

6. Proporzioni e percentuali

1. Definizione di proporzione

Una **proporzione** è un'uguaglianza fra due rapporti, pertanto si scrive come

$$a : b = c : d$$

o equivalentemente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Si legge “ a sta a b come c sta a d ”. I termini a e d si dicono **estremi**, i termini b e c si dicono **medi**. Inoltre i termini a e c si dicono **antecedenti**, mentre b e d si dicono **consequenti**.

Affinché la proporzione abbia un senso, deve risultare $b, d \neq 0$.

2. Proprietà delle proporzioni

Proprietà fondamentale. In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

$$\text{Se } a : b = c : d \text{ allora } a \cdot d = b \cdot c$$

Proprietà del comporre. In una proporzione la somma fra il primo e il secondo termine sta al primo (o al secondo), come la somma fra il terzo e il quarto sta al terzo (o al quarto).

$$\text{Se } a : b = c : d \text{ allora } (a+b) : a = (c+d) : c \quad \text{e} \quad (a+b) : b = (c+d) : d$$

Purché $a, c \neq 0$ per la prima, $b, d \neq 0$ per la seconda.

Proprietà dello scomporre. In una proporzione la differenza fra il primo termine e il secondo sta al primo (o al secondo), come la differenza fra il terzo e il quarto sta al terzo (o al quarto).

$$\text{Se } a : b = c : d \text{ allora } (a-b) : a = (c-d) : c \quad \text{e} \quad (a-b) : b = (c-d) : d$$

Purché $a, c \neq 0$ per la prima, $b, d \neq 0$ per la seconda.

Proprietà del permutare. Scambiando fra loro i medi e gli estremi di una proporzione si ottiene ancora una proporzione.

$$\text{Se } a : b = c : d \text{ allora } a : c = b : d \quad \text{e} \quad d : b = c : a$$

Proprietà dell'invertire. Data una proporzione, è ancora una proporzione valida quella ottenuta scambiando ogni antecedente con il proprio conseguente.

$$\text{Se } a : b = c : d \text{ allora } b : a = d : c$$

3. Risolvere una proporzione

Quarto proporzionale è il quarto elemento di una proporzione e si ricava nel seguente modo

$$a : b = c : x \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Terzo proporzionale è il terzo elemento di una proporzione e si ricava nel seguente modo

$$a : b = x : c \Rightarrow x = \frac{a \cdot c}{b}$$

In generale se l'elemento incognito è un medio occorre moltiplicare gli estremi e dividere per l'altro medio. Viceversa se l'incognita è un estremo si moltiplicano i medi e si divide per l'altro estremo.

Medio proporzionale è l'elemento medio della proporzione, nel caso in cui i due elementi medi siano uguali, si ricava nel seguente modo

$$a : x = x : b \Rightarrow x = \sqrt{a \cdot b}$$

4. Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

Grandezze direttamente proporzionali. Due grandezze variabili x e y sono direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante. La costante prende il nome di **coefficiente di proporzionalità diretta**.

Rappresentando in un piano cartesiano la dipendenza di proporzionalità diretta tra due grandezze variabili si ha una retta.

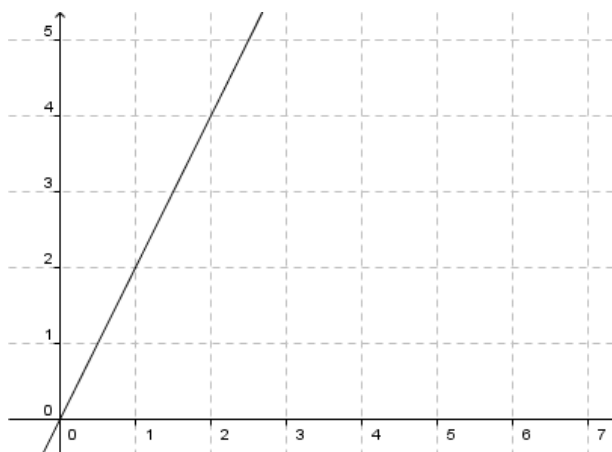


Figura 1. Rappresentazione grafica della proporzionalità diretta tra due grandezze.

