

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY  
CAMPUS MONTERREY

PROGRAMA DE GRADUADOS EN ELECTRONICA,  
COMPUTACION, INFORMACION Y COMUNICACIONES



DESARROLLO DE UN SISTEMA DE PESAJE DINÁMICO  
APLICADO EN BANDAS TRANSPORTADORAS

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA  
OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

Especialidad en Sistemas Electrónicos

POR

JOSE ACOSTA GOMEZ

MONTERREY, N. L.

DICIEMBRE DE 2003

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY

CAMPUS MONTERREY

PROGRAMA DE GRADUADOS EN ELECTRÓNICA,  
COMPUTACIÓN, INFORMACIÓN Y COMUNICACIONES



DESARROLLO DE UN SISTEMA DE PESAJE DINÁMICO APLICADO  
EN BANDAS TRANSPORTADORAS

**TESIS**

PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL  
GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN SISTEMAS  
ELECTRÓNICOS (SISTEMAS ELECTRÓNICOS)

POR:

JOSÉ ACOSTA GÓMEZ

MONTERREY, N.L.

DICIEMBRE DEL 2003

# IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA DE PESAJE DINÁMICO APLICADO EN BANDAS TRANSPORTADORAS

POR:

JOSÉ ACOSTA GÓMEZ

**TESIS**

Presentada al Programa de Graduados en Electrónica, Computación,  
Información y Comunicaciones.

Este trabajo es requisito parcial para obtener el grado de Maestro  
en Ciencias en Ingeniería Electrónica con especialidad en Sistemas  
Electrónicos

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS  
SUPERIORES DE MONTERREY

DICIEMBRE DEL 2003

# Dedicatoria

A mis padres, por todo su apoyo y comprensión.

Gracias.

# Agradecimientos

A Dios, porque sin su ayuda nada de esto sería posible.

A mis padres y hermano por su apoyo y cariño incondicional a lo largo de mi vida.

A mi asesor y sinodales por todo el apoyo brindado durante la realización de esta tesis.

Al Ing. Oscar Richer y al Dr. Luis Lauro Cantú por confiar en mí para la realización de este proyecto.

A mis amigos y compañeros durante la maestría, por todos esos buenos momentos.

A Hilda y Karla, por alentarme en todo momento y por ser las mejores amigas.

Gracias.

# Resumen

El pesaje dinámico es en la actualidad una herramienta muy interesante para ciertos sectores de la industria, ya que gracias a este es posible contabilizar la producción de materia prima que es transportada a través de bandas. Desafortunadamente existen pocos equipos en el mercado capaces de realizar esta tarea y su principal desventaja es su poca exactitud.

Es por ello que el presente trabajo de tesis, presenta el desarrollo e implementación de un sistema de pesaje dinámico aplicado a bandas transportadoras, cuyo principal objetivo es el de al menos igualar el nivel de exactitud del equipo existente en el mercado.

Para ello se diseñó un sistema de pesaje electrónico con un algoritmo capaz de calcular la cantidad de material que circula por la banda en un lapso determinado de tiempo. Se partió del diseño de una báscula de pesaje estático y se propusieron un par de métodos para la implementación del algoritmo, los cuales se comprobaron a nivel simulación computacional y se probaron en campo, mediante la creación de un prototipo. Dichas pruebas resultaron satisfactorias de acuerdo a los objetivos del trabajo.

# Tabla de contenido

Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Resumen .....	vi
Tabla de contenido .....	vii
Lista de figuras .....	ix
Lista de tablas .....	xi
<b>Capítulo 1 Introducción .....</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes .....	1
1.2 Objetivo .....	3
1.3 Productos existentes .....	3
1.4 Contenido .....	4
<b>Capítulo 2 Introducción a las técnicas de identificación de sistema .....</b>	<b>5</b>
2.1 Introducción .....	5
2.2 Definición de los métodos de identificación .....	6
2.2.1 Método de respuesta a la frecuencia .....	7
2.2.2 Método de deconvolución de la respuesta al impulso .....	8
2.2.3 Identificación por respuesta al escalón .....	8
2.2.4 Método de correlación .....	9
2.2.5 Estimación de la función de transferencia de un sistema continuo en el tiempo a partir de las muestras de la respuesta al impulso .....	10
2.2.6 Mínimos cuadrados .....	12
2.2.7 Mínimos cuadrados generalizados .....	14
2.2.8 Método de máxima verosimilitud .....	16
2.2.9 Método de gradientes .....	21
2.3 Resumen .....	25
<b>Capítulo 3 Generalidades .....</b>	<b>27</b>
3.1 Pesaje estático .....	27
3.1.1 Pesaje directo .....	28
3.1.2 Contadoras .....	28
3.1.3 Colgantes .....	29
3.1.4 Ensacadoras .....	29
3.1.5 Camioneras y ferrocarrileras .....	29
3.2 Pesaje dinámico .....	30
3.3 Principio de funcionamiento de una báscula electrónico .....	31
3.3.1 Galga extensiométrica .....	31
3.3.2 Celdas de carga .....	32
3.3.3 Acondicionamiento .....	33

3.3.4 Conversión análoga digital.....	33
3.3.5 Conceptos relativos.....	34
<b>3.4 Generalidades de los sistemas transportadores de banda.....</b>	<b>35</b>
3.4.1 Transportadores de banda.....	35
3.4.2 Rodillos.....	36
<b>Capítulo 4 Modelación del sistema.....</b>	<b>37</b>
<b>4.1 Selección del método de identificación.....</b>	<b>37</b>
<b>4.2 Método de respuesta al impulso.....</b>	<b>38</b>
4.2.1 Modelo ideal.....	38
4.2.2 Simulación e interpretación de resultados.....	40
4.2.3 Modelo real.....	42
4.2.4 Simulación e interpretación de resultados.....	43
<b>4.3 Método de respuesta al escalón.....</b>	<b>46</b>
4.3.1 Modelo ideal.....	47
4.3.2 Simulación e interpretación de resultados.....	48
4.3.3 Modelo real.....	50
4.3.4 Simulación e interpretación de resultados.....	52
<b>4.4 Comentarios y conclusiones.....</b>	<b>54</b>
<b>Capítulo 5 Implementación y comprobación de resultados.....</b>	<b>55</b>
5.1 Verificación del modelo.....	55
5.2 Obtención de la ecuación de diferencias.....	56
5.3 Implementación y experimentos realizados.....	58
5.4 Conclusiones.....	61
<b>Capítulo 6 Conclusiones.....</b>	<b>62</b>
6.1 Trabajos futuros.....	62
<b>Anexo 1 Desarrollo de ecuaciones.....</b>	<b>66</b>
<b>Anexo 2 Simulaciones.....</b>	<b>69</b>
<b>Anexo 3 Discretización de una masa al pasar por el sistema dinámico.....</b>	<b>81</b>
<b>Anexo 4 Hardware del sistema de pesaje.....</b>	<b>85</b>
<b>Anexo 5 Descripción del software.....</b>	<b>90</b>
<b>Anexo 6 Diseño de filtros digitales.....</b>	<b>93</b>
<b>Referencias Bibliográficas.....</b>	<b>96</b>
<b>Vita.....</b>	<b>97</b>



# Lista de Figuras

Figura 1.1 Tipos de básculas de pesaje dinámico.....	2
Figura 2.1 Modelo del sistema para el método de respuesta a la frecuencia.....	7
Figura 2.2 Modelo del sistema para el método de correlación.....	9
Figura 2.3 Función de densidad con respecto a $\theta$ .....	17
Figura 2.4 Modelo del sistema con ruido.....	18
Figura 2.5 Principio del método del gradiente.....	22
Figura 2.6 Interpretación geométrica para el algoritmo de adaptación por gradiente.....	24
Figura 3.1 Tipos de básculas de pesaje directo.....	28
Figura 3.2 Tipos de básculas contadoras.....	28
Figura 3.3 Báscula colgante.....	29
Figura 3.4 Báscula ensacadora.....	29
Figura 3.5 Báscula camionera.....	30
Figura 3.6 Tipos de básculas de pesaje dinámico.....	30
Figura 3.7 Báscula electrónica.....	31
Figura 3.8 Celda de carga.....	33
Figura 3.9 Rodillos de trabajo pesado acanalado.....	36
Figura 4.1 Modelo sin áreas de influencia.....	38
Figura 4.2 Efecto de una carga puntual sobre modelo sin áreas de influencia.....	39
Figura 4.3 (a) Salida para una carga puntual.....	40
Figura 4.3 (b) Resultado de la ecuación de diferencias para una carga puntual.....	40
Figura 4.4 (a) Salida para dos cargas puntuales.....	41
Figura 4.4 (b) Resultado de la ecuación de diferencias para dos cargas puntuales.....	41
Figura 4.6 Modelo con áreas de influencia.....	42
Figura 4.7 Efecto de una carga puntual sobre modelo con áreas de influencia.....	42
Figura 4.8 (a) Salida para una carga puntual.....	44
Figura 4.8 (b) Resultado de la ecuación de diferencias para una carga puntual.....	44
Figura 4.9 (a) Salida para dos cargas puntuales.....	44
Figura 4.9 (b) Resultado de la ecuación de diferencias para dos cargas puntuales.....	45
Figura 4.10 Efecto de una carga puntual sobre modelo sin áreas de influencia.....	46
Figura 4.11 (a) Salida para una carga puntual.....	48
Figura 4.11 (b) Resultado de la ecuación de diferencias para una carga puntual.....	48
Figura 4.12 (a) Salida para una carga puntual.....	49
Figura 4.12 (b) Resultado de la ecuación de diferencias para una carga puntual.....	49
Figura 4.13 Efecto de un escalón unitario con áreas de influencia.....	50
Figura 4.14 (a) Salida para una carga puntual.....	52

Figura 4.14 (b) Resultado de la ecuación de diferencias para una carga puntual.....	52
Figura 4.15 (a) Salida para dos cargas puntuales.....	53
Figura 4.15 (b) Resultado de la ecuación de diferencias para dos cargas puntuales.....	53
Figura 5.1 Respuesta real del sistema.....	55
Figura 5.2 Eliminación de ruido mediante filtro de 2º orden.....	59

# Lista de Tablas

Tabla 4.1 Resultado de simulaciones para el modelo sin áreas de influencia.....	41
Tabla 4.2 Resultado de simulaciones para el modelo con áreas de influencia.....	45
Tabla 4.3 Resultado de simulaciones para el modelo sin áreas de influencia.....	49
Tabla 4.4 Resultado de simulaciones para el modelo con áreas de influencia.....	53
Tabla 5.1 Lecturas de peso de la cadena.....	56
Tabla 5.2 Acumulado de $r_n$ para banda sin carga.....	60
Tabla 5.3 Resultado de experimentos.....	61

# Capítulo 1

## 1 Introducción

### 1.1 Antecedentes

Desde hace algunos años ha surgido la necesidad en un cierto sector de la industria, de determinar el peso de materiales cuyo transporte no puede ser detenido. El objetivo de este procedimiento es el de llevar un control más preciso de su producción. Entre las empresas que tienen esta clase de requerimiento podemos encontrar a la industria automotriz, alimenticia, minera, química, de construcción, de manufactura y forestal por mencionar algunas.

En la actualidad existe en el mercado una serie de productos de diversas empresas que tratan de satisfacer esta necesidad, los cuales tienen como común el inconveniente que no proporcionan una gran exactitud. Hasta el momento esta desventaja no ha sido un gran problema debido a que por lo general los inventarios elaborados con estos equipos se utilizan en forma interna en las empresas, por lo cual su grado de error no perjudica a terceros.

Debido a sus características, este tipo de registro de peso para materiales y productos se conoce como “pesaje continuo” o “pesaje dinámico”. Entre las múltiples aplicaciones del pesaje dinámico podemos encontrar las siguientes:

- Estimación de la cantidad de material que pasa por una banda transportadora en un determinado lapso de tiempo. Aquí también es posible calcular el flujo de material en toneladas por hora. En esta área encontramos a compañías mineras, cementeras y químicas que requieren de esta clase de equipos para estimar su producción diaria. En ese tipo de industria se tiene la limitante de que el producto que sale de la minas o de los molinos mediante bandas transportadoras no puede ser interrumpido para pesar y poder calcular la cantidad de toneladas que se han producido en un determinado tiempo. Esto es debido a los tiempos de retraso en la producción que implicaría una operación de esta naturaleza, aunado a las grandes cantidades de maquinaria y el tamaño de las básculas que se requerirían para poder llevar a cabo una operación de esta magnitud.
- Conteo y verificación de paquetes que pasan por una banda transportadora. Aquí es posible encontrar a la industria de manufactura, en donde se requiere verificar el peso de cajas después de ser empaquetadas para revisar si la cantidad de producto que contienen es la correcta.
- Verificación del peso de ejes de vehículos sin necesidad de detenerlos. El lugar de aplicación de estos equipos se encuentra en algunas empresas y

casetas de cobro de carreteras y autopistas, en donde se requiere corroborar de una manera rápida que el peso de los vehículos no exceda los límites establecidos.

Se puede distinguir una clara diferencia entre estas tres aplicaciones. El pesaje dinámico que se lleva a cabo sobre bandas transportadoras en empresas mineras y cementeras, exige una mayor complejidad que en los otros casos; lo anterior se debe a que el material que se desea pesar viene en un flujo continuo y su masa esta distribuida en forma aleatoria. Otra razón es el hecho de que la banda es flexible y continua, es decir, el área de pesaje no es independiente del resto de la banda, ya que por lo general el sistema de pesaje esta integrado entre los rodillos de la banda.

En el caso, de las verificadoras de paquetes se simplifica mucho el pesaje, debido a que el flujo de productos es discreto y siempre se encuentra en un rango preestablecido de peso. Otro aspecto que simplifica el sistema es el hecho de poder separar el área de pesaje del resto la banda, debido a que este tipo de aplicación se encuentra dentro de fábricas en donde las distancias son cortas y se facilita la instalación de diferentes sistemas de propulsión para la banda, por lo cual la segmentación de la misma no es un problema. El caso de los sistemas de verificación de ejes de vehículos es muy parecido al anterior, ya que el área de pesaje es independiente y el flujo de transportes es discreto.

Se definirá como "Área de influencia" a la superficie dentro del sistema en la cual se registran componentes de peso por parte de la báscula. Un área de influencia se puede limitar a la superficie de la báscula o puede incluir además áreas en los extremos de esta. La Figura 1.1 muestra las diferencias entre los diferentes sistemas de pesaje dinámico.

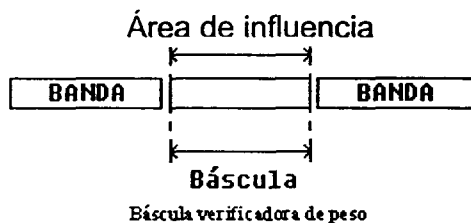
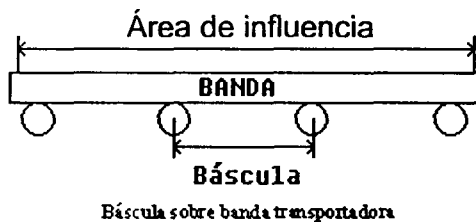


Figura 1.1 Tipos de básculas de pesaje dinámico

La idea de crear este tipo de aplicaciones no es nueva, desde hace algunos años empresas especializadas en sistemas de pesaje se han encargado de desarrollar sus propias soluciones. ¿Por qué entonces desarrollar un sistema de pesaje dinámico?

La razón es que los fabricantes actuales sólo se limitan a obtener buenas aproximaciones del peso estático debido a su baja exactitud, por lo que es necesario establecer un sistema de mayor confiabilidad que permita, a la empresa, mejorar el control de su producción.

## **1.2 Objetivo**

Implementar un sistema de pesaje dinámico sobre una banda transportadora para medir la cantidad de material que pasa por la misma en un determinado tiempo, con un error menor al  $\pm 10\%$ . Debido a que las básculas existentes garantizan un  $\pm 10\%$  de error. [1]

## **1.3 Productos existentes**

Entre los sistemas de pesaje dinámico existentes podemos encontrar una gran cantidad de fabricantes, los cuales en su mayor parte son de origen estadounidense.

En el ramo de básculas de pesaje dinámico para bandas transportadoras destaca la empresa Merry Inc. Esta compañía produce el modelo 475, cuya característica principal es que cuenta con las certificaciones del NIST (National Institute of Standards and Technology ) y del NTEP (National Type Evaluation Program) perteneciente a la Conferencia Nacional de Pesos y Medidas de los Estados Unidos de Norteamérica. Esta certificación es para los modelos con capacidades de 14.5 a 145 lb/ft. y con velocidades de banda entre 100 y 800 ft/min. Otra característica relevante de este modelo radica en que incluye una suspensión en forma de paralelogramo la cual permite eliminar efectos de cargas no axiales sobre la superficie de la báscula. [2]

Entre los fabricantes de básculas de pesaje dinámico para revisión de transportes en aduanas y casetas de cobro destaca la compañía francesa ECM (Electronique Controle Measure), que cuenta con más de 10,000 sistemas de

pesaje de este tipo instalados en países como Canadá, Corea, Australia, Nueva Zelanda, Suiza y Argentina. [3].

En el giro de las básculas verificadoras de peso que revisan y contabilizan paquetes existe una mayor cantidad de fabricantes entre los cuales podemos encontrar a las compañías Rice Lake Weighing System y a Cardinal Scale Manufacturing. [4] , [5] , [6].

## **1.4 Contenido**

En el Capítulo 2 se describen las diferentes técnicas existentes para identificación de sistemas. Se detallan algunos de los métodos más importantes, de los cuales se seleccionarán dos para encontrar un modelo matemático del sistema de pesaje. El Capítulo 3 presenta una descripción de los diferentes tipos de básculas que existen en el mercado. También se describe el principio de funcionamiento de una báscula y de los diferentes dispositivos que la componen. Además incluye una breve introducción de los sistemas transportadores de banda. El Capítulo 4 presenta dos métodos para determinar la cantidad de material a pesar que se transporta por la banda en un determinado lapso de tiempo. Se muestran las simulaciones realizadas para ambos métodos así como su comparación. El Capítulo 5 describe la implementación del prototipo del sistema de pesaje, además presenta los resultados obtenidos y las conclusiones obtenidas de las pruebas. Por último el Capítulo 6 presenta las conclusiones finales del trabajo, así como algunas posibles mejoras al sistema que se podrían realizar en trabajos futuros en el área.

# Capítulo 2

## 2. Introducción a las técnicas de identificación de sistemas.

### 2.1 Introducción

Consiste en la construcción de un modelo matemático que describa el comportamiento de un sistema, existen algunos métodos para llevar a cabo esta tarea. El primero de ellos consiste en derivar analíticamente las entradas y salidas características, para modelar físicamente la planta; en donde es necesario aplicar las leyes fundamentales de la mecánica, termodinámica, química, etc. lo cual por lo general es sumamente tardado y complicado debido principalmente a que los sistemas que se desean modelar por lo general son demasiado extensos. Además los complejos modelos que se obtienen como resultado no se relacionan bien con la respuesta observada en el sistema físico, este método es conocido como “modelado físico”.

Una alternativa útil para generar un modelo dinámico consiste en medir las relaciones que existen entre las entradas y las salidas de sistema, para construir un modelo que pueda replicar este comportamiento; este método es conocido con el término de “identificación de sistemas” dentro del área de sistemas de control.

El procedimiento para identificar un sistema es el siguiente:

1. Coleccionar una gran cantidad de datos de entradas y salidas. Cabe mencionar que la calidad del modelo estará directamente relacionada en los datos en que esta basada.
2. Seleccionar un conjunto de modelos tentativos.
3. Determinar el mejor modelo dentro de la clase de sistemas considerados.
4. Evaluar el modelo.

La representación de un modelo puede ser una ecuación de diferencias lineal, una secuencia de pesos, o una ecuación de estados variables. La identificación de sistemas puede clasificarse en dos categorías:

El primero de ellos es el caso de la “caja negra”, en donde no se conoce nada acerca de las propiedades básicas del sistema, el cual es difícil de resolver ya que por lo general se tiene que hacer alguna clase de suposición antes de llegar a la solución.

El segundo caso se conoce como “identificación parcial”, dentro del cual caen afortunadamente la mayoría de los sistemas y procesos industriales que se encuentran en la práctica; aquí se conocen algunas características básicas del sistema, como linealidad, ancho de banda y en algunos casos la estructura del



sistema. Debido a estas características es posible generar un modelo matemático de la dinámica del sistema ya que solo queda por determinar un conjunto de parámetros en la ecuación del modelo. A este caso se le conoce como "identificación de parámetros".

Existen dos formas de realizar la identificación de un sistema. La primera es la "identificación fuera de línea", en la cual se obtiene un conjunto de datos de entrada y salida, con los cuales posteriormente se estiman los parámetros del sistema. La segunda forma se conoce como "identificación en línea", en la cual la estimación de parámetros es calculada recursivamente para cada conjunto de datos, por lo que la información nueva es utilizada para corregir y actualizar los estimados existentes. Si el proceso de actualización puede realizarse muy rápido, es posible obtener estimaciones de parámetros en sistemas variantes en el tiempo.

Una gran cantidad de métodos han sido desarrollados y aplicados en el área de identificación de sistemas para los dos casos anteriores, los cuales pueden ser clasificados de varias formas, como la que se muestra a continuación:

1. Métodos clásicos: (la mayoría fuera de línea)
  - a. Identificación por respuesta a la frecuencia.
  - b. Identificación por deconvolución de la respuesta al impulso
  - c. Identificación por respuesta al escalón.
  - d. Identificación por funciones de correlación.
2. Aproximación por ecuación-error: ("batch processing")
  - a. Método de mínimos cuadrados.
  - b. Mínimos cuadrados generalizados.
  - c. Máxima verosimilitud ("Maximum likelihood").
  - d. Método de gradientes.
3. Técnicas de ajuste de parámetros adaptativos:
  - a. Mínimos cuadrados (recursivo)
  - b. Mínimos cuadrados generalizados (recursivo)
  - c. Variables instrumentales.
  - d. "Bootstrap".
  - e. Máxima verosimilitud (recursivo).
  - f. Correlación (recursivo).
  - g. Aproximación estocástica.

## **2.2 Definición de los métodos de identificación**

En esta sección se presenta una breve descripción de los métodos más importantes para nuestro caso de estudio. La parte relativa a las técnicas de ajuste de parámetros adaptativos se omite debido a dos razones: La primera radica en el hecho de que nuestro proceso de actualización no se puede realizar de una forma

rápida, debido al tiempo de muestreo del sistema de pesaje, lo cual hace prácticamente imposible el concepto de ajuste de parámetros en tiempo real. La segunda razón se basa en el hecho de que la mayoría de los parámetros que se pueden modificar en el sistema dependen exclusivamente de cambios en la velocidad y en la tensión en la banda, los cuales por simplicidad para nuestro caso serán tomados como constantes.

### 2.2.1 Método de respuesta a la frecuencia

El método de respuesta a la frecuencia para identificación de modelos lineales está basado en los diagramas de Bode. En este método se aplican señales senoidales como entrada y se observa la salida en estado estable del sistema; posteriormente se obtiene la relación de la magnitud y el desplazamiento en fase entre la salida y la entrada. Estas mediciones se realizan sobre un rango de frecuencias de interés.

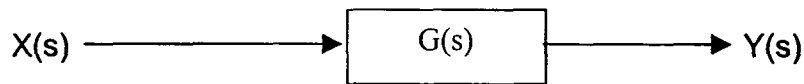


Figura 2.1 Modelo del sistema para el método de respuesta a la frecuencia.

En donde  $X(s)$  es la entrada y  $Y(s)$  es la salida del sistema. Si la función de transferencia es  $G(s)$ , entonces la respuesta en frecuencia es obtenida sustituyendo "s" por " $j\omega$ " como se muestra a continuación:

$$G(j\omega) = M(\omega) e^{j\phi(\omega)} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

donde  $M$  es la relación entre las magnitudes y  $\phi$  es el desfase entre la salida y la entrada. Las gráficas de  $M(\omega)$  y de  $\phi(\omega)$  en decibels contra  $\omega$  (en escala logarítmica), pueden ser utilizadas para estimar algunas frecuencias de corte (polos y ceros) de la función de transferencia. En la práctica es necesario generar entradas senoidales de diferentes frecuencias y debe ser posible medir la relación de la magnitud y los desfases en fase para estas frecuencias.

Para poder generar la función de transferencia es necesario aproximar las curvas de la respuesta en magnitud y fase con líneas rectas, las cuales tienen una pendiente de  $6n$  dB/octava, donde "n" es un número entero. Por último este método solo puede ser aplicado a procesos lineales y asume identificación fuera de línea.

## 2.2.2 Método de deconvolución de la respuesta al impulso:

Si la entrada es diferente de un simple escalón, una opción es relacionar la entrada y la salida del sistema a través de una integral de convolución:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)w(t - \tau)d\tau$$

donde  $w(\tau)$  es la repuesta al impulso del sistema.

La determinación de la respuesta al impulso de la entrada y de la salida es llamada "deconvolución". Una vez que  $w(\tau)$  es determinada, la función de transferencia del sistema puede ser evaluada siguiendo los métodos descritos en el método anterior, pero en este caso se aplicara el método de la deconvolución.

Si se aproxima la entrada y la salida asumiendo que ellas son constantes entre los instantes de muestreo tenemos:

$$\begin{aligned}x(t) &= x(nT) \text{ para } nT < t < (n+1)T \\y(t) &= y(nT) \text{ } n=0,1,2\dots\end{aligned}$$

Aplicando estos términos a la integral de convolución tenemos después de desarrollar el siguiente algoritmo recursivo:

$$w(nT) = \frac{1}{T}[y(nT + T) - y(nT)]$$

la cual es una aproximación derivada de  $y(t)$  para  $t = nT$ . Esta aproximación es recomendable cuando  $T$  sea lo suficientemente pequeña.

