhöhe

Gegeben ist die abgebildete Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S.

a) Welche Höhe hat die Pyramide?
b) Welches Volumen hat die Pyramide?
c) Bestimmen Sie den Fußpunkt F der Pyramidenhöhe.



B(7|7|2)

9. Relative Lage (Halbräume)

Gegeben sind die Ebene E sowie die Punkte P und Q.
Untersuchen Sie, ob P und Q im gleichen Halbraum bezüglich der Ebene E liegen.
Liegt einer der beiden Punkte P und Q im gleichen Halbraum wie der Ursprung?

a) E: $2x - 2y + z = 7$
$P(2|10|1)$, $Q(4|4|3)$

b) E: $6x - 2y + 3z = 12$
$P(-1|-2|6)$, $Q(2|1|2)$