Esempio. Nei rettangoli di base assegnata 10 cm, l'area A è proporzionale all'altezza h . Infatti

$$\frac{A}{h} = 10. \text{ Il coefficiente di proporzionalità diretta è } 10.$$

Grandezze inversamente proporzionali. Due grandezze variabili x e y sono inversamente proporzionali se il loro prodotto è costante. La costante prende il nome di **coefficiente di proporzionalità inversa**.

Rappresentando in un piano cartesiano la dipendenza di proporzionalità inversa tra due grandezze variabili si ottiene un ramo di iperbole.

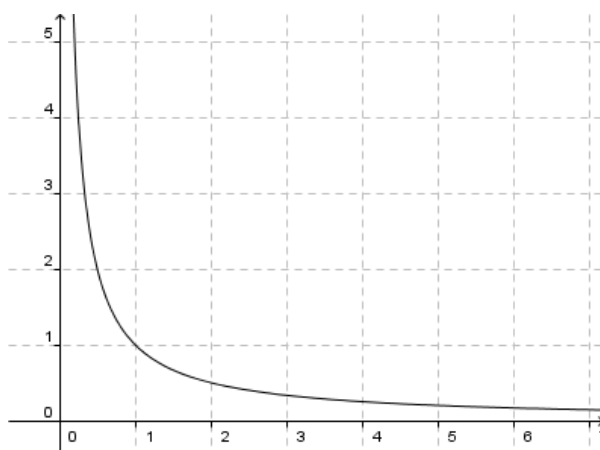


Figura 2. Rappresentazione grafica della proporzionalità inversa tra due grandezze.

Esempio. Nei rettangoli di area assegnata 100cm^2 , la lunghezza della base b è inversamente proporzionale alla lunghezza dell'altezza h . Infatti $b \cdot h = 100$.

5. Problemi con le proporzioni

Problema del tre semplice. Si dicono problemi del tre semplice quelli in cui entrano in gioco due grandezze direttamente proporzionali o inversamente proporzionali; si conoscono due valori corrispondenti delle due grandezze, si conosce un valore di una grandezza e si deve calcolare il valore corrispondente dell'altra grandezza. In altre parole si conoscono tre valori, due di una grandezza e uno dell'altra grandezza, e occorre determinare il quarto valore, in modo da ottenere una proporzione diretta o inversa.

Esempi.

Problema del tre semplice diretto. Per comprare 3,5m di una certa stoffa si spende 12€ quanto si spende per comprare 5,7m della stessa stoffa? Si tratta di grandezze direttamente proporzionali, quindi $3,5 : 5,7 = 12 : x$.

Problema del tre semplice inverso. Per imbottigliare una certa quantità di vino occorrono 150 bottiglie da 750ml. Quante bottiglie occorrerebbero per imbottigliare la stessa quantità di vino in bottiglie da 1l? Si tratta di grandezze inversamente proporzionali, quindi $150 : x = 1 : 0,750$

Problema del tre composto. Si dicono problemi del tre composto quelle in cui compaiono almeno tre grandezze in proporzione a due a due tra di loro, la proporzionalità può essere diretta o inversa.

Esempio. In un'azienda 16 operai lavorando 8 ore al giorno per 15 giorni producono 15.000 pezzi. Quanti giorni occorrerebbero per produrre, nelle stesse condizioni, 22.000 pezzi con 18 operai che lavorano 6 ore al giorno?

operai	↓	Ore al giorno	↓	giorni	↑	Pezzi	↑	
16		8		15		15.000		$X = 15 \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{22.000}{15.000}$
18		6		X		22.000		
Inversamente proporzionali		Inversamente proporzionali				Direttamente proporzionali		

6. Percentuali

La **percentuale** è un particolare rapporto tra due grandezze a e b espresso in centesimi. Si ottiene moltiplicando per 100 il rapporto a/b e ponendo a fianco il simbolo %. Quindi

$$\frac{a}{b} \cdot 100\%$$

Esempio. Su 325 impiegati di un'azienda ci sono 65 assenti per malattia. La percentuale degli impiegati assenti per malattia è $\frac{65}{325} \cdot 100\% = 20\%$.