## 2.2.3 Identificación por la repuesta al escalón

Se trata de la entrada más simple que puede ser aplicada al sistema para su identificación. Si partimos de que de la respuesta al impulso de un sistema se puede derivar de la respuesta al escalón, este método puede ser reducido a la determinación de la función de transferencia basado en la respuesta al impulso.

Si el modelo del sistema es de primer orden, bajo este método solo es necesario obtener dos parámetros, los cuales son la respuesta al escalón en estado estable y la constante de tiempo. Para un modelo de segundo orden con dos polos y ningún cero, existen dos situaciones posibles, la primera de ellas se

presenta cuando ambos polos son reales y la segunda cuando los polos son complejos conjugados. Existen formulas para encontrar la respuesta en estado estable, el sobretiro, el tiempo requerido para alcanzar el primer pico, el tiempo requerido para alcanzar el 50% del valor en estado estable (para sistemas sobreamortiguados); existen más formas para encontrar parámetros para este método cuando el orden de la función de transferencia es mayor.

Para fines prácticos es mejor utilizar el método del gradiente para encontrar los parámetros del modelo de cualquier orden.

### 2.2.4 Método de correlación

El método se basa en aplicar una entrada aleatoria al proceso, lo cual se simplifica si la entrada en particular se trata de ruido blanco. En realidad en la práctica es imposible obtener una entrada de ruido blanco ideal, pero esta, puede ser aproximada por ruido con densidad espectral de potencia constante sobre un rango de frecuencias de interés.

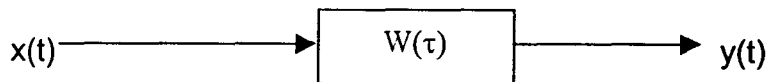


Figura 2.2 Modelo del sistema para el método de correlación.

La relación entre la entrada y la salida para un sistema lineal invariante en el tiempo puede ser escrita como:

$$y(t) = \int_0^x w(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_0^\infty w(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

La correlación cruzada entre la entrada y la salida es obtenida como:

$$\phi_{yx}(\theta) = E[y(t)x(t - \theta)]$$

Sustituyendo el valor y(t) dentro de esta ecuación y desarrollando para una entrada x(t) como ruido blanco se obtiene:

$$\phi_{xx}(\theta - \tau) = \delta(\theta - \tau)$$

donde  $\delta(\theta - k)$  representa un impulso unitario que ocurre en  $\tau = k$ , por lo cual:

$$\phi_{yx}(\theta) = w(\theta)$$

entonces  $\phi_{yx}(\theta)$  es igual a la respuesta al impulso del sistema para  $t = \theta$ .

Con ruido blanco a la entrada aproximado por una entrada pseudoaleatoria, es posible implementar una identificación en línea superponiendo esta entrada con al entrada normal del sistema. Como el sistema es considerado lineal, la salida es la suma de dos salidas que corresponden a la entrada normal del sistema y a la entrada de ruido blanco. Como no existe correlación entre la salida correspondiente al ruido blanco y la entrada normal, así como entre la entrada de ruido blanco y la entrada o salida normal del sistema, la correlación cruzada es igual a la respuesta al impulso.

Este método da buenos resultados aun con altos índices de ruido, pero se debe de esperar por una cantidad suficiente de datos para poder estimar valores iniciales. Ente las ventajas de este método podemos mencionar que no se requiere un conocimiento a priori del sistema. Su principal desventaja se encuentra en que se requiere de hardware o software adicional para generar el ruido blanco y calcular la correlación cruzada.

### **2.2.5 Estimación de la función de transferencia de un sistema continuo en el tiempo a partir de las muestras de la respuesta al impulso.**

Los dos métodos anteriores, deconvolución y correlación, dan como resultado un conjunto de muestras que corresponden a la respuesta al impulso, por lo cual es necesario llevar a cabo un procedimiento para estimar la función de transferencia en base a una secuencia.

Se puede realizar en dos pasos. El primero de ellos consiste en determinar la función de transferencia pulso,  $H(z)$ , para un sistema discreto la cual tiene la misma secuencia a la respuesta al impulso. El segundo paso es la obtención de la función de transferencia en el tiempo, para lo cual se puede utilizar cualquier procedimiento conocido para convertir la función  $H(z)$  a  $H(s)$ .

A continuación se presenta con detalle el procedimiento para obtener la función de transferencia pulso:

Considere una función de transferencia discreta  $H(z)$  de orden “n” descrita por la siguiente ecuación:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}$$

de la definición de la función de transferencia pulso tenemos que:

$$H(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots$$

multiplicando las dos ecuaciones anteriores por el denominador de la primera se obtiene:

$$a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} = w_0 + (w_1 + b_1 w_0) z^{-1} + \dots + \left( w_n + \sum_{i=1}^n b_i w_{n-i} \right) z^{-n} + \left( w_m + \sum_{i=1}^n b_i w_{m-i} \right) z^{-m} + \dots \quad (m > n)$$

igualando uno a uno los coeficientes de ambos extremos de la ecuación como potencias de  $z^{-1}$ , se generan  $(n+1)$  ecuaciones, las cuales pueden ser reagrupadas de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix}$$

Si se conoce el valor de  $b_i$  es posible obtener los coeficientes para el numerador. Para poder determinar  $b_i$  se considerarán los términos que contienen desde  $z^{-(n+1)}$  hasta  $z^{-2n}$ . Debido a que no existen términos de este orden del lado izquierdo de la igualdad, las ecuaciones generadas no se encuentran en términos de  $a_i$  y pueden ser reacomodados de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdot & \cdot & \cdot & w_n \\ w_2 & w_3 & \cdot & \cdot & \cdot & w_{n+1} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ w_n & w_{n+1} & & & & w_{2n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_{n+1} \\ -w_{n+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -w_{2n} \end{bmatrix}$$

Esta ecuación puede resolverse para los coeficientes del denominador y ser substituidos en la ecuación que nos ayuda a encontrar el numerador.

## 2.2.6 Mínimos cuadrados

En la práctica es difícil experimentar con el proceso, por lo cual es de gran utilidad contar con un método que no requiera de señales de entrada especiales. Algunos de los métodos clásicos dependen de una entrada específica como una señal senoidal o un impulso. Existen otros métodos como el de mínimos cuadrados, el cual puede utilizar cualquier tipo de entrada a expensas de aumentar el número de operaciones necesarias. Este método se basa en la minimización de la suma de los cuadrados del error y se describe a continuación:

La representación de un proceso puede ser determinada a través de un sistema lineal; de manera genérica se puede proponer:

$$\frac{y(t)}{u(t)} = z^{-d} \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

lo cual es equivalente a:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_{na} y_{k-na} = b_1 u_{k-1-d} + b_2 u_{k-2-d} + \dots + b_{nb} u_{k-nb-d}$$

la k-esima salida se puede despejar como:

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots - a_{na} y_{k-na} + b_1 u_{k-1-d} + b_2 u_{k-2-d} + \dots + b_{nb} u_{k-nb-d}$$

para hacerlo de forma más compacta se definen los vectores:

$$\phi^T(t-1) = [-y(t-1) - y(t-2) \dots - y(t-na) \\ u(t-1-d) \quad u(t-2-d) \dots u(t-nb-d)]$$

$$\theta^T = [a_1 \quad a_2 \dots a_{na} \quad b_1 \quad b_2 \dots b_{nb}]$$

en donde  $\phi^T(t)$  se le conoce como el vector de mediciones y  $\theta^T$  como el vector de parámetros reales. Llegando a:

$$y(t) = \phi^T(t-1)\theta$$

El problema consiste en encontrar el valor real de ese vector de parámetros.

Supongamos un vector de parámetros estimados  $\hat{\theta}$ . La salida estimada  $\hat{y}(t)$  en función de ese vector de parámetros estaría dada por:

$$\hat{y}(t) = \phi^T(t-1)\hat{\theta}$$

se puede entonces definir un error de estimación  $e(t)$  como la salida real menos la salida estimada:

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

si se desea, se puede obtener la predicción de la salida para cada instante de tiempo como:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \phi^T(t-1)\hat{\theta} \\ \hat{y}(t+1) &= \phi^T(t)\hat{\theta} \\ &\vdots \\ \hat{y}(N) &= \phi^T(N-1)\hat{\theta} \end{aligned}$$

en donde N es el número de datos obtenidos. Se puede definir un vector de salidas estimadas:

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t) \\ \hat{y}(t+1) \\ \vdots \\ \hat{y}(N) \end{bmatrix}$$

De la misma manera los vectores de mediciones se pueden englobar en una sola matriz:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \phi^T(t-1) \\ \phi^T(t) \\ \vdots \\ \phi^T(N-1) \end{bmatrix}$$

Por lo que el sistema queda finalmente como:

$$\hat{Y} = \Psi \hat{\theta}$$



El error calculado de cada una de las estimaciones con respecto al valor real se representara por el vector  $\varepsilon$  y queda definido como:

$$\varepsilon = Y - \hat{Y}$$

El método de mínimos cuadrados, como su nombre lo indica, minimiza un criterio cuadrático basado en este error y esta dado por:

$$J(\hat{\theta}) = \varepsilon^T \varepsilon$$

Por lo tanto se debe encontrar el vector de parámetros estimados  $\hat{\theta}$  que minimice este error, el cual esta dado por:

$$\hat{\theta} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T Y$$

a esta ecuación se le conoce como estimador de mínimos cuadrados.

Así se puede llegar a la conclusión de que a partir de los datos obtenidos en un experimento se puede encontrar un vector de parámetros que minimiza el error de estimación. Basta con formar la matriz  $\Psi$  y el vector  $Y$ . El principal problema que se presenta al tratar de implementar esta ecuación es que se debe invertir una matriz que contiene todos los datos de entrada y de salida registrados durante el experimento.

El método de mínimos cuadrados es el método más eficiente para la estimación de parámetros para bajos niveles de ruido. Estos estimados convergen a sus valores correctos de manera rápida y la cantidad de cálculos es pequeña en comparación con la de otros algoritmos.

### 2.2.7 Mínimos cuadrados Generalizados

Se trata de un procedimiento iterativo para resolver un problema de minimización no lineal. En algunos casos el algoritmo no converge a la solución optima, especialmente si la relación señal a ruido del sistema es baja. El objetivo principal de este método consiste en estimar los parámetros del proceso así como los modelos de ruido para minimizar la media del cuadrado del error.

Se define un vector de parámetros auxiliar:

$$\underline{\psi} = [c_1 \quad c_1 \quad . \quad . \quad c_r]^T$$

el cual define un modelo auto regresivo para el ruido, además:

$$B_p = \begin{bmatrix} v_{k-1} & v_{k-2} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{k-r} \\ v_k & v_{k-1} & & & & v_{k+1-r} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ v_{k+p-2} & v_{k+p-3} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{k+p-r-1} \end{bmatrix}$$

Por otra parte se tiene que para un modelo auto regresivo y con ruido las siguientes ecuaciones:

$$\underline{y}_p = A_p \underline{\theta} + \underline{v}_p$$

$$\underline{v}_p = B_p \underline{\psi} + \underline{z}_p$$

las cuales pueden ser agrupadas para obtener:

$$\underline{y}_p = [A_p B_p] \cdot \begin{bmatrix} \underline{\theta} \\ \underline{\psi} \end{bmatrix} + \underline{z}_p$$

entonces una estimación por mínimos cuadrados sería la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{\theta}}_p \\ \hat{\underline{\psi}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p^T A_p & A_p^T B_p \\ B_p^T A_p & B_p^T B_p \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_p^T \\ B_p^T \end{bmatrix} \underline{y}_p$$

resolviendo para  $\hat{\underline{\theta}}_p$  y  $\hat{\underline{\psi}}_p$ , se obtiene:

$$\hat{\underline{\theta}}_p = (A_p^T A_p)^{-1} A_p^T \underline{y}_p - (A_p^T A_p)^{-1} A_p^T B_p \hat{\underline{\psi}}_p$$

y

$$\hat{\underline{\psi}}_p = D^{-1} B_p^T M \underline{y}_p$$

donde:

$$M = I - A_p (A_p^T A_p)^{-1} A_p^T$$

$$D = \underline{B}_p^T M B_p$$

cabe resaltar que el primer termino en la expresión para  $\hat{\underline{\theta}}_p$  se trata del estimado ordinario por mínimos cuadrados y el segundo es la corrección necesaria.

Para aplicar este algoritmo es necesario llevar a cabo los siguientes pasos:

1. Calcular el estimado por mínimos cuadrados mediante la siguiente ecuación:

$$\hat{\underline{\theta}}_{LS} = A_p^+ \underline{y}_p$$

y fijar:

$$\hat{\underline{\theta}}_i = \hat{\underline{\theta}}_{LS}$$

2. Generar los residuos utilizando:

$$\underline{v}_p = \underline{y}_p - A_p \hat{\underline{\theta}}_i$$

Posteriormente obtener  $B_p$  y calcular  $D$  mediante  $D = \underline{B}_p^T M B_p$ .

3. Calcular  $\hat{\underline{\psi}}$  utilizando  $\hat{\underline{\psi}}_p = D^{-1} B_p^T M \underline{v}_p$  y actualizar el estimado para  $\underline{\theta}$  utilizando:

$$\hat{\underline{\theta}}_{i+1} = \hat{\underline{\theta}}_i - A_p^+ B_p \hat{\underline{\psi}}$$

4. Regresar al paso 2 y repetir hasta obtener la convergencia.

El propósito general de este método es el de actualizar el estimado para el vector auxiliar  $\underline{v}$ , haciendo las debidas correcciones durante el proceso de estimación del parámetro  $\underline{\theta}$  hasta obtener el resultado deseado. Este método genera buenos resultados pero requiere de una gran cantidad de cálculos, además de que se presentan a menudo problemas de convergencia.

### 2.2.8 Método de máxima verosimilitud

Se trata de uno de los métodos más utilizados para obtener estimados imparciales. El principio básico es muy directo y se explicará primero antes de aplicarlo al problema de identificación de sistemas.

Sea  $\{v_k\}$  un proceso aleatorio discreto que depende de un parámetro desconocido  $\theta$ . Se asume que la función de probabilidad discreta  $f(v; \theta)$  es conocida.

Suponga que se tienen “n” observaciones independientes  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , y de las cuales se desea determinar el mejor estimado para  $\theta$  en base a esas muestras. Se selecciona  $\theta$  de manera tal que las observaciones  $v_i$  sean más probables de que ocurran.

Para poder realizar esto es necesario definir una función de verosimilitud y determinar el valor de  $\theta$  que la hará máxima. La función de verosimilitud es definida por lo general como una función con distribución de probabilidad conjunta de  $v_i$ . Como anteriormente se asumió que  $\{v_i\}$  no tenía correlación, entonces podemos escribir:

$$L(v_1, v_2, \dots, v_n; \theta) = f(v_1; \theta) \cdot f(v_2; \theta) \cdots f(v_n; \theta)$$

Como es lo mismo maximizar una función que su logaritmo (al ser este una función estrictamente creciente), este máximo puede calcularse derivando con respecto a  $\theta$  la función de verosimilitud (bien su logaritmo) y tomando como estimador máximo verosímil al que haga la derivada nula. La estimación de la máxima verosimilitud para  $\theta$  esta dada por  $\hat{\theta}_{ML}$  (Figura 2.3), la cual satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L \Big|_{\theta = \hat{\theta}_{ML}} = 0$$

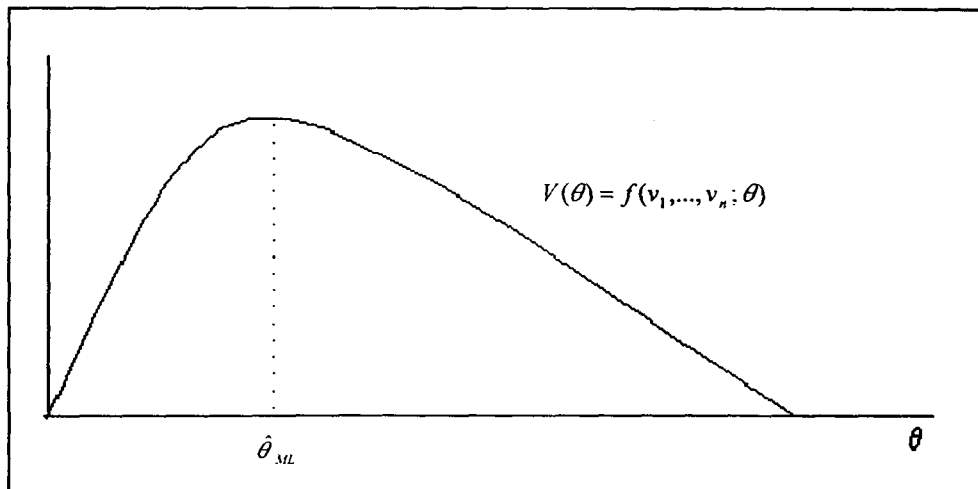


Figura 2.3 Función de densidad con respecto a  $\theta$

Ahora se aplicará el principio de máxima verosimilitud al problema de identificación de sistemas. La ecuación que representa el modelo presentado en la Figura 2.4 es:

$$y_k = \sum_{i=0}^m a_i u_{k-i} - \sum_{i=1}^n b_i y_{k-i} + v_k = \phi_k^T \underline{\theta} + v_k$$

donde:

$$v_k = n_k + \sum_{i=1}^n b_i n_{k-i}$$

$n_k$  representa el ruido en la medición de la salida, así como el efecto de disturbios a la entrada del sistema.

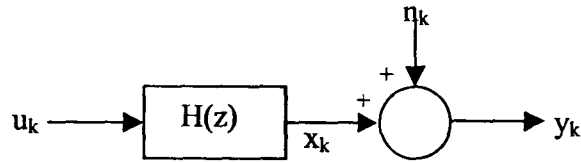


Figura 2.4 Modelo del sistema con ruido

La ecuación de  $y_k$  puede ser reagrupada de la siguiente forma:

$$A_p \underline{\theta} = \underline{y}_p - \underline{v}_p$$

donde:

$$A_p = \begin{bmatrix} u_k & u_{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{k-m} & -y_{k-1} & -y_{k-2} & \cdot & \cdot & \cdot & -y_{k-n} \\ u_{k+1} & u_k & \cdot & \cdot & \cdot & u_{k-m+1} & -y_k & -y_{k-1} & \cdot & \cdot & \cdot & -y_{k-n+1} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ u_{k+p-1} & u_{k+p-2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{k+p-m-1} & -y_{k+p-2} & -y_{k+p-3} & \cdot & \cdot & \cdot & -y_{k+p-n-1} \end{bmatrix}$$

y

$$\underline{y}_p = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+p-1} \end{bmatrix}$$

Al aplicar el principio de máxima verosimilitud sobre dicha ecuación y considerando ruido blanco, tenemos:

$$L[\underline{y}_p; \underline{\theta}] = (2\pi\sigma^2)^{-p/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\underline{y}_p - A_p \underline{\theta})^T (\underline{y}_p - A_p \underline{\theta})}{\sigma^2}\right]$$

Aplicando logaritmos en ambos lados de la ecuación, se obtiene la función de máxima verosimilitud logarítmica:

$$\log L[\underline{y}_p; \underline{\theta}] = -\frac{p}{2} \log 2\pi - \frac{p}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \frac{(\underline{y}_p - A_p \underline{\theta})^T (\underline{y}_p - A_p \underline{\theta})}{\sigma^2}$$

al igualar a cero las derivadas parciales con respecto a  $\underline{\theta}$  y a  $\sigma$ , se obtienen las siguientes expresiones para la estimación por máxima verosimilitud:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{\sigma}_{ML}^2} (A_p^T A_p \hat{\underline{\theta}}_{ML} - A_p^T \underline{y}_p) &= 0 \\ -\frac{p}{2\hat{\sigma}_{ML}^2} + \frac{Q}{2\hat{\sigma}_{ML}^4} &= 0 \end{aligned}$$

donde:

$$Q = (\underline{y}_p - A_p \hat{\underline{\theta}}_{ML})^T (\underline{y}_p - A_p \hat{\underline{\theta}}_{ML}) = \tilde{\underline{y}}_p^T \tilde{\underline{y}}_p$$

al resolver la primera derivada parcial se obtiene:

$$\hat{\underline{\theta}}_{ML} = (A_p^T A_p)^{-1} A_p^T \underline{y}_p$$

La máxima verosimilitud estimada para la varianza del ruido observado se encuentra dada por:

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{Q}{p} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p e_k^2$$

donde:

$$e_k = y_k - \underline{\phi}_K^T \hat{\underline{\phi}}_{ML}$$

Si se considera ahora que el ruido no es blanco, se puede modelar como la salida de un sistema lineal sujeto a ruido blanco a su entrada:

$$v_k = \sum_{i=1}^r c_i z_{k-1} + z_k$$

donde  $\{z_i\}$  es una secuencia de ruido blanco normalmente distribuido con media cero no correlacionado con  $\{u_i\}$ . Aunque  $\{v_i\}$  no es una secuencia de ruido, esta se encuentra normalmente distribuido, así como las variables aleatorias  $\{z_i\}$ . A continuación se define la matriz de covarianza para  $\{v_i\}$  como:

$$R = E[\underline{v}_p \underline{v}_p^T]$$

Así se obtiene la función de verosimilitud logarítmica como:

$$\log L[\underline{y}_p; \underline{\theta}] = -\frac{p}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log(\det R) + \frac{1}{2} (\underline{y}_p - A_p \underline{\theta})^T R^{-1} (\underline{y}_p - A_p \underline{\theta})$$

no es posible obtener una solución explícita de esta ecuación debido a la dependencia de la función de verosimilitud del parámetro  $c_i$ , a través de  $R^{-1}$  y del determinante  $R$ , por lo cual es necesario utilizar un mecanismo iterativo para llegar a una solución numérica, el cual se describe a continuación:

1. Obtener un estimado inicial de los parámetros del sistema, basado en métodos clásicos de identificación y/o con el método de mínimos cuadrados. Se debe asumir un estimado inicial para los parámetros  $c_i$ , e incluirlo con  $a_i$  y  $b_i$  para obtener  $\hat{\theta}_o$
2. Calcular la secuencia de residuos  $e_k$ , la cual se define como la diferencia entre la salida observada  $y_k$  y la salida predecida  $\hat{y}_k$ .
3. De la secuencia de residuos, calcular las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial e_k}{\partial a_k} = -u_{k-i} - \sum_{j=1}^r c_j \frac{\partial e_{k-j}}{\partial a_i}$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial b_k} = -y_{k-i} - \sum_{j=1}^r c_j \frac{\partial e_{k-j}}{\partial b_i}$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial c_k} = -u_{k-i} - \sum_{j=1}^r c_j \frac{\partial e_{k-j}}{\partial c_i}$$

4. Calcular:

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p e_k^2$$

$$\sum_{k=1}^p e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial \underline{\theta}}$$

$$\sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial e_k}{\partial \underline{\theta}} \right)^T \frac{\partial e_k}{\partial \underline{\theta}}$$

5. Calcular el cambio en el vector de parámetros dado por:

$$\underline{\partial \theta} = - \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial e_k}{\partial \underline{\theta}} \right)^T \frac{\partial e_k}{\partial \underline{\theta}} + \sum_{k=1}^p e_k \left( \frac{\partial^2 e_k}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}} \right)^{-1} \sum_{k=1}^p e_k \cdot \frac{\partial e_k}{\partial \underline{\theta}}$$

6. Determinar el nuevo vector de parámetros estimados:

$$\hat{\underline{\theta}}_{k+1} = \hat{\underline{\theta}}_{k+1} + \underline{\partial \theta}$$

7. Si  $(\hat{\sigma}_{k+1}^2 - \hat{\sigma}_k^2 / \hat{\sigma}_k^2) < 10^{-4}$  se termina, de otro modo se regresa al paso 2. Es decir que cuando la suma de los cuadrados de los errores residuales sea menor a un 0.01 % , se da por aceptado el resultado.

### 2.2.9 Método de gradientes

El objetivo de el algoritmo de adaptación de parámetros por gradiente es el de minimizar un criterio cuadrático en términos de predicciones del error. Considere que el modelo discreto de la planta esta dado por:

$$y(t+1) = -a_1 y(t) + b_1(t) u(t) = \underline{\theta}^T \underline{\phi}(t)$$

donde:

$$\underline{\theta}^T = [a_1 \quad b_1]$$

es el vector de parámetros,  $a_1$  y  $b_1$  son desconocidos. Se tiene que:

$$\underline{\phi}(t)^T = [-y(t) \quad u(t)]$$

es el vector de observación o de medición.

El modelo de predicción ajustable se describe por:

$$\hat{y}^o(t+1) = \hat{y}[t+1 | \underline{\theta}(t)] = -\hat{a}_1(t) y(t) + \hat{b}_1(t) u(t) = \hat{\underline{\theta}}(t)^T \underline{\phi}(t)$$

donde  $\hat{y}(t+1)$  representa una predicción a priori que depende de los valores de los parámetros estimados en un instante  $t$ , y:

$$\hat{\underline{\theta}}(t)^T = [\hat{a}_1(t) \quad \hat{b}_1(t)]$$

es el vector de parámetros estimados.

La salida a posteriori del predictor esta dada por:



$$\hat{y}(t+1) = \hat{y}[t+1 | \hat{\theta}(t+1)] = -\hat{a}_1(t+1)y(t) + \hat{b}_1(t+1)u(t) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t)$$

Se define a priori una predicción del error como:

$$\varepsilon^\circ(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^\circ(t+1)$$

y la predicción a posteriori del error esta dada por:

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1)$$

Se requerirá de un algoritmo de adaptación de parámetros recursivo con memoria. La estructura de dicho algoritmo es la siguiente:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \Delta \hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + f[\hat{\theta}(t), \phi(t), \varepsilon^\circ(t+1)]$$

El término correctivo  $f()$  debe depender solamente de información disponible en el instante  $(t+1)$ , además de que debe permitir el siguiente criterio para ser minimizado en cada paso:

$$\min_{\hat{\theta}(t)} J(t+1) = [\varepsilon^\circ(t+1)]^2$$

La solución esta dada por la técnica del gradiente.

Si las curvas de superficie son representadas en el plano de los parámetros  $a_1$  y  $b_1$ , se obtienen curvas cerradas alrededor del mínimo valor de la superficie, el cual esta reducido al punto  $(a_1, b_1)$  correspondiente a los parámetros del modelo de la planta. Cuando el valor de  $J$  se incrementa, las curvas de superficie se alejan del valor mínimo, como se puede observar en la siguiente figura:

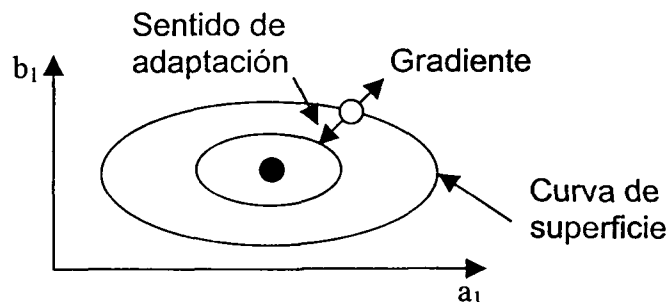


Figura 2.5 Principio del método del gradiente.

Para poder minimizar el valor de la superficie es necesario moverse en la dirección opuesta al gradiente dentro de la curva correspondiente, hasta llegar a un valor mínimo, por lo cual el algoritmo de adaptación paramétrico tomará la siguiente forma:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) - F \frac{\partial J(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t)}$$

en la cual  $F = \alpha I$  ( $\alpha > 0$ ) y es la matriz de adaptación de la ganancia ( $I$  es la matriz identidad) y  $\frac{\partial J(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t)}$  es el gradiente.

Partiendo del criterio de minimización se obtiene:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t)} = \frac{\partial \varepsilon^{\circ}(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t)} \varepsilon^{\circ}(t+1)$$

siempre y cuando:

$$\varepsilon^{\circ}(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^{\circ}(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \phi(t)$$

y:

$$\frac{\partial \varepsilon^{\circ}(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t)} = -\phi(t)$$

sustituyendo se tiene que:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F \phi(t) \varepsilon^{\circ}(t+1)$$

donde  $F$  es la matriz de adaptación de la ganancia. Existen dos posibles opciones:

1.  $F = \alpha I$ ;  $\alpha > 0$
2.  $F > 0$

La interpretación geométrica del algoritmo de adaptación paramétrico se muestra en la siguiente figura:

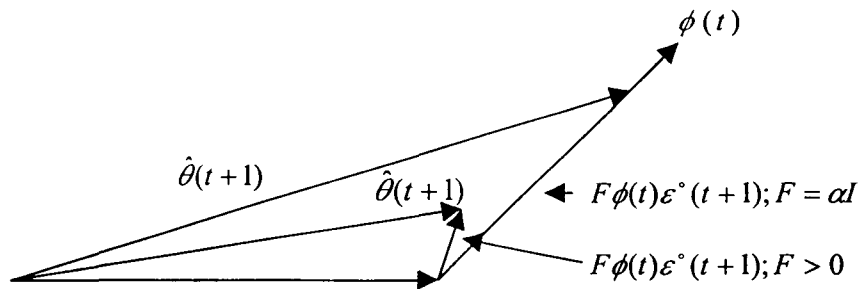


Figura 2.6 Interpretación geométrica para el algoritmo de adaptación por gradiente.

La ecuación anterior presenta riesgos de inestabilidad si se utiliza una ganancia de adaptación alta. Para evitar este problema se utiliza el mismo concepto pero con un criterio distinto:

$$\min_{\hat{\theta}(t+1)} J(t+1) = [\varepsilon(t+1)]^2$$

con lo que se obtiene:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t+1)} = \frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t+1)} \varepsilon(t+1)$$

siempre y cuando:

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t)$$

y:

$$\frac{\partial \varepsilon(t+1)}{\partial \hat{\theta}(t+1)} = -\phi(t)$$

sustituyendo se tiene que:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F \phi(t) \varepsilon(t+1)$$

Este algoritmo depende de  $\varepsilon(t+1)$ , el cual esta en función de  $\hat{\theta}(t+1)$ . Para que este algoritmo pueda ser implementado,  $\varepsilon(t+1)$  debe ser expresado en función de  $\varepsilon^\circ(t+1)$ :

$$\varepsilon(t+1) = f[\theta(t), \phi(t), \varepsilon^\circ(t+1)]$$

mediante esta ecuación podemos describir el procedimiento anterior:

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \phi(t) - [\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t)]^T \phi(t)$$

en donde los dos primeros términos del miembro derecho de la igualdad corresponde a  $\varepsilon^\circ(t+1)$ , por lo cual:

$$\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t) = F\phi(t)\varepsilon(t+1)$$

lo que nos permite tener:

$$\varepsilon(t+1) = \varepsilon^\circ(t+1) - \phi(t)^T F\phi(t)\varepsilon(t+1)$$

de la cual se obtiene la relación deseada entre  $\varepsilon(t+1)$  y  $\varepsilon^\circ(t+1)$ :

$$\varepsilon(t+1) = \frac{\varepsilon^\circ(t+1)}{1 + \phi(t)^T F\phi(t)}$$

y el algoritmo se convierte en:

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \frac{F\phi(t)\varepsilon^\circ(t+1)}{1 + \phi(t)^T F\phi(t)}$$

el cual es un algoritmo muy estable que no depende del valor de la ganancia  $F$ .

### 2.3 Resumen

En el presente capítulo se presentó una introducción a la identificación de sistemas. Se mencionó que existen dos formas de llevar a cabo una identificación las cuales son fuera y dentro de línea. Se presentó una clasificación de los métodos más importantes y se hizo una breve descripción de cada uno de ellos. Dentro de estos apartados se habla acerca de las ventajas y desventajas de utilizar los métodos fuera y dentro de línea, las cuales serán tomadas en cuenta en el Capítulo 4, en donde se tendrán que seleccionar dos métodos de identificación para realizar simulaciones y posteriormente llevar a cabo la implementación.

# Capítulo 3

## 3. Generalidades

Desde la antigüedad surge para el hombre la necesidad de determinar el peso de las cosas, principalmente dentro de la actividad comercial, productiva o médica es importante conocer el peso de productos, materias primas y personas.

La balanza se encuentra dentro de los primeros intentos para conocer el peso de las cosas. Posteriormente surgen el dinamómetro y otros dispositivos más complejos hasta llegar a las básculas mecánicas que conocemos en la actualidad, las cuales cumplieron durante años con su objetivo, el de determinar el peso de una manera rápida y sencilla. Desgraciadamente estos dispositivos cuentan con algunas desventajas inherentes a todo sistema mecánico, ya que se encuentran expuestas al desgaste y a la corrosión de sus partes, lo cual repercute en su precisión y exactitud.

Debido al gran avance de la industria electrónica en las últimas décadas se han logrado desarrollar sistemas de pesaje totalmente electrónicos, los cuales cuentan con una gran cantidad de ventajas en comparación con sus antecesores. Estos dispositivos carecen de partes en movimiento, por lo que se evita el desgaste y se mejora increíblemente su exactitud y precisión; por lo cual requieren de menos mantenimiento y su tiempo de vida se incrementa considerablemente.

Debido a que estos dispositivos son operados mediante microprocesadores se obtienen una gran cantidad de funciones adicionales tales como el almacenamiento de datos y parámetros, se incorpora la posibilidad de exportación de datos a impresoras y computadoras, se permite definición de señales de control, etc.

Podemos encontrar dos ramas dentro de los sistemas de pesaje, los cuales son las básculas de pesaje estático y las básculas de pesaje dinámico. Cabe destacar que esta última área es de reciente creación como lo podremos verificar más adelante.

### 3.1 Pesaje estático

Dentro de esta clasificación podemos encontrar a todas aquellos sistemas de pesaje que cuentan con un área o volumen donde se deposita algún objeto o material para determinar su peso en una unidad de medida estándar. Aquí podemos encontrar las siguientes básculas:

### 3.1.1 Pesaje directo

Se trata de aquellas básculas en las cuales solo se tiene como función principal medir el peso que se coloque sobre su área de pesaje. Su capacidad es muy grande ya que va de los centésimas de gramos a los cientos de toneladas. Se pueden encontrar variantes desde modelos con plataforma incluida o remota hasta grandes silos o tanques de almacenamiento. Dentro de esta categoría también podemos mencionar a las básculas analíticas para laboratorios, así como a las básculas médicas para consultorios y hospitales, etc.

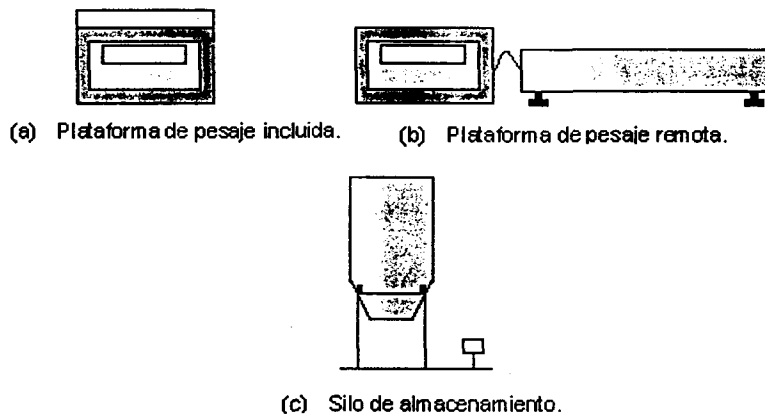


Figura 3.1 Tipos de básculas de pesaje directo.

### 3.1.2 Contadoras

Estas agregan a la báscula la capacidad de contar piezas con gran rapidez y precisión. Debido a su área de aplicación su capacidad va de las centésimas de gramos hasta un par de toneladas. El principio de funcionamiento de este dispositivo consiste básicamente en determinar de manera previa el peso unitario de una de las piezas a contar. Posteriormente el número de piezas se calcula como la división del peso sobre la báscula entre el peso unitario. Cabe mencionar que la precisión de estos dispositivos recae básicamente en la uniformidad de las piezas a contar.

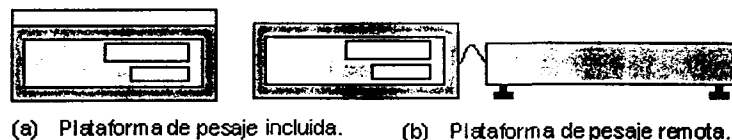


Figura 3.2 Tipos de básculas contadoras.

### 3.1.3. Colgantes

Se trata de una báscula de tipo industrial la cual tiene la facilidad de poder ser adaptada a una grúa o a un montacargas. Optimiza el tiempo de pesado ya que se pueden pesar objetos con el simple hecho de cargarlos sin necesidad de transportarlos a una báscula específica. Su capacidad va por lo general de los cientos de kilos hasta una decena de toneladas.



Figura 3.3 Báscula colgante.

### 3.1.4 Ensacadoras

Se trata de un sistema de pesaje optimizado para llenar sacos o recipientes con algún determinado material. La dosificación de los productos es controlada en forma automática por la báscula, logrando una gran precisión y rapidez. La capacidad de estos dispositivos va de las décimas de gramos hasta un par de toneladas.

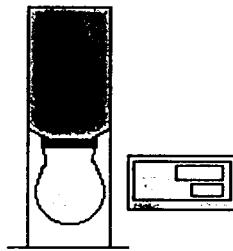


Figura 3.4 Báscula Ensacadora.

### 3.1.5 Camioneras y ferrocarrileras

Se trata de básculas de pesaje directo pero con una plataforma suficientemente amplia sobre el nivel del piso o bajo los rieles de una vía de ferrocarril, para pesar transportes o vagones de tren respectivamente. Su capacidad va por lo general de las 60 hasta las 200 toneladas.

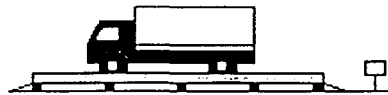


Figura 3.5 Báscula camionera.

### 3.2 Pesaje dinámico

Como se menciona en el Capítulo 1, en el pesaje dinámico el material o los objetos a los cuales se desea pesar por naturaleza o conveniencia no pueden ser detenidos dentro un flujo para ser examinados. El pesaje dinámico tiene una serie de aplicaciones interesantes dentro de la industria minera y de construcción como lo es la acumulación de peso y calculo de flujo a través de bandas transportadoras. Este tipo de pesaje también se da con frecuencia en la industria de manufactura donde sobresalen las máquinas verificadoras de peso que contabilizan y revisan paquetes. También se observa en aduanas y casetas de cobro donde se verifica si el peso de los transportes cumple con el tonelaje permitido en carreteras.

Entre las aplicaciones anteriores es posible observar dos grupos de básculas de pesaje dinámico: Las que tienen su área de pesaje sobre una banda transportadora flexible y las que tienen una área de pesaje rígida e independiente. La principal diferencia radica en que al trabajar sobre una banda continua el sistema registra componentes de peso que se encuentran en secciones anteriores y posteriores a la báscula, debido a que la báscula forma parte de la banda. El caso opuesto se presenta cuando la báscula es independiente y tiene su propia área de influencia limitada. Cabe mencionar que los dispositivos de la primera clase son escasos en el mercado y su exactitud no es su principal virtud. En la Figura 3.6 se puede apreciar la diferencia entre los diferentes tipos de sistemas de pesaje dinámico.

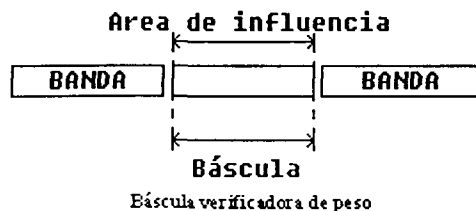
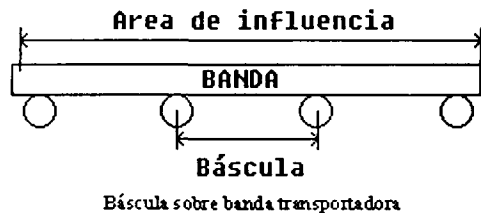


Figura 3.6 Tipos de básculas de pesaje dinámico



### 3.3 Principio de funcionamiento de una báscula electrónica.

Una báscula electrónica tiene como objetivo medir el peso y desplegarlo a un usuario. Para lograr esto es necesario convertir a la variable física a medir (que en este caso es el peso) a una señal eléctrica para posteriormente acondicionarla, procesarla y por último desplegarla. Esto se resume en la siguiente gráfica:

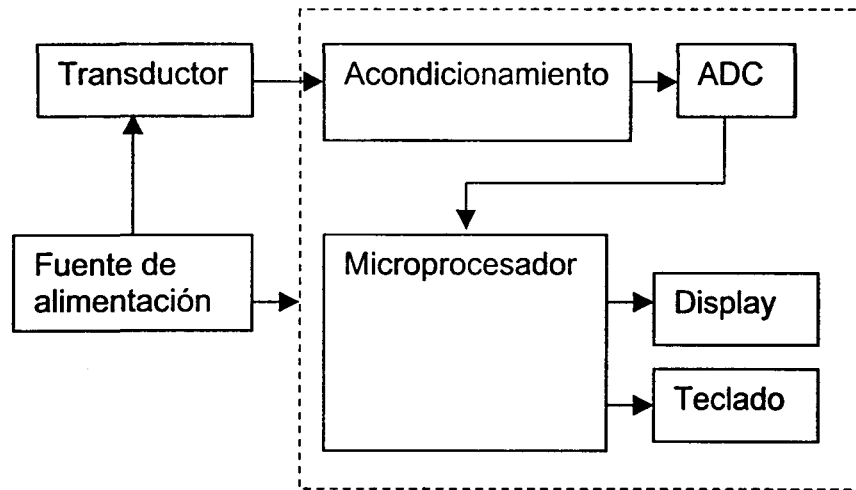


Figura 3.7 Báscula electrónica.

El transductor más comúnmente utilizado para convertir a una señal eléctrica el peso es la galga extensiométrica la cual describiremos a continuación:

#### 3.3.1 Galga extensiométrica

Transforma los esfuerzos mecánicos en cambios de resistencias que pueden convertirse a señales eléctricas como corriente y voltaje. Lo anterior es posible gracias al fenómeno piezoresistivo, el cual es una propiedad de los materiales que hace cambiar su resistencia debido al esfuerzo mecánico aplicado sobre ellos. [8] Dicho fenómeno no es aparente y para entenderlo es necesario hacer un análisis teórico-experimental completo del fenómeno. Existen varios tipos de galgas extensiométricas las cuales tienen diferentes configuraciones físicas. Entre estas podemos encontrar a las siguientes:

Galgas de hilo metálico.

Son las más sencillas y se encuentran en configuraciones fijas. Generalmente se encuentran adheridas a una base de dimensiones estables.

Galgas laminares metálicas.

Se desarrollan por métodos de fotograbado. Se fabrican de forma similar a la producción de circuitos impresos en bases flexibles.

Galgas de metal depositado.

Estas son aplicadas directamente sobre superficies mediante métodos de evaporización o bombardeo químico. Se usan en los diafragmas de los sensores de presión.

Galgas semiconductoras.

Son fabricadas de silicio u otro material semiconductor. Su cambio resistivo es menos lineal que las de metal y tienen gran dependencia de la temperatura.

Los cambios de resistencia esperados en galgas extensiométricas son muy pequeños. Por ello es importante la consideración de los efectos en la temperatura. Existe otro tipo de clasificación para las galgas extensiométricas ya que las hay activas y pasivas. [8] Las primeras son más sensibles a fuerzas de tensión o de compresión, mientras que las segundas son menos sensibles y su cambio de resistencia se debe principalmente a cambios en la temperatura. El uso de más de una galga en sistemas de transducción proporciona una forma atractiva de hacer compensación de temperatura. Para esto se utiliza un puente de Wheatstone, el cual es un dispositivo muy sensible a cambios pequeños en las resistencias, además de que proporciona una gran flexibilidad para compensar efectos no deseables. De aquí surge el concepto de celda de carga, con el cual son fabricadas la mayoría de las básculas en el mercado y se describen en la siguiente sección. [8]

### **3.3.2 Celdas de carga**

Las celdas de carga son dispositivos integrados que transducen fuerza directamente en voltaje usando galgas extensiométricas. Por lo general se colocan galgas activas en pares, 2 ó 4, que en forma alternada son sensibles a la tensión o a la compresión. Por lo general éstas son conectadas por medio de un puente de "Wheatstone". Al aplicar un peso a la celda a través de una esfuerzo de tensión o de compresión se produce una deflexión en las galgas extensiométricas, las cuales producen un cambio de resistencia proporcional a la carga. [9] Es necesario proveer un voltaje de excitación (E+ y E-) para obtener como salida un voltaje diferencial en mV por volts de excitación, tal y como se muestra en la Figura 3.8.

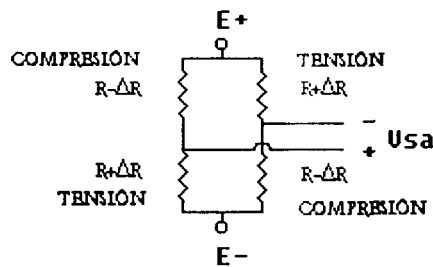


Figura 3.8 Celda de carga.

Las especificaciones más importantes de las celdas de carga son: Sensibilidad, error de no linealidad, deslizamiento o desviación de cero y deslizamiento o desviación de ganancia, las cuales se definen a continuación:

#### Sensibilidad

Se refiere a la salida en voltaje a capacidad nominal (mV/V). Define una salida diferencial por cada volt de excitación cuando se pone una carga nominal de fondo de escala. [8]

#### Error de no linealidad

Puede calcularse en error absoluto en libras o kilogramos siempre y cuando se especifique el valor porcentual con respecto al fondo de escala. [8]

#### Deslizamiento de cero y ganancia

Son desviaciones de cero y ganancia para temperaturas diferentes a las nominales de operación. Usualmente 25°C (77°F) es la temperatura nominal para la cual el fabricante especifica las pruebas de calibración. [8]

### 3.3.3 Acondicionamiento

Para el acondicionamiento de la señal proveniente de la celda de carga se utilizan por lo general amplificadores de instrumentación. A este dispositivo entra una señal diferencial de unos cuantos milivolts y sale una señal amplificada que se encuentra referenciada a la tierra del sistema.

### 3.3.4 Conversión análoga a digital

Aquí se utiliza un convertidor análogo a digital (ADC) para transformar la señal proveniente del amplificador de instrumentación a una palabra binaria que pueda ser leída y procesada por el microcontrolador. Para este tipo de aplicaciones se utilizan convertidores de sobremuestreo los cuales por lo general utilizan una

modulación "Delta-Sigma", la cual permite soportar resoluciones entre los 16 y 20 bits.

### **3.3.5 Conceptos relativos**

A continuación se definen una serie de conceptos relacionados a la descripción de cualquier instrumento de medición, aplicados en este caso a las básculas.

#### **Exactitud**

Es la desviación que existe en la salida con respecto a la cantidad exacta que el instrumento debe producir al medir un cierto peso. Se especifica en forma de porcentaje de error.

#### **Resolución**

Es el cambio mínimo a la entrada del instrumento que produce un cambio en la salida. En otras palabras se trata de la mínima variable de entrada que se puede medir.

#### **Repetibilidad**

Se refiere a que tan bien la salida regresa a un valor en estado estable, cuando la misma entrada es aplicada varias veces. La repetibilidad es un reflejo de la precisión del instrumento.

#### **Histéresis**

Se trata de un indicador de reproducibilidad de la salida cuando un valor dado es alcanzado en incrementos o decrementos de la entrada. Por lo general la histéresis es causada por un mecanismo físico del transductor que tiende a exhibir un valor de salida debido a resultados históricos recientes.

#### **Linealidad**

Se refiere a la diferencia entre una línea recta de referencia que describe el comportamiento ideal del transductor con respecto a su salida real.

#### **Capacidad**

Se define como el alcance máximo de un instrumento de medición. En el caso de una báscula se define como la máxima carga que puede ser aplicada para pesarse.

#### **Calibración**

Es un procedimiento realizado para ajustar la exactitud de un instrumento, con el objetivo de hacer cero el error entre la salida real de la báscula y la salida teórica, al aplicar una masa patrón como referencia.

### **3.4 Generalidades de los sistemas transportadores de banda**

Como ya se mencionó los sistemas transportadores de banda se emplean en una gran cantidad de industrias de diferentes índoles, en donde con frecuencia proporcionan el método más satisfactorio y económico para manejar y transportar materiales, tales como tierra, arena, grava, triturados, minerales, cemento, concreto, etc. Debido al continuo flujo de materiales a relativamente grandes velocidades, los transportadores de banda tienen altas capacidades.

Las partes esenciales de un sistema transportador de banda incluyen una banda continua, rodillos, una unidad motriz, poleas motrices y una estructura de apoyo. Una banda sinfín para transportar materiales a una distancia corta puede ser una unidad portátil o una instalación permanente. Cuando se utiliza un sistema transportador de banda para llevar materiales a distancias considerables, hasta varias millas en algunos casos, el sistema deberá consistir de un número de escalones diferentes, tal que existe un límite de longitud máxima de banda. Cada escalón es una unidad transportadora completa que descarga su carga en la parte posterior de la siguiente unidad. Este sistema puede operar en cualquier terreno siempre y cuando las pendientes no se excedan de las permisibles para las cuales el material particular pueda ser transportado. [12]

A continuación se hace una descripción de cada una de las partes de un sistema transportador de banda.

#### **3.4.1 Transportadores de banda**

La banda es la superficie móvil y de soporte sobre la que se transporta el material. Existen muchos tipos, tamaños y calidades, de entre los cuales puede seleccionarse la banda más adecuada para un trabajo en especial.

Las bandas se seleccionan se manufacturan uniendo entre sí varias capas de lona tejida para formar un armazón que proporciona la resistencia necesaria para resistir la tensión en la banda. Las capas están cubiertas con un adhesivo que las combina en una estructura integral. Se emplean tipos especiales de refuerzo, tales como rayón, nylon y cables de acero para aumentar la resistencia de la banda. Las superficies superior e inferior de la banda están cubiertas con hule para proteger el armazón de abrasiones y daños resultantes del impacto de la carga. El tamaño de una banda se selecciona de acuerdo al material que se requiere transportar con el gasto requerido. La mayoría de las bandas utilizadas manejan rodillos acanalados para aumentar sus capacidades. [12]

### 3.4.2 Rodillos

Los rodillos proporcionan el apoyo de la banda sinfín. Para la porción de la banda que lleva la carga, los rodillos están diseñados para proporcionar el acanalamiento necesario como se muestra en la Figura 3.9, mientras que para la porción de regreso de la banda, los rodillos proporcionan apoyos planos. Las partes esenciales de los rodillos en canal incluyen los rodillos mismos, los soportes y la base. Los rodillos pueden estar hechos de tubo de acero o de hierro fundido. Los rodillos con grandes diámetros dan menos fricción y mayor protección a la banda, especialmente cuando la carga incluye trozos grandes de material. [12]

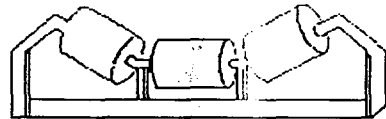


Figura 3.9 Rodillos de trabajo pesado acanalado.

# Capítulo 4

## 4.1 Modelación del sistema

En el presente capítulo se propondrán dos métodos diferentes para determinar la cantidad de material que entro al sistema de pesaje en un tiempo determinado. En ambos casos se supondrá un comportamiento conocido del sistema, con el objetivo de poder realizar las simulaciones de los modelos sin tenerlo físicamente. La ventaja de esta suposición radica en que se podrán verificar los dos métodos sin necesidad de construirlo. Posteriormente se implementará el sistema físico y se podrá comprobar si las consideraciones planteadas fueron las correctas.