7. Problemi con le percentuali

a) Calcolare la quantità conoscendo il totale e la percentuale.

Esempio. Calcolare il 15% di 1200 euro. Proporzione risolutiva $15 : 100 = x : 1200$,

risultato $1200\text{€} \cdot \frac{15}{100} = 180\text{€}$.

b) Calcolare la percentuale conoscendo il totale e la quantità

Esempio. Su 150 impiegati 45 sono donne. Qual è la percentuale delle donne? Proporzione risolutiva

$45 : 150 = x : 100$, risultato $\frac{45}{150} \cdot 100\% = 30\%$.

c) Calcolare il totale conoscendo la quantità e la percentuale.

Esempio. Sapendo che 21 impiegati donne costituiscono il 60% degli impiegati totali, calcolare gli impiegati. Proporzione risolutiva $21 : x = 60 : 100$, risultato $\frac{21 \cdot 100}{60} = 35$.

d) Calcolare l'incremento o il decremento da una certa quantità a un'altra?

Esempio. Nel 2007 si sono vendute 125.000 automobili, nel 2008 se ne sono vendute 132.000. Qual è stato l'incremento percentuale del 2008 rispetto al 2007? Risultato $\frac{132000 - 125000}{125000} \cdot 100\% = 5,6\%$.

e) Aumentare o diminuire un numero di una certa percentuale.

Esempio. Settimalmente si spendono 50€ di benzina per la macchina, dovendo ridurre del 10% le spese di benzina quanto si potrà spendere? Risultato $50€ \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 45€$.

8. Problemi con gli sconti

I problemi con gli sconti sono tipici problemi di percentuali

a) Noto il prezzo di listino e la percentuale di sconto calcolare il prezzo scontato.

Esempio. Un'auto costa 12.000€, applicando uno sconto del 7% quanto costerà? Risultato

$$12.000€ \cdot \left(1 - \frac{7}{100}\right) = 11.160€.$$

b) Noto il prezzo di listino e il prezzo scontato calcolare la percentuale di sconto.

Esempio. Un'auto di 12.000€ è stata venduta a 11.000€ Qual è stato lo sconto praticato? Risultato $\frac{12.000 - 11.000}{12.000} \cdot 100\% \approx 8,33\%$.

c) Noto lo sconto e la percentuale di sconto calcolare il prezzo di listino.

Esempio. Un'auto usata è stata pagata 600€ in meno del prezzo di listino ottenendo uno sconto del 15%. Qual era il prezzo di listino? Risultato $600 : x = 15 : 100 \Rightarrow x = \frac{600 \cdot 100}{15} = 4000$.

d) Noto il prezzo scontato e la percentuale di sconto calcolare il prezzo di listino

Esempio. Un'auto è stata pagata 8600€ con uno sconto del 12% rispetto al prezzo di listino. Qual era il prezzo di listino? Risultato $\frac{8600}{1 - \frac{12}{100}} \approx 9773$.

9. Problemi di cambio di moneta

Anche i problemi di cambio si possono risolvere con le proporzioni.

a) Sapendo che 1€ vale 1,32\$, quanti dollari valgono 680€? Proporzione risolvibile $1€ : 680€ = 1,32\$: x$, Risposta $680 \cdot 1,32\$ = 897,6\$$.

b) Sapendo che 1€ vale 1,32\$, qual è il cambio da dollaro a euro? Proporzione risolvibile

$$1€ : x = 1,32\$: 1, \text{ risposta } 1\$ = \frac{1}{1,32} € \approx 0,7575€.$$

c) Sapendo che 1€ vale 1,32\$, quanti euro valgono 1230\$? Risposta $\frac{1230}{1,32} € \approx 931,82€$.