Para realizar las simulaciones de los siguientes dos métodos se propondrán una cantidad de muestras por segundo aproximadas. Una vez implementado el sistema se podrá encontrar el número exacto de muestras que se toman en un intervalo de tiempo y se determinará también el orden correcto del modelo.

### 4.1 Selección del método de identificación

Se utilizarán los métodos de identificación por respuesta al impulso y por respuesta al escalón, generalmente ambos se emplean para sistemas de primer y de segundo orden[7]. Es importante resaltar que el orden de nuestro sistema será mayor ya que depende directamente del número de muestras que se tomen en un intervalo de tiempo. Aun conociendo previamente esta característica, se seleccionaron estos dos métodos debido a su sencillez, ya que se tiene la limitante de que la implementación del sistema se realizará con un microcontrolador de 8 bits. Otro inconveniente radica en el hecho de que la frecuencia de muestreo será de aproximadamente 14 muestras por segundo, lo cual podría llegar a generar una ecuación de diferencias grande que sería complicada de evaluar en tiempo real. Por estas razones se evito el uso de métodos más complicados como los de aproximaciones por ecuación-error, o de los recursivos ya que se llevan a cabo en tiempo real y requieren de demasiada velocidad de procesamiento para llevarse a cabo. Por otra parte, métodos clásicos como el de identificación por funciones de correlación o el de respuesta a la frecuencia se evitaron debido de que ambos requieren de señales especiales a la entrada del sistema para poder realizar la identificación. El primero de estos necesita introducir ruido blanco, lo cual es imposible debido a la naturaleza del sistema, en el cual no existen componentes de todas las frecuencias a la entrada. El segundo método se descarto debido a que se requiere aplicar señales senoidales a la entrada del sistema.

Este procedimiento será realizado fuera de línea, ya que para elaborar el modelo se recolectaran un conjunto de datos entrada y de salida. La cantidad de muestras que se tomen depende de la distancia entre rodillos y de la velocidad de la banda. Por simplicidad se supondrá para nuestro análisis que en todo momento la velocidad de la banda será constante.

## 4.2 Método de “Respuesta al impulso”

Se propone un primer método para poder determinar la cantidad de material que entro al sistema a partir de las lecturas de peso registradas por la báscula. Este método obtiene el modelo del sistema  $H(Z)$ , en base a la salida  $Y(Z)$  obtenida al aplicar como entrada un impulso  $R(Z)$ . El objetivo de obtener el modelo del sistema es el de poder generar  $R_n$ , con el cual es posible calcular la cantidad de material que entro recibiendo como datos de entrada los valores de  $Y_n$ .

Primero se hará el desarrollo de este método para el caso ideal en donde no se toman en consideración las áreas de influencia localizadas a ambos extremos de la báscula, con el objetivo de explicar de una manera sencilla este procedimiento, posteriormente se mostrará este mismo pero tomando en cuenta las áreas de influencia ya mencionadas.

### 4.2.1 Modelo ideal

Como se mencionó anteriormente este modelo no toma en consideración las áreas de influencia del sistema localizadas en ambos extremos de la báscula. Para simplificar la explicación de este método, se asumirá que el tiempo que le toma a una carga puntual pasar por la báscula (distancia “L” de la Figura 4.1) es de cinco tiempos de muestreo ( $T_s$ ). Por lo tanto el sistema toma cinco muestras cuando una carga puntual  $\delta(\tau)$  se desplaza a lo largo de la misma, como se puede observar en la Figura 4.2.

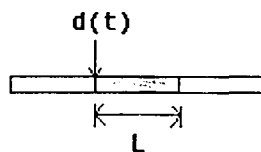


Figura 4.1 Modelo sin áreas de influencia.

Como se muestra en la siguiente figura, se tiene a  $R_n$  como entrada al sistema. Al pasar por la báscula se toman cinco muestras para esta carga ( $Y_n$ ).



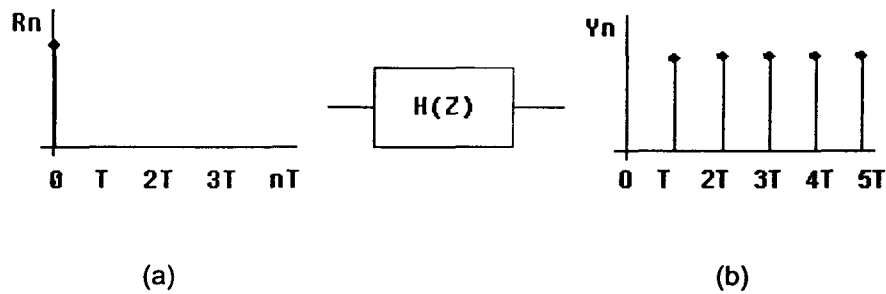


Figura 4.2 Efecto de una carga puntual sobre modelo sin áreas de influencia.

Matemáticamente la entrada y la salida del sistema para este caso se pueden representar de la siguiente manera:

$$R(Z) = 1 \quad \text{Impulso unitario}$$

$$Y(Z) = Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + Z^{-4} + Z^{-5} \quad \text{Cinco impulsos}$$

Ambas se pueden relacionar de la siguiente forma:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = \frac{Z^{-1} + Z^{-2} + Z^{-3} + Z^{-4} + Z^{-5}}{1}$$

donde  $H(Z)$  corresponde al modelo del sistema.

Desarrollando la expresión anterior y despejando para  $R(Z)$  obtenemos:

$$R(Z) = ZY(Z) - Z^{-1}R(Z) - Z^{-2}R(Z) - Z^{-3}R(Z) - Z^{-4}R(Z)$$

Aplicando transformada Z inversa obtenemos  $r_n$ :

$$r_n = y_{n+1} - r_{n-1} - r_{n-2} - r_{n-3} - r_{n-4}$$

Como se menciono anteriormente una vez obtenido  $r_n$ , es posible calcular para cada tiempo de muestreo la entrada real del sistema. El acumulado de todos los valores obtenidos por la ecuación anterior ( $r_0+r_1+r_2+\dots+r_m$ ) dará como resultado la cantidad de peso que paso por el sistema durante un periodo de tiempo igual a  $T_s \times m$ .

A continuación se presentan un par de ejemplos. En el Anexo II se pueden revisar más casos con diferentes combinaciones de entradas al sistema. Los resultados de dichos ejercicios se pueden ver resumidos en la Tabla 4.1 más adelante.

## 4.2.2 Simulación e interpretación de resultados

### Ejercicio 1

Una carga puntual  $\delta(t)$  pasa a través del sistema, la cual genera la salida  $Y_n$  (Figura 4.3(a)).

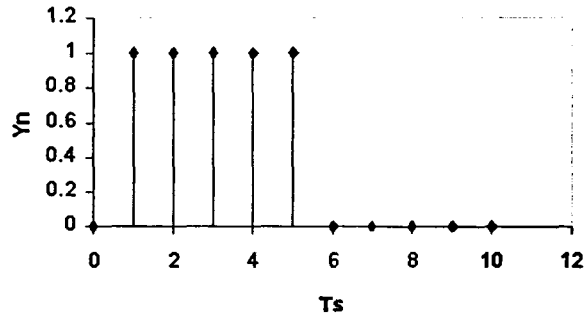


Figura 4.3(a) Salida para una carga puntual.

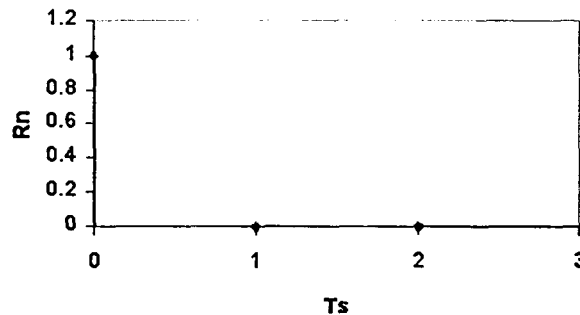


Figura 4.3(b) Resultado de la ecuación de diferencias para una carga puntual.

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 4.4(b). La suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  es igual a uno, que significa que la entrada al sistema se trató de una carga unitaria. Como se puede apreciar para este caso, la ecuación de diferencias genera los valores de  $R_n$  de la misma forma en que las cargas puntuales entraron al sistema, es decir  $\delta(t)+0+0+0$ .

### Ejercicio 2

Se aplicaron como entrada al sistema dos cargas puntuales  $\delta(t) + \delta(t - T)$ , las cuales generan la salida  $Y_n$  (Figura 4.4(a)).

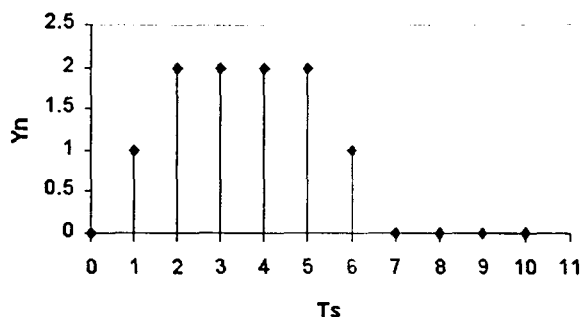


Figura 4.4(a) Salida para dos cargas puntuales.

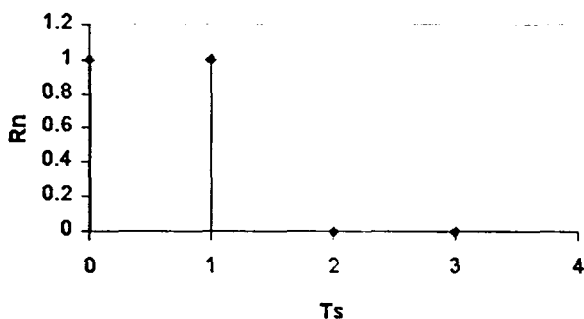


Figura 4.4(b) Resultado de la ecuación de diferencias para dos cargas puntuales.

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 4.4(b). La suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  es igual a dos, que significa que la entrada al sistema se trató de dos cargas unitarias. Al igual que en el ejercicio anterior se puede ver que la ecuación de diferencias genera los valores de  $R_n$  en el mismo orden en que entraron al sistema las cargas puntuales.

El resultado de ambos ejercicios es favorable, ya que el algoritmo pudo calcular el valor de las cargas que pasaron por la báscula. En la siguiente tabla se puede apreciar el resultado de más ejercicios realizados utilizando este método. El desarrollo de los mismos se puede revisar en el Anexo II.

Ejercicio	Entrada real al sistema	Rn Acum
3	$\partial(t) + \partial(t - T) + \partial(t - 2T) + \partial(t - 3T) + \partial(t - 4T)$	5
4	$5\partial(t)$	5
5	$5\partial(t) + \partial(t - T)$	6
6	$5\partial(t) + \partial(t - T) + 3\partial(t - 2T) + 2\partial(t - 3T) + 4\partial(t - 4T)$	15
7	$5\partial(t) + \partial(t - 3T)$	6
8	$5\partial(t) + \partial(t - 2T) + 3\partial(t - 4T) + 2\partial(t - 6T) + 4\partial(t - 8T)$	15

Tabla 4.1 Resultado de simulaciones para el modelo sin áreas de influencia.

### 4.2.3 Modelo real

Ahora se presenta el modelo completo que toma en consideración las áreas de influencia del sistema como se muestra en la Figura 4.6. Cabe resaltar de nueva cuenta que las áreas de influencia corresponden a las dos secciones de banda contiguas a la báscula que se encuentran delimitadas por un rodillo antes y uno después de la báscula. Como se mencionó anteriormente estas dos áreas provocan que cuando una carga pase por la banda, se empiecen a ver sus efectos sobre la báscula mucho tiempo antes de que esta pase sobre la superficie la misma.

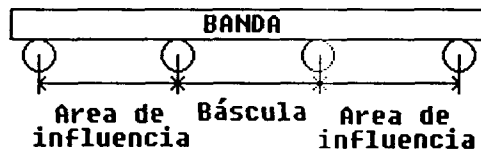


Figura 4.6 Modelo con áreas de influencia.

Por simplicidad se asume que más allá de estas áreas, no existe efecto alguno sobre la báscula. Para fines de simulación se tomará que una carga aumentará o disminuirá su peso en un 25% cada tiempo de muestreo al entrar o salir de alguna de las áreas de influencia. La siguiente figura muestra lo anterior para una entrada que corresponde a un impulso unitario.

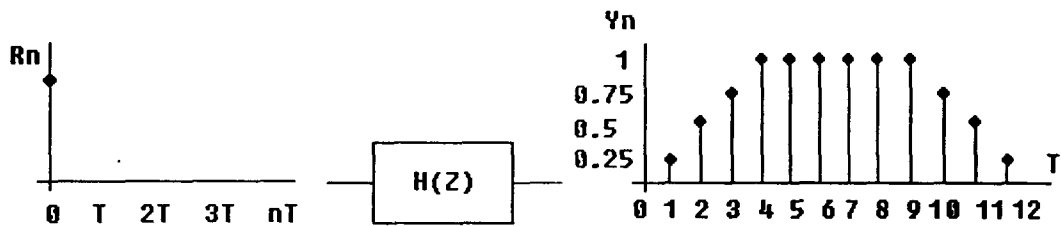


Figura 4.7 Efecto de una carga puntual sobre modelo con áreas de influencia

Matemáticamente la entrada y la salida del sistema se pueden representar de la siguiente manera:

$$R(Z) = 1$$

$$Y(Z) = 0.25Z^{-1} + 0.5Z^{-2} + 0.75Z^{-3} + Z^{-4} + Z^{-5} + Z^{-6} + Z^{-7} + Z^{-8} + 0.75Z^{-9} \\ + 0.5Z^{-10} + 0.25Z^{-11}$$

Ambas se pueden relacionar de la siguiente forma:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = 0.25Z^{-1} + 0.5Z^{-2} + 0.75Z^{-3} + Z^{-4} + Z^{-5} + Z^{-6} + Z^{-7} + Z^{-8} + 0.75Z^{-9} \\ + 0.5Z^{-10} + 0.25Z^{-11}$$

donde  $H(Z)$  corresponde al modelo del sistema.

Desarrollando la expresión anterior obtenemos:

$$Y(Z) = 4ZY(Z) - 2Z^{-1}R(Z) - 3Z^{-2}R(Z) - 4R(Z)(Z^{-3} + Z^{-4} + Z^{-5} + Z^{-6} + Z^{-7}) \\ - 3Z^{-8}R(Z) - 2Z^{-9}R(Z) - Z^{-10}R(Z)$$

despejando para  $R(Z)$  y aplicando transformada  $Z$  inversa, se obtiene la ecuación de diferencias resultante:

$$r_n = 4y_{n+1} - 2r_{n-1} - 3r_{n-2} - 4r_{n-3} - 4r_{n-4} - 4r_{n-5} - 4r_{n-6} - 4r_{n-7} - 3r_{n-8} - 2r_{n-9} - r_{n-10}$$

Como se menciono anteriormente una vez obtenido  $r_n$ , es posible calcular para cada tiempo de muestreo la entrada real del sistema. El acumulado de todos los valores obtenidos por la ecuación anterior ( $r_0+r_1+r_2+\dots+r_m$ ) dará como resultado la cantidad de peso que paso por el sistema durante un periodo de tiempo igual a  $T_s \times m$ .

A continuación se presentan un par de ejemplos en donde se aplica la ecuación de diferencias obtenida. En el Anexo II se pueden revisar más casos con diferentes combinaciones de entradas al sistema. Los resultados de dichos ejercicios se pueden ver resumidos en la Tabla 4.2 más adelante.

#### 4.2.4 Simulación e interpretación de resultados

##### Ejercicio 9

Una carga puntual  $\delta(t)$  pasa a través del sistema, la cual genera la salida  $Y_n$ . Figura 4.8(a).

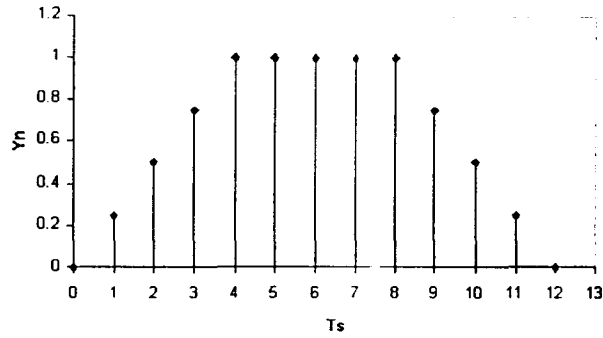


Figura 4.8(a) Salida para una carga puntual.

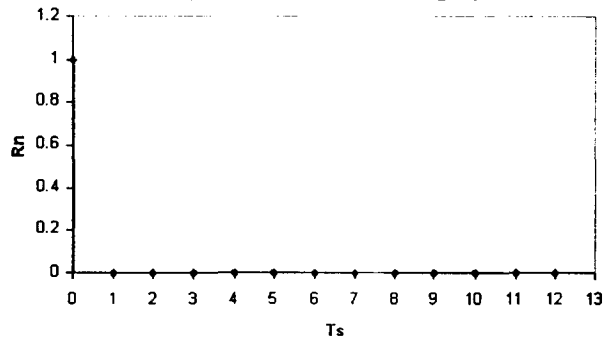


Figura 4.8(b) Resultado de la ecuación de diferencias para una carga puntual.

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 4.8(b). El resultado de la simulación es la suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  la cual es igual a uno, que significa que la entrada al sistema se trata de una carga unitaria. Como se puede apreciar en la Figura 4.8(b), la ecuación de diferencias genera los valores de  $R_n$  de la misma forma en que las cargas puntuales entraron al sistema, es decir  $\delta(t)+0+0+0$ .

### Ejercicio 10

Dos cargas puntuales  $\delta(t) + \delta(t - T)$  pasan a través del sistema, lo cual genera la salida  $Y_n$ . Fig. 4.9(a).

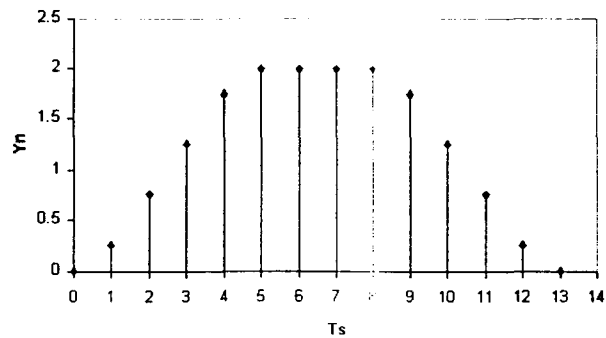


Figura 4.9(a) Salida para dos cargas puntuales

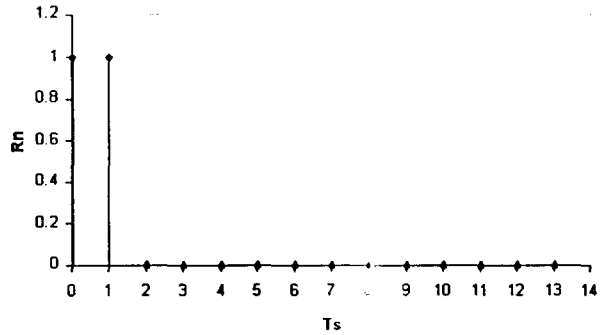


Figura 4.9(b) Resultado de la ecuación de diferencias para dos cargas puntuales.

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 4.9(a). El resultado de la suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  la es igual a dos, que significa que la entrada al sistema se trato de dos cargas unitarias. Como se puede apreciar en la Figura 4.9(b), la ecuación de diferencias genera los valores de  $R_n$  de la misma forma en que las cargas puntuales entraron al sistema, es decir  $\delta(t)+\delta(t)+0+0$ .

El resultado de ambos ejercicios es satisfactorio, ya que el algoritmo pudo calcular el valor de las cargas que pasaron por la báscula aún con la presencia de las áreas de influencia. En la siguiente tabla se puede apreciar el resultado de más ejercicios realizados utilizando este método. El desarrollo de los mismos se puede revisar en el Anexo II.

Ejercicio	Entrada real al sistema	Rn Acum
11	$\delta(t) + 10\delta(t - T)$	11
12	$\delta(t) + 10\delta(t - 2T)$	11
13	$\delta(t) + \delta(t - T) + \dots + \delta(t - 99T)$	100
14	$\delta(t) + 2\delta(t - T) + \dots + 2\delta(t - 99T)$	150

Tabla 4.2 Resultado de simulaciones para el modelo con áreas de influencia.

### 4.3 Método de “Respuesta al escalón”

Ahora se propone un segundo método para poder determinar la cantidad de material que entro al sistema en base a las lecturas de peso registradas por la báscula. Este método modela matemáticamente de acuerdo a su comportamiento la entrada (escalón unitario) y la salida del sistema, para posteriormente obtener el modelo completo del mismo. El objetivo al igual que en el método anterior es generar  $R_n$  a partir del modelo del sistema, para así poder calcular la cantidad de material que entro al sistema recibiendo como datos de entrada los valores de  $Y_n$ .

Al igual que en el método de respuesta al impulso, primero se hará el desarrollo para el caso ideal en donde no se toman en consideración las áreas de influencia, con el propósito de explicar de una manera sencilla este procedimiento, posteriormente se mostrara este mismo pero tomando en cuenta las áreas de influencia.

#### 4.3.1 Modelo ideal

Como se menciono anteriormente este modelo no toma en consideración las áreas de influencia del sistema localizadas en ambos extremos de la báscula. Si la entrada corresponde a “n” cargas puntuales separadas por un tiempo de muestreo (Figura 4.10(a)), se genera la  $Y_n$  mostrada en la Figura 4.10(b). En el tiempo T se tiene que aparece el peso correspondiente a  $\delta(\tau)$ , en el tiempo 2T aparece  $\delta(\tau) + \delta(\tau+T)$ , en el tiempo 3T aparece  $\delta(\tau+T) + \delta(\tau+2T)$  y así sucesivamente.

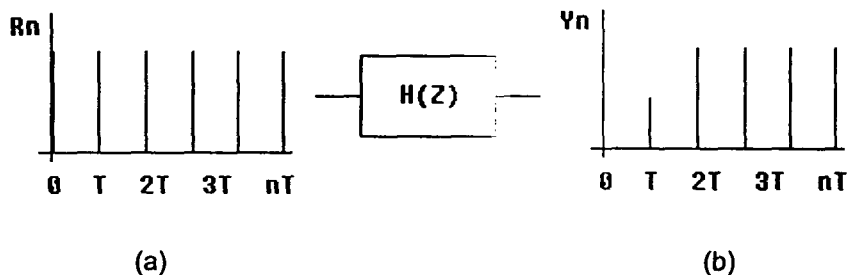


Figura 4.10 Efecto de una carga puntual sobre modelo sin áreas de influencia.

Matemáticamente la entrada y la salida del sistema para un caso general se pueden representar de la siguiente manera:

$$R(Z) = \frac{Z}{Z-1}$$

Escalón unitario



$$Y(Z) = \frac{Z}{(Z-1)^2} - Z^{-N} \frac{Z}{(Z-1)^2} \quad \text{Resta de dos rampas desfasadas NT}$$

Ambas se pueden relacionar de la siguiente forma:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = \frac{\frac{Z}{(Z+1)^2} - Z^{-N} \frac{Z}{(Z+1)^2}}{\frac{Z}{(Z-1)}}$$

donde  $H(Z)$  corresponde al modelo del sistema.

Desarrollando la expresión anterior y despejando para  $R(Z)$  (véase desarrollo Anexo I a) obtenemos:

$$R(Z) = ZY(Z) - Y(Z) + Z^{-N}R(Z)$$

Aplicando transformada Z inversa obtenemos  $r_n$ :

$$r_n = y_{n+1} - y_n + r_{n-N}$$

donde "N" representa físicamente el número de muestras que una carga puntual permanece dentro del sistema (desfasamiento de las dos rampas). Para el caso de la Figura 4.10 "N" es igual a 2.

Como se menciona anteriormente una vez obtenido  $r_n$ , es posible calcular para cada tiempo de muestreo la entrada real del sistema. El acumulado de todos los valores obtenidos por la ecuación anterior ( $r_0+r_1+r_2+\dots+r_m$ ) dará como resultado la cantidad de peso que paso por el sistema durante un periodo de tiempo igual a  $T_s \times m$ .

A continuación se presentan un par de ejemplos para "N" igual a 5 muestras. En el Anexo II se pueden revisar más casos con diferentes combinaciones de entradas al sistema. Los resultados de dichos ejercicios se pueden ver resumidos en la Tabla 4.3 más adelante.

Si "N" es igual a 5, entonces la ecuación de diferencias queda de la siguiente forma:  $r_n = y_{n+1} - y_n + r_{n-5}$ .

### 4.3.2 Simulación e interpretación de resultados

#### Ejercicio 15

Una carga puntual  $\delta(t)$  pasa a través del sistema, la cual genera la salida  $Y_n$  Figura 4.11(a).

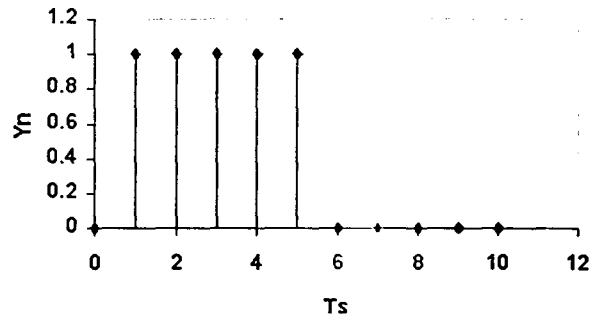


Figura 4.11(a) Salida para una carga puntual.

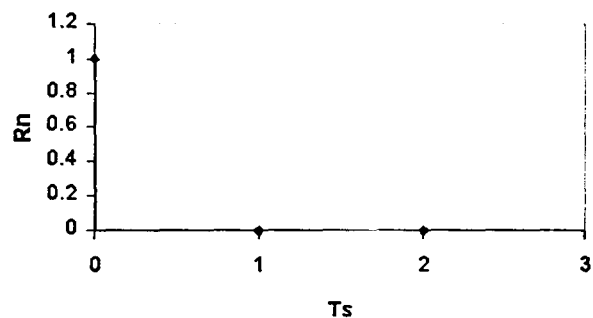


Figura 4.11(b) Resultado de la ecuación de diferencias para una carga puntual.

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 4.11(b). La suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  es igual a uno, que significa que la entrada al sistema se trató de una carga unitaria. Como se puede apreciar en la Figura 4.11(b), la ecuación de diferencias genera los valores de  $R_n$  de la misma forma en que las cargas puntuales entraron al sistema, es decir  $\delta(t)+0+0+0$ .

#### Ejercicio 16

Se aplicaron como entrada al sistema dos cargas puntuales  $\delta(t)+\delta(t+T)$ , las cuales generan la salida  $Y_n$  Figura 4.12(a).

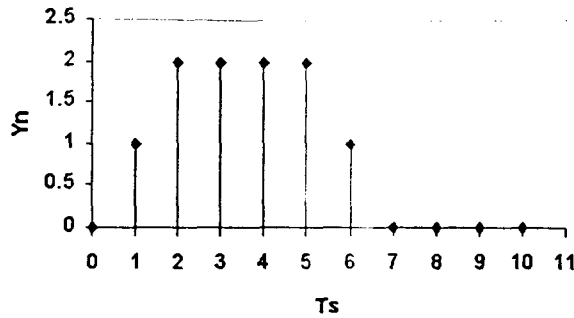


Figura 4.12(a) Salida para una carga puntual.

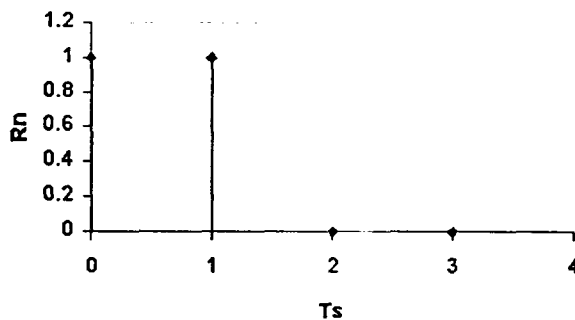


Figura 4.12(b) Resultado de la ecuación de diferencias para una carga puntual.

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 4.12(b). La suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  es igual a dos, que significa que la entrada al sistema se trató de dos cargas unitarias. Al igual que en el ejercicio anterior se puede ver que la ecuación de diferencias genera los valores de  $R_n$  en el mismo orden en que entraron al sistema las cargas puntuales.

El resultado de ambos ejercicios es favorable, ya que el algoritmo pudo calcular el valor de las cargas que pasaron por la báscula. En la siguiente tabla se puede apreciar el resultado de más ejercicios realizado utilizando este método. El desarrollo de los mismos se puede revisar en el Anexo II.

Ejercicio	Entrada real al sistema	Rn Acum
17	$\partial(t) + \partial(t+T) + \partial(t+2T) + \partial(t+3T) + \partial(t+4T)$	5
18	$5\partial(t)$	5
19	$5\partial(t) + \partial(t+T)$	6
20	$5\partial(t) + \partial(t-T) + 3\partial(t-2T) + 2\partial(t-3T) + 4\partial(t-4T)$	15
21	$5\partial(t) + \partial(t-3T)$	6
22	$5\partial(t) + \partial(t-2T) + 3\partial(t-4T) + 2\partial(t-6T) + 4\partial(t-8T)$	15

Tabla 4.3 Resultados de simulaciones para el modelo sin áreas de influencia.

### 4.3.3 Modelo real

Ahora se presenta el modelo completo que toma en consideración las áreas de influencia del sistema. Por simplicidad se asume que más allá de estas áreas, no existe efecto alguno sobre la báscula. Para fines de simulación se tomara que una carga aumentará o disminuirá su peso en un 25% cada tiempo de muestreo al entrar o salir de alguna de las áreas de influencia.

A continuación se presenta el comportamiento del sistema para una entrada escalón unitario:

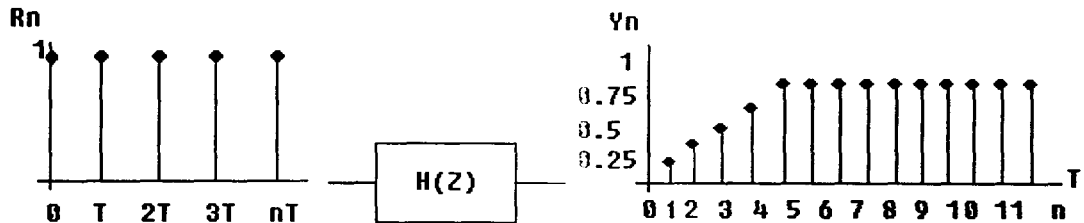


Figura 4.13 Efecto de un escalón unitario con áreas de influencia.

Matemáticamente la entrada y la salida del sistema se pueden representar de la siguiente manera:

$$R(Z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(Z) = 0.25Z^{-1} + 0.75Z^{-2} + 1.5Z^{-3} + 2.5Z^{-4} + 3.5Z^{-5} + 4.5Z^{-6} + 5.5Z^{-7} + 6.5Z^{-8} + 7.5Z^{-9} + 7.75Z^{-10} + 8Z^{-11} + 8Z^{-12} + \dots + 8Z^{-n}$$

$$Y(Z) = 0.25Z^{-1} + 0.75Z^{-2} + 1.5Z^{-3} + 2.5Z^{-4} + 3.5Z^{-5} + 4.5Z^{-6} + 5.5Z^{-7} + 6.5Z^{-8} + 7.5Z^{-9} + 7.75Z^{-10} + 8Z^{-11} \left( \frac{1}{1 - Z^{-1}} \right)$$

Ambas se pueden relacionar de la siguiente forma:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = 0.25Z^{-1}(1-Z^{-1}) + 0.75Z^{-2}(1-Z^{-1}) + 1.5Z^{-3}(1-Z^{-1}) + 2.5Z^{-4}(1-Z^{-1}) \\ + 3.5Z^{-5}(1-Z^{-1}) + 4.5Z^{-6}(1-Z^{-1}) + 5.5Z^{-7}(1-Z^{-1}) + 6.5Z^{-8}(1-Z^{-1}) \\ + 7.25Z^{-9}(1-Z^{-1}) + 7.75Z^{-10}(1-Z^{-1}) + 8Z^{-11}$$

desarrollando la expresión anterior y despejando para R(Z) (véase Anexo I b ) obtenemos:

$$Y(Z) = 0.25Z^{-1}R(Z) + 0.5Z^{-2}R(Z) + 0.75Z^{-3}R(Z) + Z^{-4}R(Z) + Z^{-5}R(Z) + Z^{-6}R(Z) \\ + Z^{-7}R(Z) + Z^{-8}R(Z) + 0.75Z^{-9}R(Z) + 0.5Z^{-10}R(Z) + 0.25Z^{-11}R(Z)$$

aplicando transformada Z inversa se obtiene:

$$0.25r_n = y_{n+1} - 0.5r_{n-1} - 0.75r_{n-2} - r_{n-3} - r_{n-4} - r_{n-5} - r_{n-6} - r_{n-7} - 0.75r_{n-8} - 0.5r_{n-9} \\ - 0.25r_{n-10}$$

despejando  $r_n$  se tiene la ecuación de diferencias resultante:

$$r_n = 4y_{n+1} - 2r_{n-1} - 3r_{n-2} - 4r_{n-3} - 4r_{n-4} - 4r_{n-5} - 4r_{n-6} - 4r_{n-7} - 3r_{n-8} - 2r_{n-9} - r_{n-10}$$

Como se menciono anteriormente una vez obtenido  $r_n$ , es posible calcular para cada tiempo de muestreo la entrada real del sistema. El acumulado de todos los valores obtenidos por la ecuación anterior ( $r_0+r_1+r_2+\dots+r_m$ ) dará como resultado la cantidad de peso que paso por el sistema durante un periodo de tiempo igual a  $T_s \times m$ .

A continuación se presentan un par de ejemplos para "N" igual a 5 muestras. En el Anexo II se pueden revisar más casos con diferentes combinaciones de entradas al sistema. Los resultados de dichos ejercicios se pueden ver resumidos en la Tabla 4.4 más adelante.

### 4.3.4 Simulación e interpretación de resultados

#### Ejercicio 23

Una carga puntual  $\delta(t)$  pasa a través del sistema, la cual genera la salida  $Y_n$ . Figura 14(a).

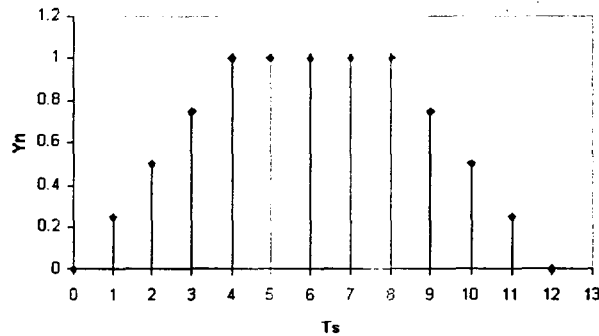


Figura 4.14(a) Salida para una carga puntual.

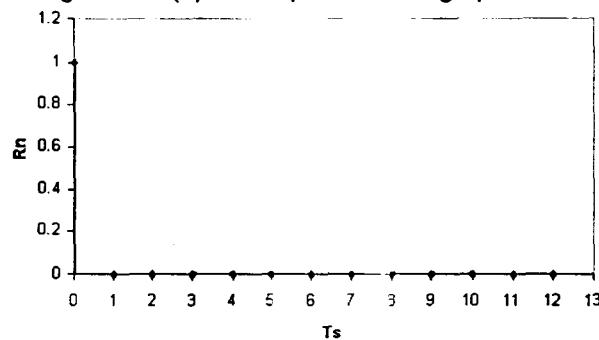


Figura 4.14(b) Resultado de la ecuación de diferencias para una carga puntual.

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$ , al cual se observa en la Figura 4.14(b). El resultado de la simulación es la suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  la cual es igual a uno, que significa que la entrada al sistema se trató de una carga unitaria. Como se puede apreciar en la Figura 4.14(b), la ecuación de diferencias genera los valores de  $R_n$  de la misma forma en que las cargas puntuales entraron al sistema, es decir  $\delta(t)+0+0+0$ .

#### Ejercicio 24

Dos cargas puntuales  $\delta(t) + \delta(t-T)$  pasan a través del sistema, lo cual genera la salida  $Y_n$ . Figura 4.15.(a).

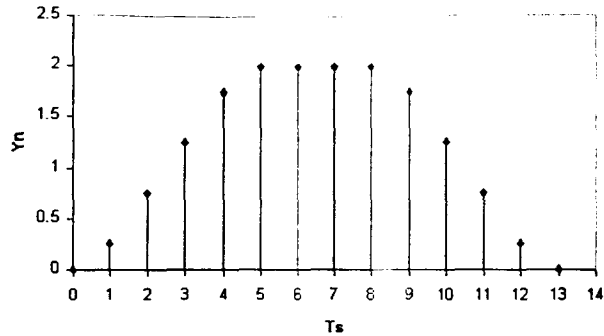


Figura 4.15(a) Salida para dos cargas puntuales.

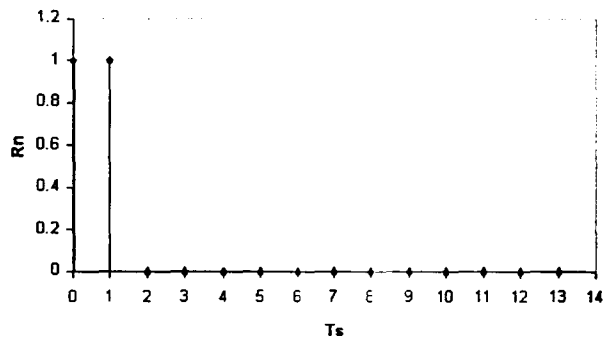


Figura 4.15(b) Resultado de la ecuación de diferencias para dos cargas puntuales.

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$ , la cual es mostrada en la Figura 4.15(a). El resultado de la suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  la es igual a dos, que significa que la entrada al sistema se trato de dos cargas unitarias. Como se puede apreciar en la 4.15(b), la ecuación de diferencias genera los valores de  $R_n$  de la misma forma en que las cargas puntuales entraron al sistema, es decir  $\delta(t)+\delta(t)+0+0$ .

El resultado de ambos ejercicios es bueno, ya que el algoritmo pudo calcular el valor de las cargas que pasaron por la báscula aún con la presencia de las área de influencia. En la siguiente tabla se puede apreciar el resultado de más ejercicios realizado utilizando este método. El desarrollo de los mismos se puede revisar en el Anexo II.

Ejercicio	Entrada real al sistema	Rn Acum
25	$\delta(t) + 10\delta(t - T)$	11
26	$\delta(t) + 10\delta(t - 2T)$	11
27	$\delta(t) + \delta(t - T) + \dots + \delta(t - 99T)$	100
28	$\delta(t) + 2\delta(t - T) + \dots + 2\delta(t - 99T)$	150

Tabla 4.4 Resultado de las simulaciones para el modelo con áreas de influencia.

#### 4.4 Comentarios y conclusiones:

Los resultados de las simulaciones para el método de respuesta al impulso y el método de respuesta al escalón fueron aceptables según se pudo observar en los ejercicios previamente presentados. A continuación se presenta una serie de comparaciones entre ambos:

- 1 Ambos métodos determinan la cantidad de peso que entro al sistema en un tiempo determinado al evaluar cada tiempo de muestreo la ecuación de diferencias.
- 2 En los dos métodos al realizar el análisis para el caso ideal se obtienen dos ecuaciones de diferencia diferentes, pero al trabajar con ambos se obtienen los mismos resultados. La ecuación de diferencias obtenida por el método de respuesta al impulso consta de 5 elementos, mientras que la obtenida por el método de respuesta al escalón consta de 3 elementos y es de cierta forma más flexible de ajustar al comportamiento real del sistema.
- 3 En los dos métodos se obtiene una misma ecuación de diferencias cuando se trabaja con el modelo real del sistema, por lo cual los resultados son idénticos.  
La explicación del punto 3 y 4 radica en que si partimos de que de la respuesta al impulso de un sistema se puede derivar de la respuesta al escalón, el método de respuesta al escalón puede ser reducido a la determinación de la función de transferencia basado en la respuesta al impulso. [7]
- 4 En ambos métodos al trabajar con cargas separadas entre sí, provoca que el orden de los impulsos generados por el algoritmo vaya en orden diferente al de entrada.
- 5 Al introducir ruido en ambos modelos se tuvo una respuesta aceptable ya que al final de la simulación la suma de todos los valores calculados de  $r_n$  correspondió a la cantidad de material que se paso por el sistema.

Debido a lo anterior se implementará el modelo obtenido por el método de respuesta al escalón.



# Capítulo 5

## 5. Implementación y comprobación de resultados

### 5.1 Verificación del modelo

Como se menciona en el capítulo anterior, se eligió implementar el método de respuesta al escalón. Una vez construido el prototipo del sistema de pesaje (véase Anexo IV), se pudo comprobar que las consideraciones referentes al comportamiento físico del mismo fueron las correctas, debido que al identificar el modelo del sistema se observó un comportamiento similar al que se supuso para las simulaciones previas.

Para corroborar lo anterior, se alimentó como entrada al sistema una carga puntual de 1 kg por diez ocasiones y se almacenaron las lecturas de peso registradas por el sistema para cada uno de estos experimentos. Posteriormente se promediaron los valores almacenados y se obtuvo la respuesta mostrada en la Figura 5.1:

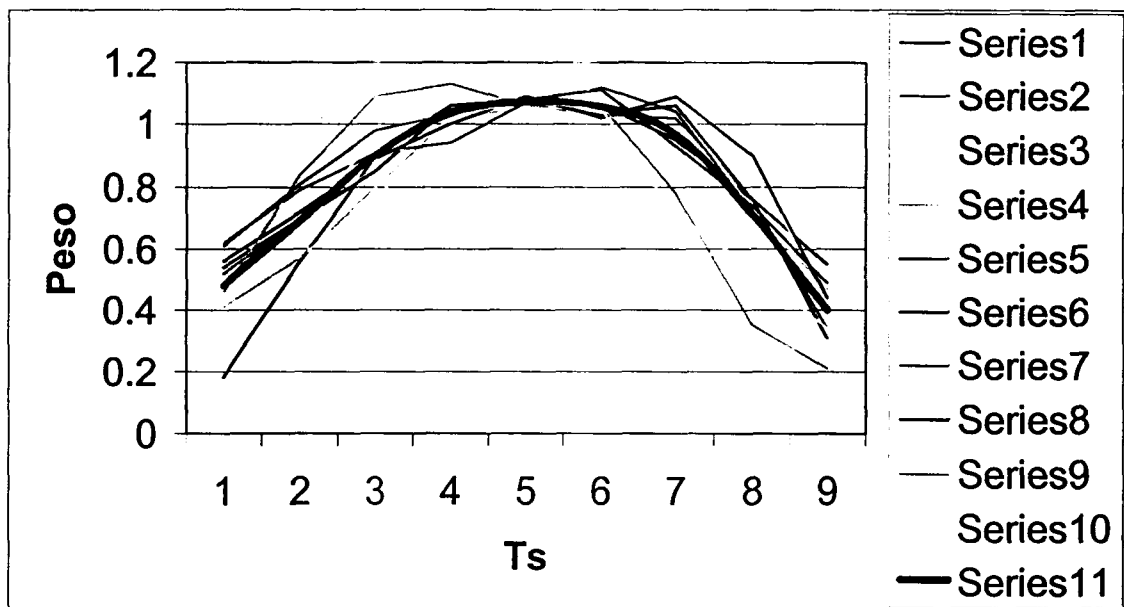


Figura 5.1. Respuesta real del sistema.

En esta figura se puede apreciar la respuesta del sistema para cada uno de los diez experimentos (Series de la 1 a la 10, líneas delgadas en la gráfica) así como el promedio de los mismos (Serie 11. serie gruesa en la gráfica). Es posible observar en la gráfica de peso el efecto de las dos áreas de influencia tal y como se supuso en las simulaciones del Capítulo IV.

## 5.2 Obtención de la ecuación de diferencias.

Para poder calcular la ecuación de diferencias con la cual se determinará el peso estático del material que entre al sistema durante un tiempo definido, fue necesario realizar algunas actividades, tales como determinar el número de muestras por segundo y encontrar la respuesta del sistema a un escalón como entrada.

Para encontrar el número de muestras por segundo tomadas por el sistema se midió la cantidad de veces por segundo que el ADC genera una interrupción en el microcontrolador, para avisar que tiene lista una conversión, lo cual se realizó con la ayuda de un osciloscopio. De este modo se encontró que se toman 6.25 muestras por segundo. La longitud de las tres secciones de interés en la banda es de 90 cm y ésta tarda un tiempo de 1.4 segundos en recorrer esta distancia, por lo tanto, el número de muestras tomadas en este periodo de tiempo es de 8.75.

El siguiente paso consistió en obtener la respuesta del sistema al tener como entrada un escalón. Para poder realizar físicamente lo anterior, se utilizó como entrada una cadena metálica con distribución uniforme y se buscó que fuera lo suficientemente larga como para generar un flujo constante a la entrada del sistema, durante el tiempo que fuera a durar la prueba. Para determinar la amplitud del escalón con el cual se identifico el sistema se realizo el siguiente procedimiento: La cadena metálica que se utilizó como entrada tiene una longitud de 2.08 m y un peso de 3.56 Kg. Debido a que el sistema toma aproximadamente 9 muestras en los 90 cm de longitud de las áreas de influencia, entonces para la cadena de 2.08 m de longitud se toman 20.8 muestras. Si se divide el peso de la cadena entre el número de muestras, se obtiene que por cada tiempo de muestreo se registran 0.1711538 Kg. lo cual equivale a la amplitud del escalón. En la Tabla 5.1 se presentan las lecturas de peso obtenidas al introducir como entrada la cadena:

muestra	Peso (Kg)
0	0.268
1	0.459
2	0.590
3	0.669
4	0.756
5	0.816
6	0.890
7	0.865
8	0.837
9	0.921
10	1.027
11	1.027

12	1.027
.	.
.	.
N	1.027

Tabla 5.1. Lecturas de peso de la cadena.

Una vez que se obtuvieron las lecturas para la entrada del sistema y el tiempo de muestreo, fue posible encontrar la ecuación de diferencias al igual que se realizó en el capítulo anterior, para lo cual se realizó el siguiente procedimiento:

Utilizando la amplitud del escalón encontrada previamente, se define como entrada a:

$$R(Z) = 0.1711538 \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Mediante las lecturas de peso de la cadena, las cuales fueron registradas anteriormente (ver Tabla 5.1), se obtuvo la salida del sistema tal y como se muestra a continuación:

$$Y(Z) = 0.268Z^{-1} + 0.459Z^{-2} + 0.59Z^{-3} + 0.669Z^{-4} + 0.756Z^{-5} + 0.816Z^{-6} + 0.89Z^{-7} \\ + 0.865Z^{-8} + 0.837Z^{-9} + 0.837Z^{-9} + 0.921Z^{-10} + 1 - 0.27Z^{-11} \frac{1}{1-Z^{-1}}$$

Ambas se pueden relacionar de la siguiente forma:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} \\ H(Z) = \frac{0.268}{0.1711538} Z^{-1}(1-Z^{-1}) + \frac{0.459}{0.1711538} Z^{-2}(1-Z^{-1}) + \frac{0.59}{0.1711538} Z^{-3}(1-Z^{-1}) \\ + \frac{0.669}{0.1711538} Z^{-4}(1-Z^{-1}) + \frac{0.756}{0.1711538} Z^{-5}(1-Z^{-1}) + \frac{0.816}{0.1711538} Z^{-6}(1-Z^{-1}) \\ + \frac{0.89}{0.1711538} Z^{-7}(1-Z^{-1}) + \frac{0.865}{0.1711538} Z^{-8}(1-Z^{-1}) + \frac{0.837}{0.1711538} Z^{-9}(1-Z^{-1}) \\ + \frac{0.921}{0.1711538} Z^{-10}(1-Z^{-1}) + \frac{1.027}{0.1711538} Z^{-11} \frac{1-Z^{-1}}{1-Z^{-1}}$$

donde H(Z) corresponde al modelo del sistema.

Desarrollando la expresión anterior y despejando para R(Z) (véase desarrollo Anexo I c) se tiene:

$$\begin{aligned}
R(Z) = & 0.638633582Z^{+1}Y(Z) - 0.712686567Z^{-1}R(Z) - 0.48880597Z^{-2}R(Z) \\
& - 0.294776119Z^{-3}R(Z) - 0.324626865Z^{-4}R(Z) - 0.223880597Z^{-5}R(Z) \\
& - 0.276119403Z^{-6}R(Z) + 0.093283582Z^{-7}R(Z) + 0.104477611Z^{-8}R(Z) \\
& - 0.313432835Z^{-9}R(Z) - 0.395522388Z^{-10}R(Z)
\end{aligned}$$

Aplicando transformada Z inversa se obtiene  $r_n$ :

$$\begin{aligned}
r_n = & 0.638633582y_{n+1} - 0.712686567r_{n-1} - 0.48880597r_{n-2} - 0.294776119r_{n-3} \\
& - 0.324626865r_{n-4} - 0.223880597r_{n-5} - 0.276119403r_{n-6} + 0.093283582r_{n-7} \\
& + 0.104477611r_{n-8} - 0.313432835r_{n-9} - 0.395522388r_{n-10}
\end{aligned}$$

Como ya se menciona en el capítulo anterior, una vez encontrado  $r_n$ , es posible calcular para cada tiempo de muestreo la entrada real del sistema. El acumulado de todos los valores obtenidos por la ecuación anterior ( $r_0+r_1+r_2+\dots+r_m$ ) dará como resultado la cantidad de peso que paso por el sistema durante un periodo definido de tiempo.

### 5.3 Implementación y experimentos realizados

Como se mencionó una vez construido el sistema de pesaje (en su parte electrónica y mecánica las cuales se describen con detalle en el Apéndice IV), se pudieron comprobar que las consideraciones tomadas en el Capítulo 4 fueron las correctas, pero además se observaron algunos efectos que no habían sido tomados en cuenta. A continuación se hace una breve descripción de los dos obstáculos que se presentaron al experimentar con el prototipo y el como se solucionaron:

- El primer inconveniente que se presentó fue una gran cantidad de ruido en las lecturas de peso registradas por el sistema, debido al movimiento de la banda. Lo cual era notorio especialmente cuando la banda se encontraba vacía y en movimiento, ya que se registraban constantemente componentes de peso negativas.
- Un segundo obstáculo fue el efecto que se tiene debido a la grapa que sujeta a la banda sintética, ya que cada vez que ésta pasa por las secciones de la báscula se introduce una componente de peso no deseada, con un valor pico de aproximadamente 400 gr.

Para eliminar las componentes de ruido en las lecturas de peso, se implementó en el software del sistema un filtro digital. Se trabajó con un filtro Bessel de segundo orden y se probó con distintas frecuencias de corte tales como 0.5Hz, 0.1Hz y 0.05 Hz, siendo esta última la que dio los mejores resultados tomando en cuenta la eliminación de ruido y la rapidez del sistema. El Anexo VI presenta el diseño de los tres filtros con lo que se trabajó. La ecuación de diferencias obtenida para el filtro Bessel de segundo orden con frecuencia de corte de 0.05 Hz y tomando un tiempo de muestreo de 6.25, se presenta a continuación:

$$w_n = 1.852w_{n-1} - 0.859w_{n-2} + 0.00175x_n + 0.0035x_{n-1} + 0.00175x_{n-2}$$

donde  $x_n$  y  $w_n$  son la entrada y la salida del filtro respectivamente. La Figura 5.2 muestra el funcionamiento del filtro digital:

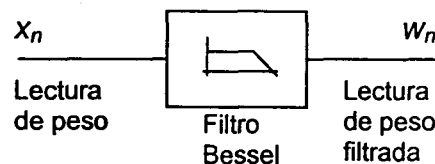


Figura 5.2. Eliminación de ruido mediante filtro de 2° orden.

Al implementar el filtro se pudieron eliminar casi por completo las componentes de peso negativas que se presentaban cuando la banda se encontraba vacía.

Una vez eliminado este problema se pudo implementar la ecuación de diferencias para  $r_n$  encontrada en la sección anterior. Como ya se ha mencionado, el valor de  $r_n$  proporciona el valor de la entrada al sistema para cada tiempo de muestreo, pero el objetivo del trabajo es el de conocer la cantidad de material en kilogramos que entro al sistema en un periodo definido de tiempo; por lo cual se vuelve necesario acumular los valores de  $r_n$ . El tiempo seleccionado para hacer las pruebas se eligió de un minuto, debido principalmente a las limitaciones físicas para realizar los experimentos. Entre estas limitantes encontramos que es difícil mantener un flujo de material en la banda por un periodo mayor de tiempo, debido a la gran cantidad de material que sería necesario tener para prolongar la duración de las pruebas. Los experimentos se realizaron con aproximadamente 20 Kg. de laminillas metálicas.

Para eliminar el problema de la componente de peso introducida por la grapa que sujeta a la banda, se observó el comportamiento de la ecuación de diferencias cuando no se tenía ninguna entrada en el sistema (banda vacía). Se realizaron cinco pruebas con duración de un minuto, la Tabla 5.2 muestra el acumulado de  $r_n$  para cada una de ellas. Con esta información se pudo calcular el promedio de la sumatoria de  $r_n$  el cual es igual a 2.416 Kg. Lo cual indica que si se realiza un experimento con carga en la banda durante un minuto, será necesario restarle al acumulado de  $r_n$  la cantidad de 2.46 Kg. debido a la

componente de peso no desea que se introdujo al sistema debido a la grapa que sujeta la banda transportadora.

Prueba	$\Sigma r_n$ (Kg.)
1	2.23
2	2.59
3	2.48
4	2.36
5	2.42

Tabla 5.2 Acumulado de  $r_n$  para banda sin carga.

Si se desea implementar el sistema de pesaje en otra banda transportadora, este procedimiento es valido, solo que el acumulado de  $r_n$  para la banda sin carga cambiará, ya que es posible que no se tenga ninguna grapa en la banda o que se encuentre más de una. Por lo cual es conveniente dejar este parámetro variable en el sistema, el cual se definirá como “Peso de banda por minuto”. Así será posible especificar su valor para cada banda transportadora en particular, solo será necesario realizar el mismo procedimiento para encontrarlo.

Por otra parte, también es conveniente agregar un factor variable para ajustar el valor del acumulado de  $r_n$  en caso de ser necesario, el cual se definirá como “Peso dinámico por Kg.”. El ajuste de estos dos parámetros lo llamaremos “Calibración dinámica del sistema”. Si se consideran estos dos parámetros variables el peso total al finalizar un experimento sería calculado en base a:

$$\text{Peso acumulado} = \frac{\sum r_n - P. \text{ de banda por minuto}}{P. \text{ dinámico por Kg.}}$$

Para el caso del prototipo el “Peso dinámico por kilogramo” se definió con un valor de 1, mientras que el “Peso de la banda por minuto” se definió como 2.416.

Para corroborar el funcionamiento del sistema se realizaron varias pruebas con cantidades previamente conocidas de 10 Kg. y de 19.96 Kg. Como se menciono anteriormente la duración de cada uno de estos experimentos fue de un minuto. Los resultados de estas pruebas se presentan en la Tabla 5.3. En esta tabla se puede observar como el porcentaje de error se mantiene dentro del  $\pm 10\%$ , por lo cual éste se encuentra dentro del rango de error tolerado.

Prueba	Peso acum. (10 Kg.)	%error	Peso acum.. (19.96 Kg.)	%error
1	9.22	-7.8	18.50	-7.3
2	9.09	-9.1	19.10	-4.3
3	9.86	-1.4	18.95	-5.1
4	9.03	-9.7	18.63	-6.7
5	9.27	-7.3	20.13	0.9

Tabla 5.3 Resultados de experimentos.

## 5.4 Conclusiones

Analizando los resultados obtenidos después de realizar los experimentos se observa que:

- Las suposiciones realizadas al inicio de la tesis para diseñar los algoritmos fueron las correctas, por lo que los resultados de los experimentos reales fueron cercanos a los obtenidos durante las simulaciones. Por el hecho de haber llevado a cabo esta estrategia se pudo trabajar con el modelo del sistema y realizar los algoritmos sin la necesidad de contar con el prototipo desde el inicio del proyecto.
- Como se aprecia en la Tabla 5.3 los valores acumulados de peso se encuentran dentro de la tolerancia máxima permitida, pero por otra parte se observa que dichos resultados no son del todo repetitivos. En el siguiente capítulo se presentan una serie de aspectos mecánicos y electrónicos que se podrían mejorar para reducir el porcentaje de error y aumentar el grado de repetitividad.
- Los resultados obtenidos pueden verse afectados por la duración de las pruebas, la cuales son demasiado cortas, pero que debido a las limitaciones físicas del prototipo y el lugar en donde se llevaron a cabo, no se pudieron extender por un tiempo más prolongado.
- Otro factor que puede afectar estos resultados es la poca cantidad material con la cual se realizaron los experimentos, ya que probablemente en bandas de mayor capacidad, los efectos del ruido y las grapas sujetadoras sean despreciables. Es decir que unos cuantos cientos de kilogramos introducidos por estos dos factores no afectarían significativamente el cálculo del peso acumulado cuando se tiene un flujo de cientos de toneladas por hora.

# Capítulo 6

## 6. Conclusiones

Se desarrollo un sistema de pesaje dinámico con el objetivo de medir la cantidad de material que circula por una banda transportadora, durante un tiempo determinado y se lograron obtener resultados con un error menor al  $\pm 10\%$ . Se propusieron dos algoritmos, los cuales se probaron a nivel simulación computacional y ambos dieron resultados satisfactorios. Como ya se menciona con anterioridad el algoritmo implementado en el prototipo, el cual utiliza el método identificación por respuesta al escalón, es capaz de calcular de una manera sencilla el peso estático del material que se encuentra en circulación por la banda. Al final del capítulo anterior se pueden ver los resultados obtenidos en las pruebas realizadas, los cuales cumplen las expectativas de este trabajo, pero que sin lugar a dudas pueden ser mejores si se trabaja en algunos aspectos mecánicos y electrónicos como se propone en la siguiente sección.

### 6.1 Trabajos futuros

Cabe mencionar que es posible reducir el porcentaje de error hasta dejarlo en un  $\pm 2.5\%$ , para lo cual se deben mejorar una serie de aspectos mecánicos y electrónicos, los cuales se proponen a continuación para futuros trabajos dentro del área.

Factores que afectan al sistema de pesaje:

- Alineación de la banda.
- Aplicación de cargas perpendiculares.
- Cargas no permanentes.
- Tensión de la banda.
- Tipos de unión.
- Vibración.
- Error de excentricidad en la báscula.
- Determinación del tiempo del tiempo de trabajo.
- Velocidad variable de la banda.



## **Propuestas para reducir el error del sistema:**

### ***Alineación de la banda.***

Cuando la banda no se encuentra alineada en forma correcta es posible que exista fricción entre ésta y los soportes, lo cual reduce su vida útil y puede en determinado momento provocar cargas no axiales sobre la báscula, además de generar ruido en las lecturas de peso. Para evitar la desalineación de la banda se debe de realizar un ajuste por medio de los tensores de la báscula.

### ***Aplicación de cargas perpendiculares.***

La descarga de material sobre la banda transportadora nunca debe de hacerse en forma perpendicular para evitar el ruido en las lecturas de peso. De preferencia la descarga debe de realizarse a una distancia considerable de la báscula para evitar que la vibración se introduzca en el sistema de pesaje.

### **Cargas no permanentes.**

La aplicación no continua de carga sobre la banda trae como consecuencia que el algoritmo de predicción de peso trabaje en forma incorrecta debido a que se evalúan transitorios y nunca se llega a un estado regularmente estable. Esto se puede lograr de manera práctica ya que por lo general se manipula un poco la distribución del material que va por la banda antes de transportarlo. Por citar un caso cuando se trabaja con material que contiene terrones y finos, estos se separan por medio de cribas para formar una capa de acolchonamiento a los terrones, por lo cual es posible lograr un flujo continuo de material sobre la banda.

### ***Tensión en la banda.***

Cuando se tiene una tensión excesiva o casi nula en la banda se puede hacer que el comportamiento de las áreas de influencia sea distinto al considerado en este trabajo, lo cual solo provocará que el algoritmo presentado no funcione adecuadamente. Para lograr el efecto adecuado en la banda se recomienda que la báscula se monte a una distancia equidistante entre una sección de rodillos y que por lo menos diez secciones de rodillos hacia ambos extremos de la báscula no presenten desnivel.

### ***Tipos de unión.***

Existen dos tipos de unión los cuales son la mecanizada (grapas) y la vulcanizada. En caso de tener una unión mecanizada se tienen efectos en las lecturas de peso debido a la fricción de la grapa con la sección de báscula por lo cual se tienen que hacer compensaciones en el software como en este trabajo. En cambio cuando se cuenta con una unión vulcanizada se puede considerar a la banda entera como un solo elemento y evitar el efecto indeseado de peso.

### ***Vibración.***

Cuando se tienen vibraciones debido a motores o al mismo sistema mecánico de la banda se tienen componentes de peso no deseadas en la báscula, las cuales es necesario eliminar. Esto se puede lograr de varias formas pero lo más adecuado es implementar un filtro digital en la báscula. Lo más delicado de esta tarea es seleccionar el orden y la frecuencia de corte apropiada del filtro para lograr que el sistema no sea lento y a la vez elimine la mayor parte de las componentes de frecuencia no deseadas. Esta tarea se debe realizar para cada banda en particular en donde se desee montar el sistema de pesaje.

### ***Error de excentricidad en la báscula.***

Para la implementación de este trabajo se utilizó una sola celda de carga, lo cual puede arrojar pequeños errores de excentricidad y afectar las lecturas de peso de la báscula. Para reducir este efecto se podría manejar al menos otra celda de carga y evitar con ello las lecturas erróneas del sistema.

### ***Determinación del tiempo de trabajo.***

Al realizar la implementación de este sistema se realizaron pruebas por intervalos preestablecidos de tiempo. Además para iniciar el procesamiento de los datos es necesario indicar el inicio y fin del tiempo de trabajo. Se tendría una mejora significativa en los resultados si se tuviera la capacidad de manejar un reloj de tiempo real con el cual se pudiera medir el tiempo exacto de trabajo.

### ***Velocidad variable de la banda.***

En este trabajo se asumió siempre una velocidad constante de la banda, lo cual puede llegar a ser impráctico en la realidad, debido a la variación natural de la velocidad debido a varios factores tales como la cantidad de material que se transporta, variaciones en el voltaje de alimentación del motor, efectos de la

tensión de la banda, etc. Por lo cual se vuelve imprescindible la capacidad de contar las revoluciones de la banda con un encoder y por medio del reloj de tiempo real calcular la velocidad de la banda, con la cual se pueden realizar las compensaciones adecuadas al sistema.

# Anexo I

## Desarrollo de ecuaciones

a. Desarrollo de  $H(Z)$  para el modelo sin áreas de influencia.

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = \frac{\frac{Z}{(Z+1)^2} - Z^{-N} \frac{Z}{(Z+1)^2}}{\frac{Z}{(Z-1)}}$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = \frac{\frac{Z - Z^{-N+1}}{(Z+1)^2}}{\frac{Z}{(Z-1)}}$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = \frac{(Z - Z^{-N+1})(Z-1)}{Z(Z+1)^2}$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = \frac{Z - Z^{-N+1}}{Z^2 - Z}$$

Despejando para  $R(Z)$ :

$$Y(Z)(Z^2 - Z) = (Z - Z^{-N+1})R(Z)$$

$$Z^2Y(Z) - ZY(Z) = ZR(Z) - Z^{-N+1}R(Z)$$

$$ZY(Z) - Y(Z) = R(Z) - Z^{-N}R(Z)$$

$$R(Z) = ZY(Z) - Y(Z) + Z^{-N}R(Z)$$

b. Desarrollo de  $H(Z)$  para el modelo con áreas de influencia.

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = 0.25Z^{-1}(1-Z^{-1}) + 0.75Z^{-2}(1-Z^{-1}) + 1.5Z^{-3}(1-Z^{-1}) + 2.5Z^{-4}(1-Z^{-1}) \\ + 3.5Z^{-5}(1-Z^{-1}) + 4.5Z^{-6}(1-Z^{-1}) + 5.5Z^{-7}(1-Z^{-1}) + 6.5Z^{-8}(1-Z^{-1}) \\ + 7.25Z^{-9}(1-Z^{-1}) + 7.75Z^{-10}(1-Z^{-1}) + 8Z^{-11}$$

desarrollando la expresión anterior obtenemos:

$$= 0.25Z^{-1} - 0.25Z^{-2} + 0.75Z^{-2} - 0.75Z^{-3} + 1.5Z^{-3} - 1.5Z^{-4} + 2.5Z^{-4} - 2.5Z^{-5} \\ + 3.5Z^{-5} - 3.5Z^{-6} + 4.5Z^{-6} - 4.5Z^{-7} + 5.5Z^{-7} - 5.5Z^{-8} + 6.5Z^{-8} - 6.5Z^{-9} \\ + 7.25Z^{-9} - 7.25Z^{-10} + 7.75Z^{-10} - 7.75Z^{-11} + 8Z^{-11}$$

despejando para  $Y(Z)$  se tiene:

$$Y(Z) = 0.25Z^{-1}R(Z) + 0.5Z^{-2}R(Z) + 0.75Z^{-3}R(Z) + Z^{-4}R(Z) + Z^{-5}R(Z) + Z^{-6}R(Z) \\ + Z^{-7}R(Z) + Z^{-8}R(Z) + 0.75Z^{-9}R(Z) + 0.5Z^{-10}R(Z) + 0.25Z^{-11}R(Z)$$

multiplicando ambos extremos de la ecuación por  $Z$ :

$$ZY(Z) = 0.25R(Z) + 0.5Z^{-1}R(Z) + 0.75Z^{-2}R(Z) + Z^{-3}R(Z) + Z^{-4}R(Z) + Z^{-5}R(Z) \\ + Z^{-6}R(Z) + Z^{-7}R(Z) + 0.75Z^{-8}R(Z) + 0.5Z^{-9}R(Z) + 0.25Z^{-10}R(Z)$$

c. Desarrollo de H(Z) para el modelo real.

$$\begin{aligned}
 H(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = & \frac{0.268}{0.1711538} Z^{-1}(1-Z^{-1}) + \frac{0.459}{0.1711538} Z^{-2}(1-Z^{-1}) + \frac{0.59}{0.1711538} Z^{-3}(1-Z^{-1}) \\
 & + \frac{0.669}{0.1711538} Z^{-4}(1-Z^{-1}) + \frac{0.756}{0.1711538} Z^{-5}(1-Z^{-1}) + \frac{0.816}{0.1711538} Z^{-6}(1-Z^{-1}) \\
 & + \frac{0.89}{0.1711538} Z^{-7}(1-Z^{-1}) + \frac{0.865}{0.1711538} Z^{-8}(1-Z^{-1}) + \frac{0.837}{0.1711538} Z^{-9}(1-Z^{-1}) \\
 & + \frac{0.921}{0.1711538} Z^{-10}(1-Z^{-1}) + \frac{1.027}{0.1711538} Z^{-11} \frac{1-Z^{-1}}{1-Z^{-1}}
 \end{aligned}$$

desarrollando la expresión anterior y despejando para Y(Z) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 Y(Z) = & \frac{0.268}{0.1711538} Z^{-1}R(Z) + \frac{0.191}{0.1711538} Z^{-2}R(Z) + \frac{0.131}{0.1711538} Z^{-3}R(Z) \\
 & + \frac{0.079}{0.1711538} Z^{-4}R(Z) + \frac{0.087}{0.1711538} Z^{-5}R(Z) + \frac{0.06}{0.1711538} Z^{-6}R(Z) \\
 & + \frac{0.074}{0.1711538} Z^{-7}R(Z) - \frac{0.025}{0.1711538} Z^{-8}R(Z) - \frac{0.028}{0.1711538} Z^{-9}R(Z) \\
 & + \frac{0.084}{0.1711538} Z^{-10}R(Z) + \frac{0.106}{0.1711538} Z^{-11}R(Z)
 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos extremos de la ecuación por Z y despejando para R(Z):

$$\begin{aligned}
 R(Z) = & \frac{0.1711538}{0.268} Z^{+1}Y(Z) - \frac{0.191}{0.268} Z^{-1}R(Z) - \frac{0.131}{0.268} Z^{-2}R(Z) \\
 & - \frac{0.079}{0.268} Z^{-3}R(Z) - \frac{0.087}{0.268} Z^{-4}R(Z) - \frac{0.06}{0.268} Z^{-5}R(Z) \\
 & - \frac{0.074}{0.268} Z^{-6}R(Z) + \frac{0.025}{0.268} Z^{-7}R(Z) + \frac{0.028}{0.268} Z^{-8}R(Z) \\
 & - \frac{0.084}{0.268} Z^{-9}R(Z) - \frac{0.106}{0.268} Z^{-10}R(Z)
 \end{aligned}$$

# Anexo II

## Simulaciones

### Ejercicio 3

Se tienen 5 cargas puntuales  $\delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \delta(t-3T) + \delta(t-4T)$  pasando a través del sistema. Dichas cargas se encuentran separadas por un tiempo de muestreo  $T$ . La Figura 1(a) muestra la salida  $Y_n$ .

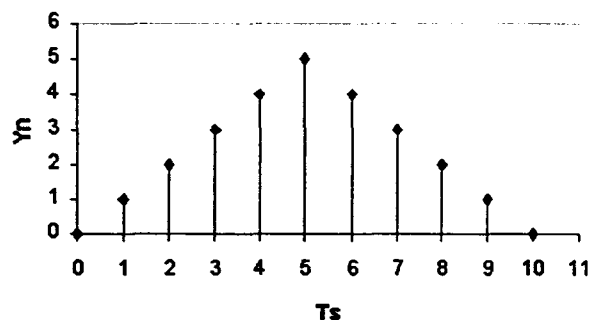


Figura 1(a)

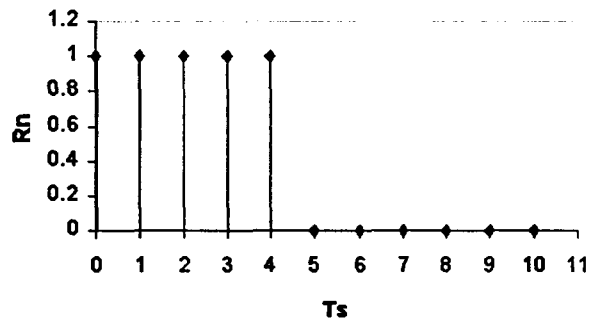


Figura 1(b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 1(b). La suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  es igual a 5, que significa que la entrada al sistema se trató de cinco cargas unitarias.

### Ejercicio 4

Se aplicó una carga puntual  $5\delta(t)$  como entrada al sistema, la cual generó una salida  $Y_n$  Figura 2(a).

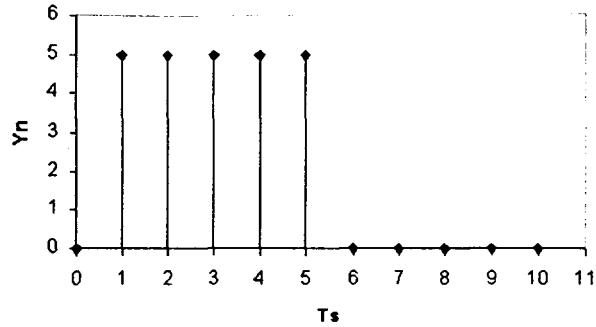


Figura 2(a)

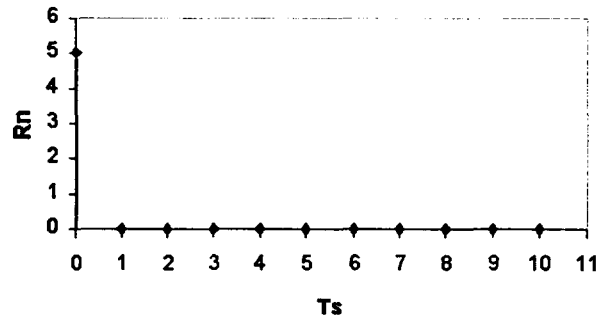


Figura 2(b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 2(b). La suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  es igual a 5, que significa que la entrada al sistema se trata de una carga puntual de cinco.

### Ejercicio 5

Se aplicaron dos cargas puntuales  $5\delta(t) + \delta(t - T)$  como entrada al sistema, la cual generó una salida  $Y_n$  Figura 3(a).

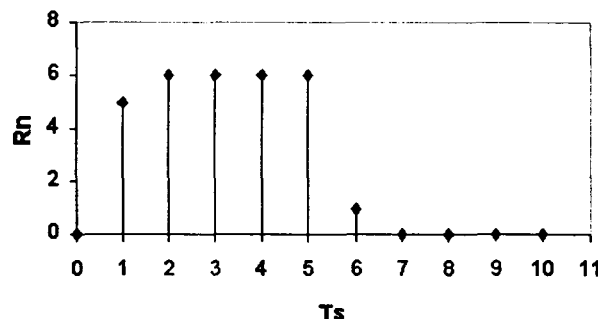


Figura 3(a)



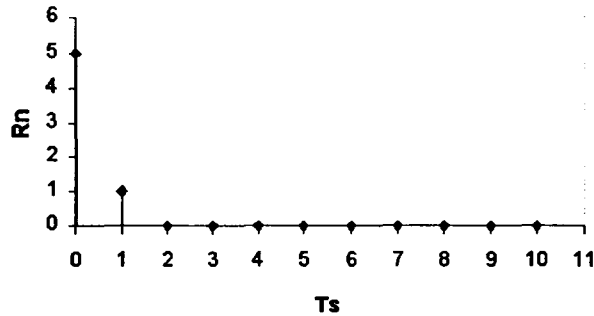


Figura 3(b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 3(b). La suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  es igual a 6.

### Ejercicio 6

Se aplicaron cinco cargas puntuales como entrada al sistema  $5\delta(t) + \delta(t - T) + 3\delta(t - 2T) + 2\delta(t - 3T) + 4\delta(t - 4T)$ , la cual genero una salida  $Y_n$  Figura 4(a).

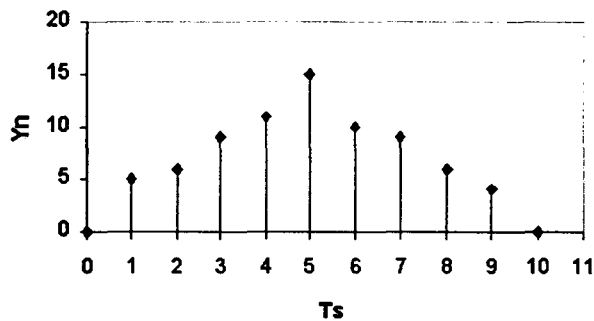


Figura 4(a)

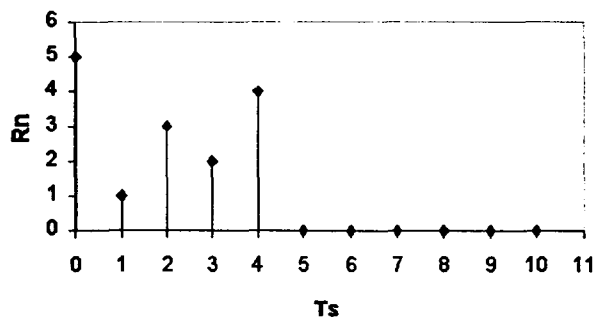


Figura 4(b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 4(b). El resultado es la suma de  $r_0+r_1+\dots+r_{10}$  el cual es igual a 15.

### Ejercicio 7

Se aplicaron dos cargas puntuales como entrada al sistema  $5\delta(t) + \delta(t - 3T)$ , la cual generó una salida  $Y_n$  Figura 5(a).

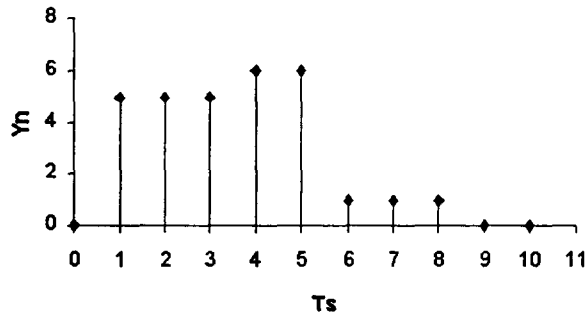


Figura 5(a)

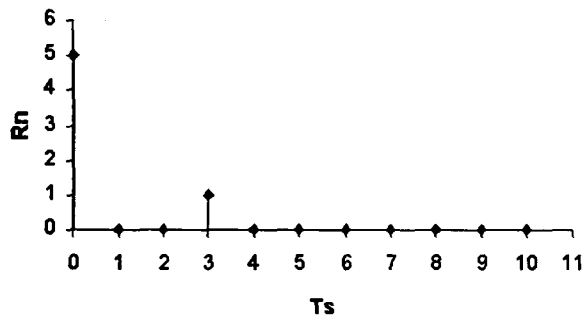


Figura 5(b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 5(b). El resultado es la suma de  $r_0 + r_1 + \dots + r_{10}$  el cual es igual a 6.

### Ejercicio 8

Se aplicaron cinco cargas puntuales como entrada al sistema  $5\delta(t) + \delta(t - 2T) + 3\delta(t - 4T) + 2\delta(t - 6T) + 4\delta(t - 8T)$ , las cuales generaron una salida  $Y_n$  Figura 6(a).

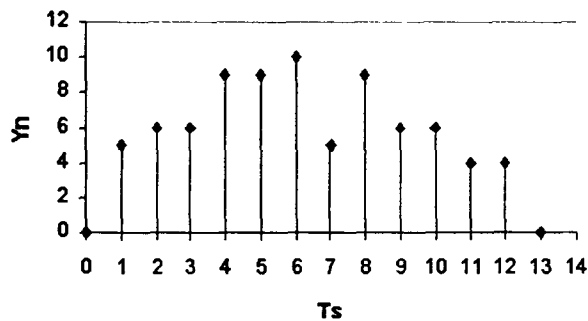


Figura 6(a)

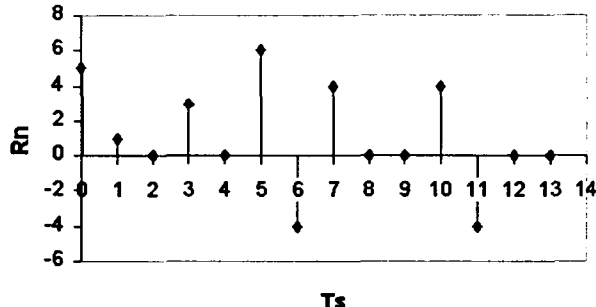


Figura 6(b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 6(b). El resultado es la suma de  $r_0+r_1+\dots+r_{10}$  el cual es igual a 15. Cabe señalar que para este caso, los valores de  $R_n$  calculados no son idénticos al orden en que entraron las cargas puntuales al sistema, pero el acumulado de  $R_n$  si corresponde a la cantidad de material que paso por la báscula.

Ejercicios 11 y 25

Dos cargas puntuales  $\delta(t)+10\delta(t-T)$  pasan a través del sistema, lo cual genera la salida  $Y_n$  Figura 7(a).

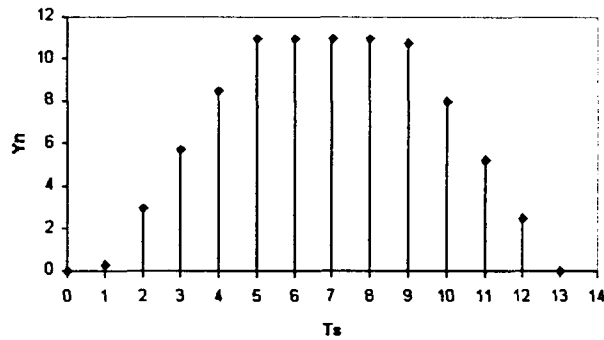


Figura 7(a)

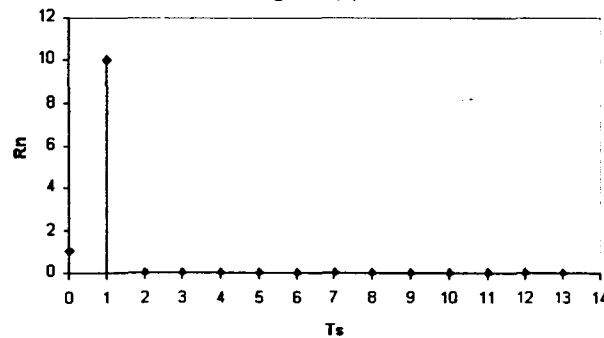


Figura 7(b)

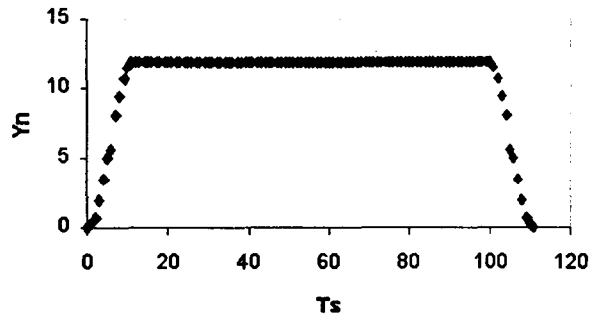


Figura 10 (b)

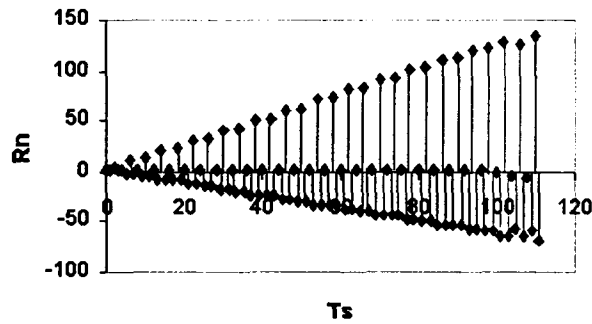


Figura 10(c)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 10(c). El resultado de la simulación es la suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  la cual es igual a ciento cincuenta. Como se puede de esta última figura, ahora los valores de  $R_n$  generados no corresponden ni en magnitud ni en orden ni a la entrada Figura 10(a), pero su valor acumulado si da como resultado el total de peso que entro al sistema.

### Ejercicio 17

Se tienen 5 cargas puntuales  $\delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \delta(t - 3T) + \delta(t - 4T)$  pasando a través del sistema. Dichas cargas se encuentran separadas por un tiempo de muestreo  $T$ . La Figura 11(a) muestra la salida  $Y_n$ .

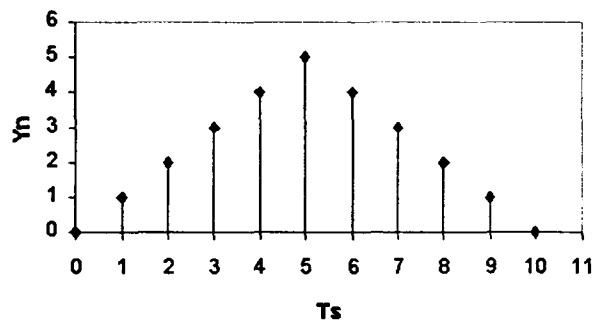


Figura 11 (a)

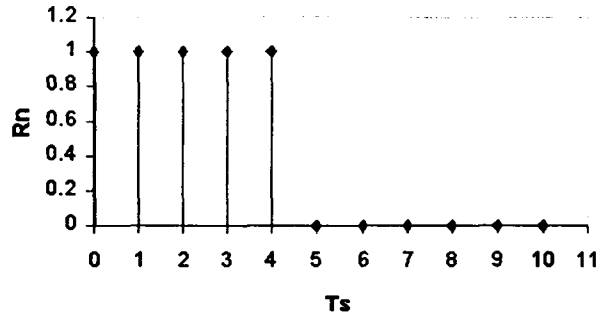


Figura 11 (b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 11(b). La suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  es igual a 5, que significa que la entrada al sistema se trato de cinco cargas unitarias.

### Ejercicio 18

Se aplico una carga puntual  $5\delta(t)$  como entrada al sistema, la cual generó una salida  $Y_n$  Figura 12(a).

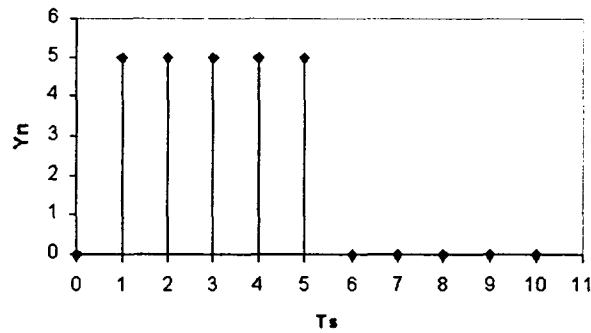


Figura 12 (a)

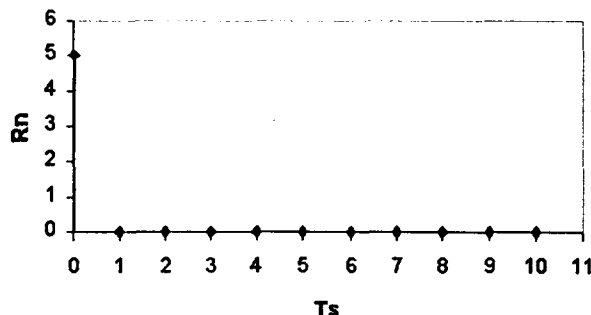


Figura 12 (b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 12(b). La suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  es igual a 5, que significa que la entrada al sistema se trato de una carga puntual de cinco.

### Ejercicio 19

Se aplicaron dos cargas puntuales  $5\delta(t) + \delta(t - T)$  como entrada al sistema, la cual genero una salida  $Y_n$  Figura 13(a).

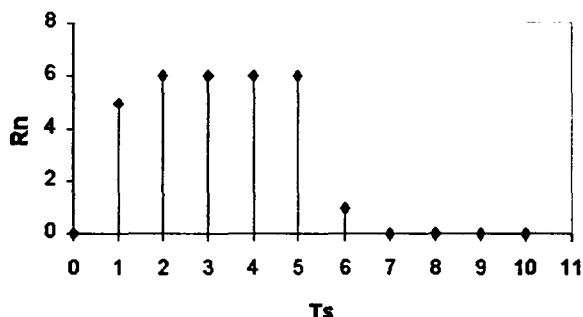


Figura 13(a)

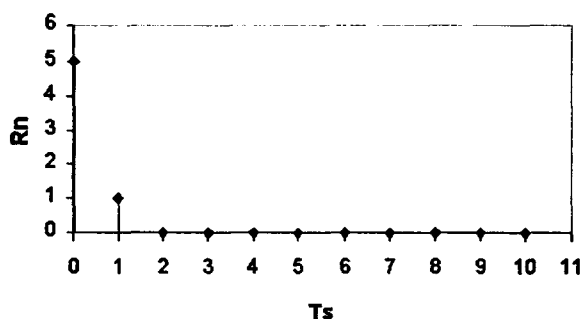


Figura 13(b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 13(b). La suma de  $r_0+r_1+r_2+\dots+r_{10}$  es igual a 6.

### Ejercicio 20

Se aplicaron cinco cargas puntuales como entrada al sistema  $5\delta(t) + \delta(t - T) + 3\delta(t - 2T) + 2\delta(t - 3T) + 4\delta(t - 4T)$ , la cual genero una salida  $Y_n$  Figura 14(a).

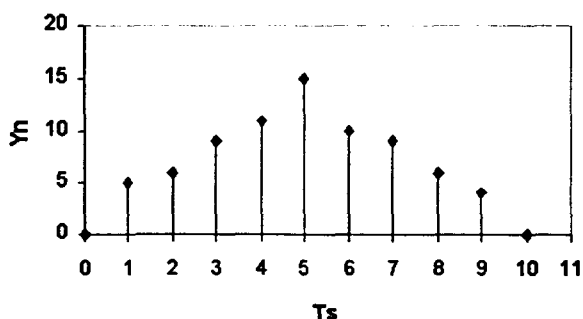


Figura 14(a)

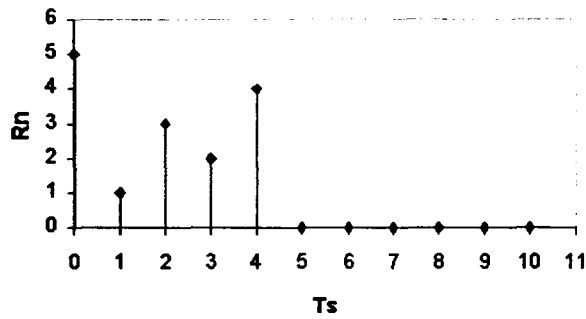


Figura 14(b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 14(b). El resultado es la suma de  $r_0+r_1+\dots+r_{10}$  el cual es igual a 15.

### Ejercicio 21

Se aplicaron dos cargas puntuales como entrada al sistema  $5\partial(t) + \partial(t - 3T)$ , la cual genero una salida  $Y_n$  Figura 15(a).

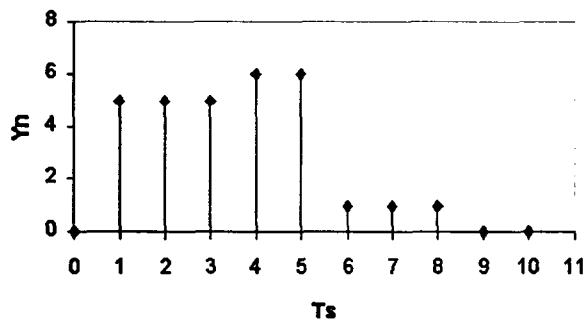


Figura 15(a)

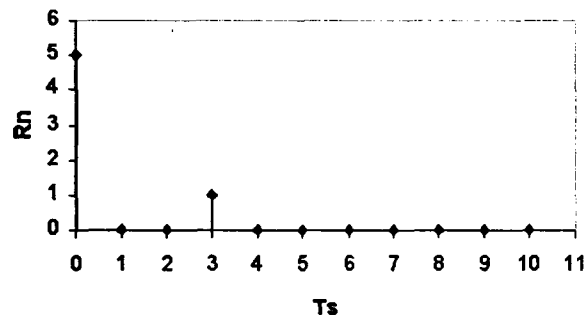


Figura 15(b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 15(b). El resultado es la suma de  $r_0+r_1+\dots+r_{10}$  el cual es igual a 6.

### Ejercicio 22

Se aplicaron cinco cargas puntuales como entrada al sistema  $5\delta(t) + \delta(t - 2T) + 3\delta(t - 4T) + 2\delta(t - 6T) + 4\delta(t - 8T)$ , las cuales generaron una salida  $Y_n$  Figura 16(a).

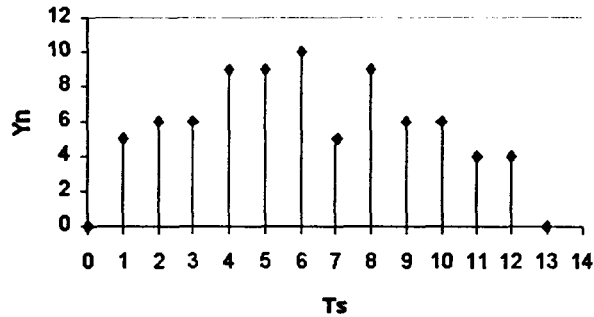


Figura 16(a)

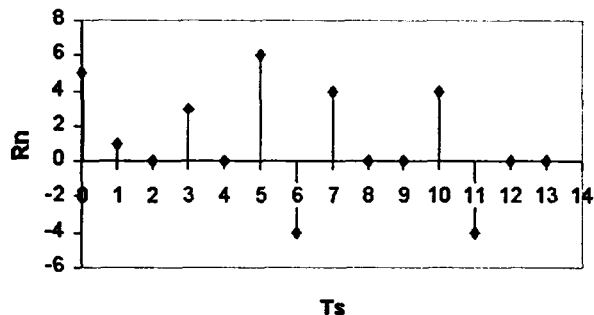


Figura 16(b)

Al aplicar los valores de  $Y_n$  como entrada a la ecuación de diferencias se obtiene como salida  $R_n$  Figura 16(b). El resultado es la suma de  $r_0 + r_1 + \dots + r_{10}$  el cual es igual a 15. Cabe señalar que para este caso, los valores de  $R_n$  calculados no son idénticos al orden en que entraron las cargas puntuales al sistema, pero el acumulado de  $R_n$  sí corresponde a la cantidad de material que paso por la báscula.



## Anexo III

### Discretización de una masa al pasar por el sistema de pesaje dinámico.

Para analizar el comportamiento de un sistema de pesaje continuo, es necesario tomar en consideración dos aspectos importantes:

1. La cantidad total de muestras que se toman para un cuerpo al pasar por el sistema depende de:

- a. La velocidad de la banda, la cual debe ser constante.
- b. El tiempo de muestreo del sistema.

Lo anterior es fácil de visualizar ya que si se tiene una masa "m" de longitud "L" y la velocidad de la banda cambia continuamente, el número de muestras tomadas durante su paso por la sección de báscula no será constante. Lo cual generará un error en el cálculo del peso estático. En la Figura 1 se puede visualizar un ejemplo donde la velocidad de la banda es constante, donde se toman cuatro muestras para el objeto "m" de longitud "L" mientras se encuentra sobre la báscula.

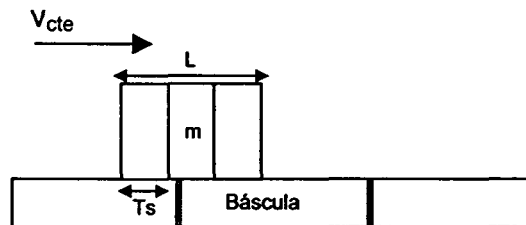


Figura 1. Velocidad constante.

En la Figura 2 se observa el caso en donde la velocidad de la banda es variable, lo cual provoca que el número de muestras total se modifique. En este caso se genera un gran problema ya que aunque el tiempo de muestreo permanece constante, se toma una muestra más. Aún tratándose de la misma masa "m", se puede interpretar como un cuerpo de longitud superior a "L".

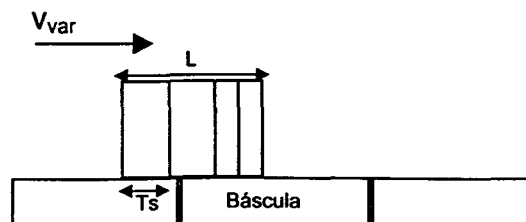


Figura 2. Velocidad variable.

2. La forma de los cuerpos que pueden entrar a un sistema de estas características es muy variada. Se puede tratar de cuerpos con distribuciones uniformes o no uniformes. Para los siguientes casos se supone una velocidad de la banda constante.

### Caso I. Distribución uniforme.

Se pueden distinguir tres casos durante el recorrido del objeto por el sistema. El primero de ellos se genera al entrar a la sección de la báscula, el segundo al permanecer dentro de la misma y el tercero al salir. Se generan 2 muestras para cada uno de los casos anteriores. Se asumirán incrementos del 50% para el peso durante el primer caso, en el segundo el peso permanece constante y en el tercero se asumen decrementos del 50%.

El efecto de discretizar una masa "m" con forma rectangular al pasar a través del sistema es el siguiente:

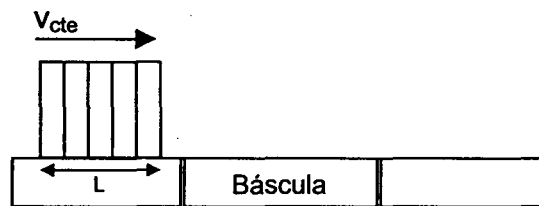


Figura 3. Cuerpo uniforme.

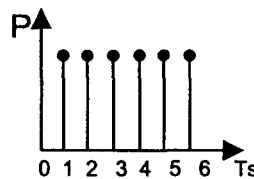


Figura 4. Discretización de un cuerpo uniforme.

el peso del objeto se distribuye a través de su área de apoyo, por lo cual:

$$P(Z) = \frac{P}{6}z^{-1} + \frac{P}{6}z^{-2} + \frac{P}{6}z^{-3} + \frac{P}{6}z^{-4} + \frac{P}{6}z^{-5} + \frac{P}{6}z^{-6}$$

## Caso II. Distribución no uniforme.

El efecto de discretizar una masa “m” con la forma ilustrada en la Figura 5 al pasar a través del sistema es el siguiente:

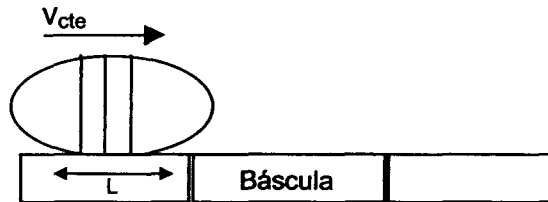


Figura 5. Cuerpo no uniforme.

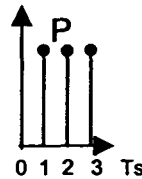


Figura 6. Discretización de un cuerpo no uniforme.

el peso del objeto se distribuye a través de su área de apoyo, por lo cual:

$$P(Z) = \frac{P}{3}z^{-1} + \frac{P}{3}z^{-2} + \frac{P}{3}z^{-3}$$

En este caso es posible observar que aún y cuando la longitud del cuerpo sigue siendo “L” como en el caso anterior, la distribución del peso sobre su superficie de apoyo es diferente, por lo cual el total del peso se reflejará solo en tres muestras.

El caso más general que se tiene en este tipo de sistemas de pesaje continuo es el de cuerpos no uniformes con distribución irregular, como se muestra en la Figura 7.

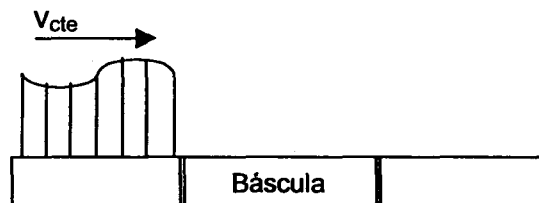


Figura 7. Cuerpo no uniforme con distribución irregular.

La Figura 8 muestra el resultado de muestrear a este cuerpo durante su paso por la báscula. En la Figura 9 se presenta otro caso distinto que presenta una

discretización idéntica a la de la Figura 7. Esto se debe a la resolución del sistema, ya que al sobrepasar el ancho de banda del sistema de pesaje es imposible detectar las diferencias entre ambos casos.

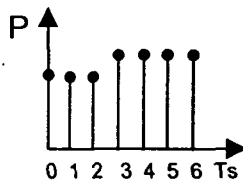


Figura 8. Discretización de un cuerpo no uniforme con distribución irregular.

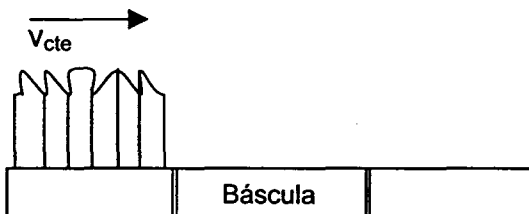


Figura 9. Cuerpo no uniforme con distribución irregular.

# Anexo IV

## Hardware del sistema de pesaje

### Descripción del sistema electrónico

La implementación del sistema de pesaje esta hecha en base a un microcontrolador de 8 bits y a un convertidor análogo digital de sobremuestreo de 20 bits. En la siguiente figura se muestra en forma de diagrama de bloques la conexión entre todos los dispositivos del sistema.

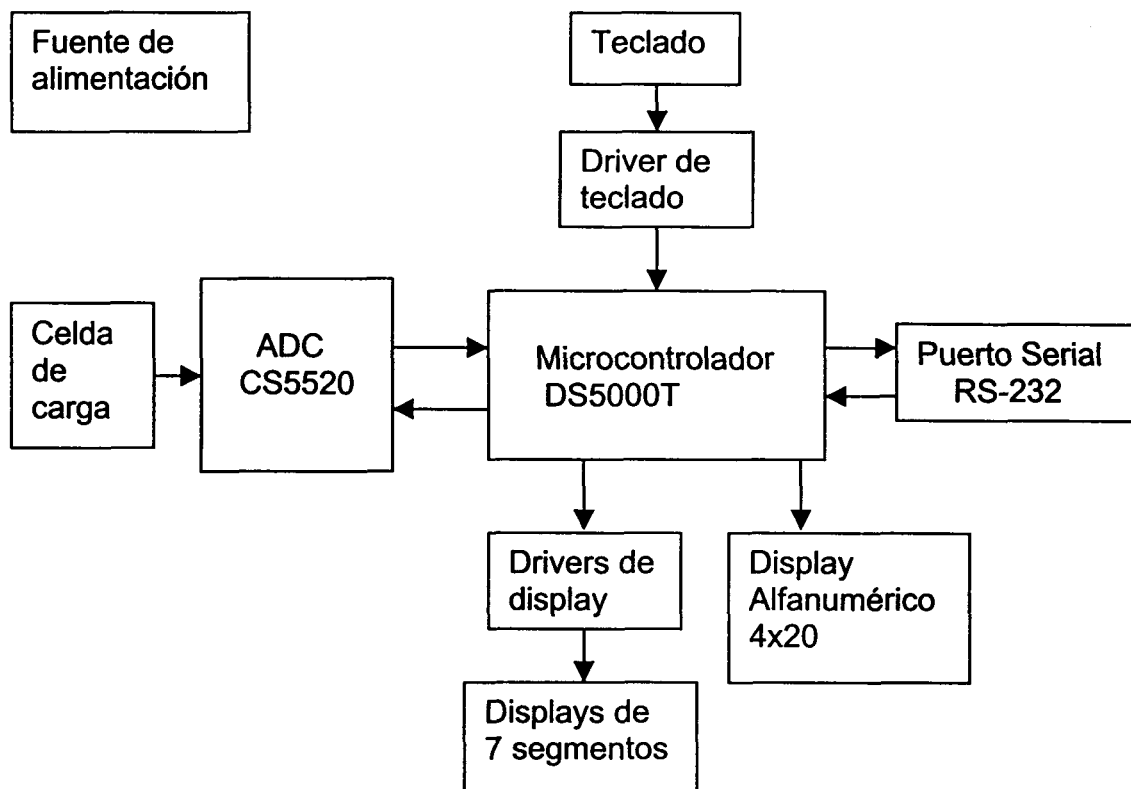


Figura 1.

### Microcontrolador

Se trata del DS5000T de Dallas Semiconductor, el cual esta basado en la arquitectura del 8051. Este cuenta con 256 bytes de memoria RAM interna, dos timers de 16 bits, un puerto serial y cuatro puertos de I/O de 8 bits. Además cuenta con algunas características extras a la versión original como 32KB de memoria RAM externa no volátil, la cual puede ser repartida entre memoria de código y

memoria de datos. La información almacenada en esta memoria puede ser retenida durante 10 años en ausencia de voltaje de alimentación. Entre otras características cuenta con un reloj de tiempo real y un watchdog.

### **Convertidor análogo digital**

Se trata del CS5520 el cual es un convertidor análogo digital de sobremuestreo fabricado por Cristal, diseñado especialmente para trabajar con señales de bajo nivel como lo son las celdas de carga, galgas extensiométricas y transductores de presión. Debido a que este dispositivo cuenta con un amplificador de ganancia programable por software, no es necesario tener un amplificador de instrumentación externo [10], lo cual hace posible acondicionar la salida de las celdas de carga de una manera sencilla. Este convertidor utiliza modulación delta-sigma y cuenta con una resolución de 20 bits. Este dispositivo incluye su propia calibración para eliminar el offset y los errores de ganancia del canal de entrada.[11]

### **Celda de carga**

Se trata de una celda de carga fabricada por Revere Transducers y se encuentra acoplada a la estructura donde se encuentran los rodillos para convertir el peso colocado de manera axial sobre estos a una salida eléctrica. La capacidad de la celda es de 50 libras y su salida nominal es de 3 mV/V, por lo que si se alimenta con 10V DC su salida irá de 0V hasta los 30 mV a plena carga.

### **Fuente de alimentación**

Se trata de una fuente dual de voltaje que genera  $\pm 5V$  con una capacidad de corriente de 1 A. Por medio de ésta se alimenta la celda de carga y a cada uno de los circuitos del sistema.

### **Teclado y driver de teclado**

Se utiliza un teclado de membrana de 4x4. Para manejarlo se usa el 74LS922, el cual es un dispositivo capaz de manejar hasta 16 interruptores. Al presionar una tecla este circuito captura la señal generada eliminando los rebotes, pone en su salida el número de botón que acaba de ser presionado (formato BCD) y genera una interrupción para avisar del evento al microcontrolador.

### **Driver de displays de 7 segmentos**

Para manejar seis displays de 7 segmentos se utilizaron dos MM5450, los cuales reciben en forma serial la información que desea ser desplegada y se encargan actualizar a cada uno de los segmentos. La intensidad luminosa puede

ser ajustada mediante una resistencia externa. Cada uno de estos circuitos tiene capacidad de manejar 4 dígitos y medio.

### Display alfanumérico

Se maneja un display de LCD de 4 renglones y 20 columnas. La información a ser desplegada es cargada por un bus de datos de 4 bits y es manejado por varias señales de control. Este dispositivo cuenta con la capacidad de iluminar el fondo de la pantalla para lograr una mejor visibilidad.

### Puerto Serial

Se utiliza un convertidor de TTL a RS-232 a la salida del puerto UART del microcontrolador. Este dispositivo se encarga de pasar las señales de 0 – 5V DC a niveles de  $\pm 12V$  DC.

### Descripción del sistema mecánico

En las siguientes figuras se muestra el prototipo de la banda que se construyo. La Figura 2 indica la distancia entre rodillos y el diámetro de cada uno de estos. Aquí se puede apreciar que la banda cuenta con cinco secciones, debido a que se cuenta con seis rodillos. En los extremos se encuentra el rodillo motriz y un rodillo "dummy". En medio se cuenta con cuatro rodillos más pequeños, los cuales se encargan de cargar y de mover la banda durante su recorrido.

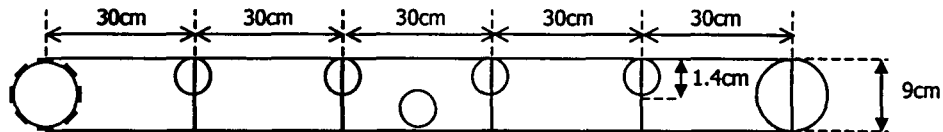


Figura 2. Dimensiones físicas de la banda.

La Figura 3 muestra el modelo completo de la banda

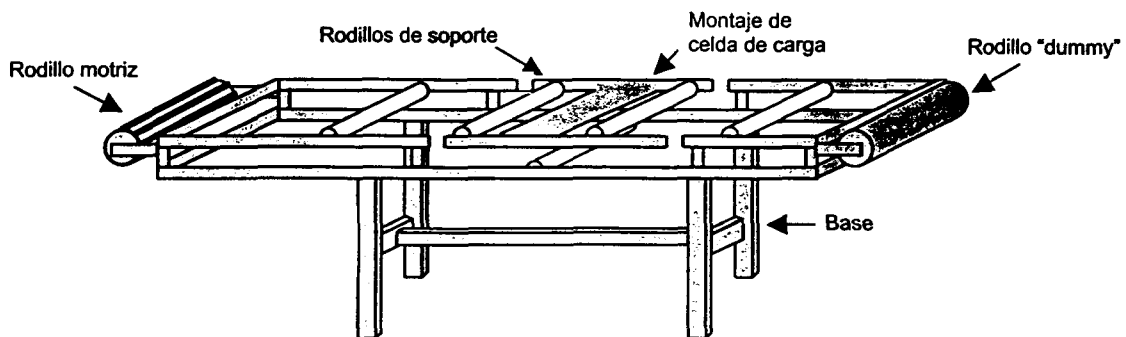


Figura 3. Modelo de la banda.

En la sección central de la banda se encuentra instalada la celda de carga, por lo cual las secciones contiguas a ésta forman las áreas de influencia del sistema. La siguiente figura muestra una vista lateral del montaje del sensor de peso:

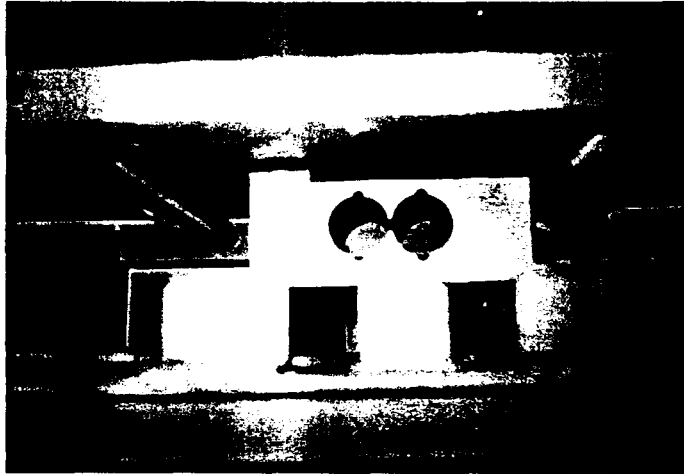


Figura 4. Vista lateral del montaje de la celda de carga.

Para impulsar la banda se utilizó un motor de CD con capacidad de  $\frac{1}{2}$  HP, el cual incluye un reductor de velocidad. La velocidad nominal del rodillo motriz es de 155 rev/min. La siguiente figura muestra la conexión entre el moto reductor y el rodillo motriz:

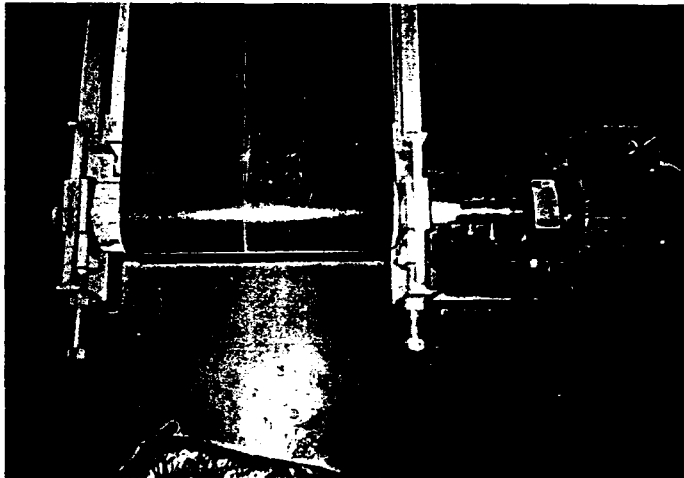


Figura 5. Conexión entre el rodillo motriz y el moto reductor.



Como ya se mencionó en el Capítulo 5, la banda plástica se sujetó por medio de una grapa metálica, la cual originó que se tuvieran componentes no deseadas de peso en el sistema. La siguiente figura muestra una imagen de la grapa de sujeción:

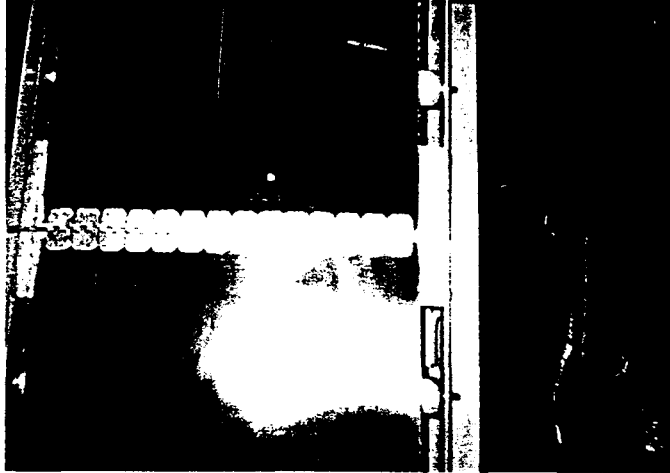


Figura 6. Grapa de sujeción.

Por último se muestra la imagen del prototipo final con el cual se realizaron las pruebas del algoritmo presentado en este trabajo.

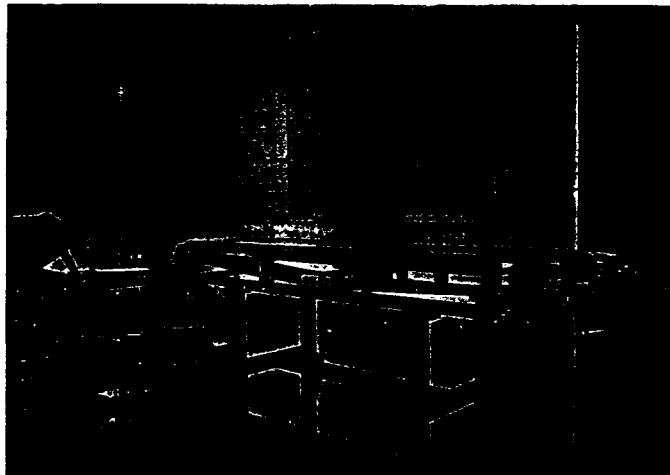


Figura 7. Modelo final de la banda.

## Descripción del software

A continuación se presentan los diagramas de flujo del software implementado:

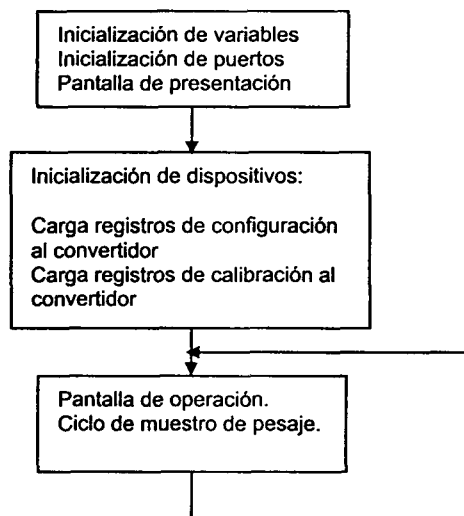


Figura 1 Inicio y ciclo de operación del programa.

Esta rutina se encarga de inicializar las variables del programa y los puertos del microcontrolador. En esta parte se configura el convertidor análogo digital y se inicializan el display alfanumérico y los dígitos de 7 segmentos. Por último se presenta la pantalla de operación y se entra a un ciclo infinito en donde se monitorea continuamente el peso del sensor.

La Figura 2 muestra el diagrama de flujo del ciclo de muestreo de pesaje, en el cual constantemente se actualiza el peso y se verifica si se ha presionado alguno de los botones. En esta parte existen tres opciones, se puede definir la referencia de cero de la báscula (tarar), se puede iniciar la captura de muestras para evaluar la ecuación de diferencias y se puede detener la captura de las mismas. Durante las pruebas realizadas, la evaluación de la ecuación de diferencias se realizó durante períodos de un minuto.

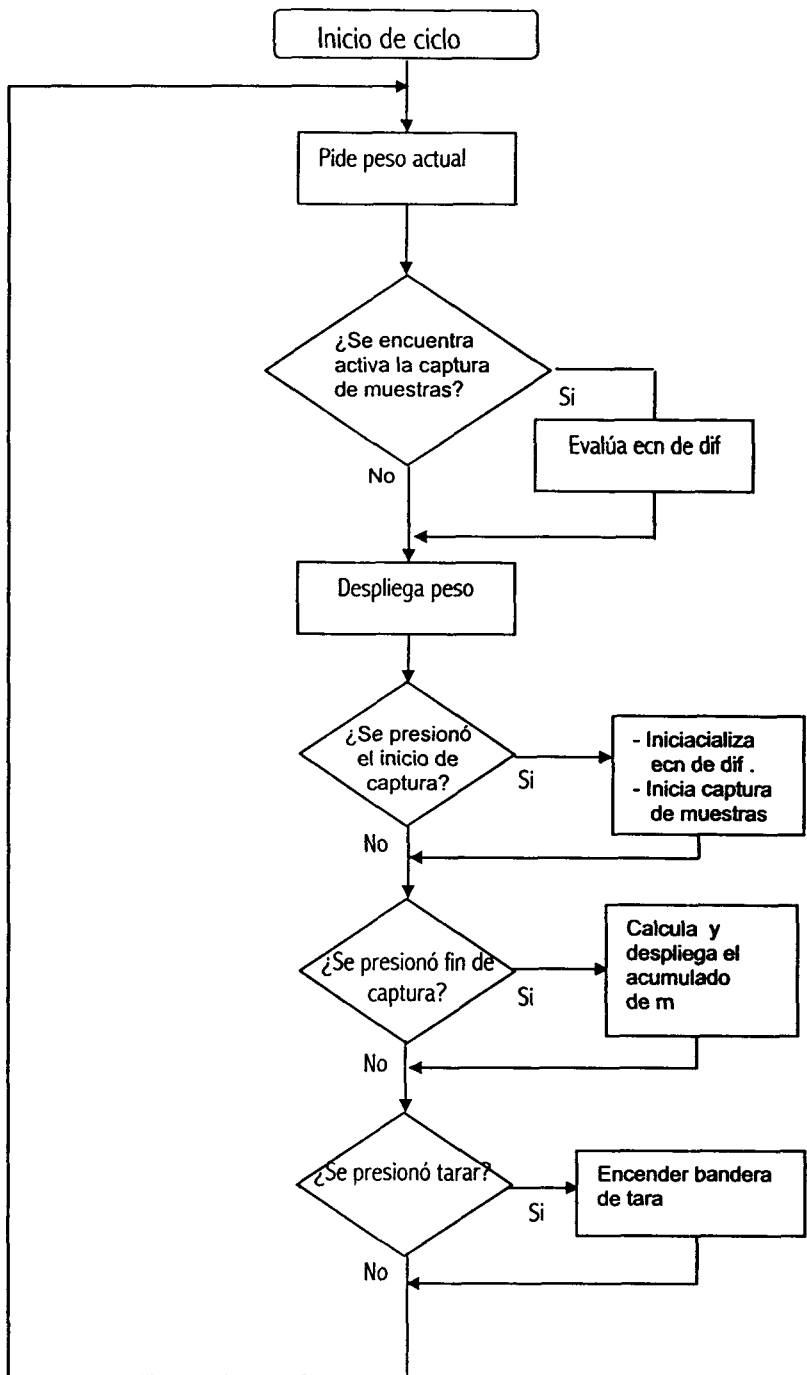


Figura 2 Ciclo de muestreo de pesaje.

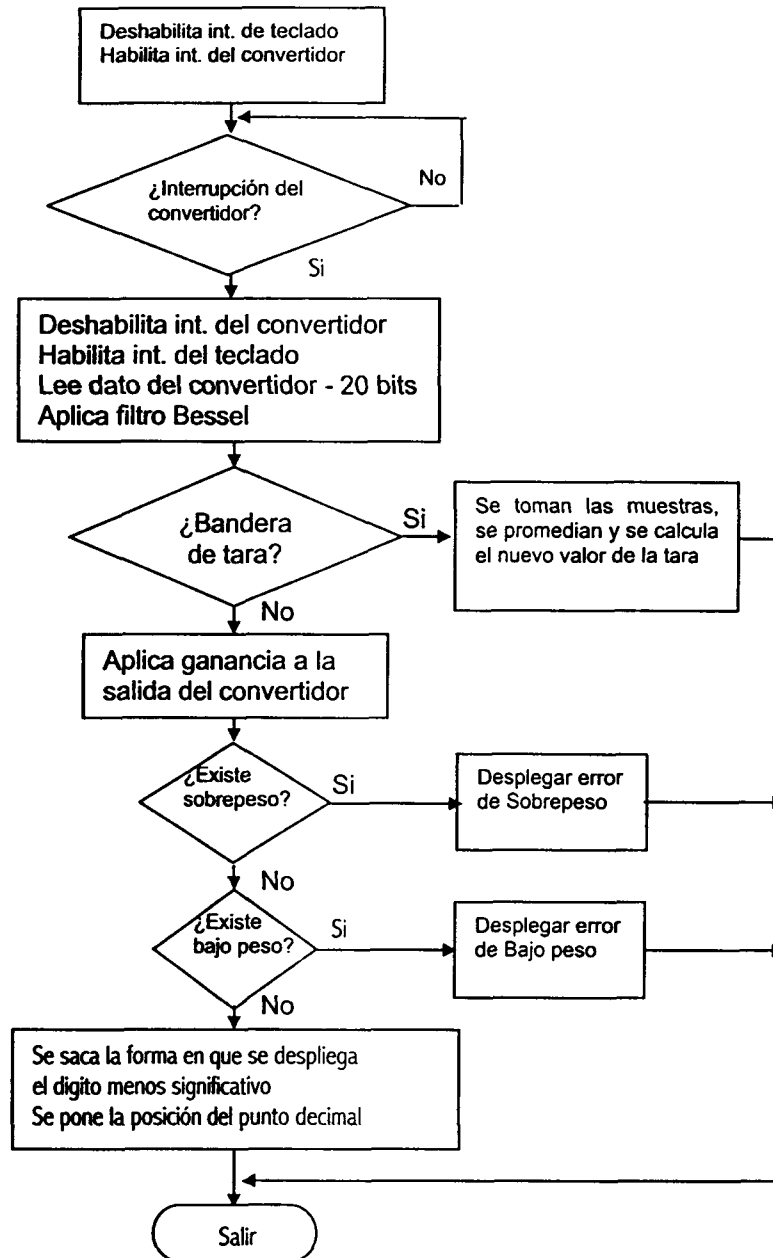


Figura 3 Pide peso actual.

La Figura 3 muestra la rutina encargada de actualizar el peso del sensor. Al inicio se deshabilitan todas las interrupciones del microcontrolador a excepción de la generada por el convertidor, se entra a un modo de espera hasta que el convertidor termina la conversión y entonces se lee el dato arrojado por éste. Posteriormente se revisa si la bandera de tara se encuentra encendida, para entrar a la rutina encargada de fijar la referencia de cero. Por último se aplica la ganancia a la lectura obtenida del convertidor y se revisa si ésta es muy baja o muy alta para indicar bajo peso o sobre peso. Si no ocurre ninguna de las anteriores se le da formato al peso para desplegarlo.

## Anexo VI

### Diseño de filtros digitales

A continuación se presenta el diseño de tres filtros digitales con frecuencias de corte de 0.05 Hz, 0.1Hz y 0.5 Hz. Para los tres casos se utilizó la técnica de "Mapeo de Polos y Ceros" y se eligió el modelo de un filtro Bessel. El tiempo de muestreo utilizado fue de 160 ms debido a que el sistema toma 6.25 muestras por segundo. Se parte asumiendo que la función de transferencia para un filtro Bessel análogo es:

$$H(S) = \frac{3\omega_0^2}{S^2 + 3\omega_0 S + 3\omega_0^2}$$

#### Filtro con frecuencia de corte de 0.05 Hz

Sustituyendo en H(s) los valores de  $f_0 = 0.05\text{Hz}$  y  $\omega_0 = 0.1\pi\text{rad/seg}$  para  $T=0.16$  seg se tiene:

$$H(S) = \frac{0.296}{S^2 + 0.942S + 0.296}$$

$$H(S) = \frac{0.296}{(S + 0.471 - j0.272)(S + 0.471 + j0.272)}$$

Aplicando el mapeo de polos y ceros:

$$H(Z) = \frac{k(Z + 1)^2}{(Z - 0.926 - j0.04)(Z - 0.926 + j0.04)}$$

Después de sustituir para  $\omega=0$  en la función de transferencia continua se determina el valor de k, el cual es igual a 0.00175 y la función de transferencia discreta queda como:

$$\frac{W(Z)}{X(Z)} = \frac{0.00175(Z + 1)^2}{(Z - 0.926 - j0.04)(Z - 0.926 + j0.04)}$$

Despejando para W(Z) y aplicando transformada Z inversa se obtiene la ecuación de diferencias para el filtro:

$$w_n = 1.852w_{n-1} - 0.859w_{n-2} + 0.00175x_n + 0.0035x_{n-1} + 0.00175x_{n-2}$$

### Filtro con frecuencia de corte de 0.01 Hz

Sustituyendo en H(s) los valores de  $f_0 = 0.1\text{Hz}$  y  $\omega_0 = 0.2\pi\text{rad/seg}$  para  $T=0.16$  seg se tiene:

$$H(S) = \frac{1.184}{S^2 + 1.884S + 1.184}$$

$$H(S) = \frac{1.184}{(S + 0.942 - j0.544)(S + 0.942 + j0.544)}$$

Aplicando el mapeo de polos y ceros:

$$H(Z) = \frac{k(Z+1)^2}{Z^2 - 1.713Z + 0.739}$$

Después de sustituir para  $\omega=0$  en la función de transferencia continua se determina el valor de k, el cual es igual a 0.0065 y la función de transferencia discreta queda como:

$$H(Z) = \frac{0.0065(Z+1)^2}{Z^2 - 1.713Z + 0.739}$$

Despejando para W(Z) y aplicando transformada Z inversa se obtiene la ecuación de diferencias para el filtro:

$$w_n = 1.713w_{n-1} - 0.739w_{n-2} + 0.0065x_n + 0.013x_{n-1} + 0.0065x_{n-2}$$

### Filtro con frecuencia de corte de 0.5 Hz

Sustituyendo en H(s) los valores de  $f_0 = 0.5\text{Hz}$  y  $\omega_0 = \pi\text{rad/seg}$  para  $T=0.16$  seg se tiene:

$$H(S) = \frac{3\pi^2}{S^2 + 3\pi S + 3\pi^2}$$

$$H(S) = \frac{3\pi^2}{(S + 4.712 - j2.72)(S + 4.712 + j2.72)}$$

Aplicando el mapeo de polos y ceros:

$$H(Z) = \frac{k(Z+1)^2}{Z^2 - 0.852Z + 0.22}$$

Después de sustituir para  $\omega=0$  en la función de transferencia continua se determina el valor de k, el cual es igual a 0.092 y la función de transferencia discreta queda como:

$$H(Z) = \frac{0.092(Z+1)^2}{Z^2 - 0.852Z + 0.22}$$

Despejando para  $W(Z)$  y aplicando transformada Z inversa se obtiene la ecuación de diferencias para el filtro:

$$w_n = 0.852w_{n-1} - 0.22w_{n-2} + 0.092x_n + 0.184x_{n-1} + 0.092x_{n-2}$$

## **Bibliografía:**

1. Cedex.com. (2001). Pesaje de vehículos en movimiento [WWW]. Disponible: <http://www.cedex.es/presentacion/datos/instalaciones/ins23.html>
2. Merrick-inc.com. (2003). Modelo 475 [WWW]. Disponible: <http://www.merrick-inc.com/heavy/475.html>
3. Ecm-france.com. (2003). Pesaje en movimiento. [WWW] Disponible: <http://www.ecm-france.com/sp/index.php>
4. Cardinalscales.com. (2003). Básculas de pesaje en movimiento. [WWW] Disponible: <http://www.cardinalscales.com/wim.htm>
5. Hispeedcheckweigher.com. (2001). Básculas verificadoras de peso. [WWW] Disponible: <http://www.hispeedcheckweigher.com/prods.htm>
6. Rlws. Com (2001). Sistemas verificadores de peso en movimiento. [WWW] Disponible: <http://www.rlws.com/lit/process/specs/imc1.html>
7. J. Banks, J.S. Carson II. B.L. Melson, *Discrete-event system simulation*, Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1984.
8. G. Dieck, *Instrumentación, acondicionamiento electrónico y adquisición de datos*, 1ª edición, México, D.F.: Ed.Trillas; Monterrey : ITESM. Campus Monterrey, Departamento de Ingeniería Eléctrica, 2000, página 68.
9. *The pressure strain and force handbook*, Omega Engineering, Inc, Stamford, CT: Prentice Hall,1989, página 335.
10. J.J. Carr, *How to design and build electronic instrumentation*, 2ª edición, Blue Ridge Summit, PA: Tab Books, 1986.
11. CS5516/CS5520 16-Bit/20-Bit Bridge transducer A/D converters datasheet, Crystal Semiconductor Corporation, Austin TX: 1995.
12. R.L. Peurifoy, *Métodos planeamiento y equipos de construcción*, 5ª edición, México D.F.: Diana, 1967, páginas 237-245.
13. N.K. Sinha, B. Kruszta, *Modeling and identification of dynamic systems*, New York: Van Nostrand Reinhold Publishing. 1983.
14. Y.D. Landau, *System identification and control design*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall. 1990.
15. Q. García, "Automatización del proceso de identificación de sistemas", Tesis. ITESM Campus Monterrey, N.L., 2000.



