Ponencias

Jueves 8 (15:15 - 16:00)

La modelación como estrategia de verificación y generalización en la solución de un problema de optimización

Jorge Fiallo Leal

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga

Rosario Iglesias de Yañez

INEM “Custodio García Rovira”, Bucaramanga

Juan de Dios Urbina Ortega

Centro Educativo Las Américas, Bucaramanga

Resumen. Este artículo reporta el trabajo de estudiantes de octavo y noveno grado, cuyas edades oscilan entre los 13 a 15 años, en la solución de un problema de optimización, en donde la modelación en Cabri Géomètre juega un papel protagónico, ya que les permitió llegar a conclusiones y generalizaciones como la relación existente entre los lados de un triángulo, la relación entre el área y el número de lados de los polígonos, entre otras, que no fueron posibles con lápiz y el papel. Se comentan las estrategias y procedimientos que siguieron los estudiantes y se destaca la importancia de la mediación instrumental a través de la modelación en Cabri en el proceso de verificación de la solución del problema.

Introducción

El incorporar la tecnología en la clase de matemáticas ofrece nuevas estrategias para la solución de situaciones problemáticas y se constituye en un nuevo entorno para la exploración y la sistematización. En especial, el acceso a la manipulación directa que ofrecen los sistemas de geometría dinámica como el Cabri Géomètre en donde sus características de capacidad de arrastre, la huella que deja la figura cuando se arrastra y la animación, permiten crear un ambiente experimental en el aula, dando la oportunidad de modelar, simular, observar, conjeturar, predecir y generalizar (MEN, 2000). *En los sistemas de geometría dinámica se conciben los objetos geométricos como el resultado de una modelación computacional de determinados conceptos geométricos, y las actividades diseñadas deben conducir al estudio de las propiedades invariantes que poseen determinadas construcciones geométricas y que el estudiante puede manipular* (González-López, 2000).

Teniendo en cuenta estas ideas, presentamos en este trabajo los resultados de las experiencias obtenidas con estudiantes de octavo grado del *Centro Educativo Las Américas* y de noveno grado del *INEM* quienes se enfrentaron a la solución del siguiente problema: encontrar un polígono (rectángulo, triángulo, …) que teniendo un perímetro fijo de 120 metros encierre la mayor área.

En el transcurso del artículo se narra el desarrollo de la actividad, algunas soluciones dadas al problema y las conclusiones que nos permiten dar cuenta de cómo la calculadora se convierte en un mediador cognitivo para que el estudiante, utilizando especialmente la modelación en *Cabri*, verifique la solución del problema y plantee nuevas hipótesis y generalizaciones que lo conduzcan a potenciar su razonamiento matemático y a comprender significativamente conceptos que difícilmente pueden asimilar en este grado y en esta edad con los medios tradicionales del lápiz y el papel.

Marco de referencia

Los conceptos de número y figura son apenas dos ejemplos de las numerosas abstracciones de los objetos matemáticos, por eso la necesidad de representarlos para poder referirnos a ellos. Varios de los conceptos matemáticos se han tenido que representar de otra manera para poder "visualizarlos", y es por ello que a veces se utilizan diferentes sistemas de representación para referirlos; generalmente se habla de la representación gráfica, numérica o algebraica, pero, *las formas de representación de un objeto son inagotables, y cuanto más sistemas de representación se trabajen, se comprenderá mejor un concepto matemático en toda su dimensión (MEN, 1999)*.

Las nuevas tecnologías tales como las calculadoras algebraicas ofrecen nuevos espacios para otras representaciones, en las cuales el estudiante puede simular y modelar situaciones matemáticas difíciles de reproducir en las tecnologías tradicionales del lápiz y papel. *Por simulación estamos denominando una representación visual de un fenómeno o proceso con mayor o menor fidelidad perceptual, sin intervención del modelo formal del fenómeno o del proceso. Por su parte, una modelación es una representación formal de un proceso o de un fenómeno a través de expresiones cualitativas o cuantitativas de las relaciones entre variables que describen el proceso o fenómeno, expresiones que son susceptibles de manipular (Duarte, 1997)*

A través de la modelación en la calculadora el estudiante puede realizar actividades de exploración en las que es posible manipular directamente las representaciones de los objetos matemáticos y sus relaciones, y en las que él puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático. La modelación de ciertas situaciones problemáticas en la calculadora se convierte en un elemento muy importante para su solución y para la construcción de conceptos matemáticos.

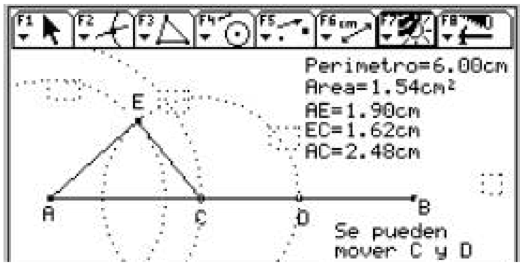
Metodología

A los estudiantes se les presentó la siguiente situación problemática, para que ellos trabajaran inicialmente sin el uso de la calculadora acudiendo a diferentes estrategias para resolverla. Para que no fuera un obstáculo el desconocimiento de las formulas del perímetro y del área de cada uno de los polígonos, éstas se dieron en el enunciado del problema.

Situación problemática

Dado un perímetro fijo de 120 metros, entre los siguientes polígonos: triángulo, triángulo equilátero, rectángulo, cuadrado, …, ¿cuál encierra la mayor área?

Algunos estudiantes abordaron el problema utilizando un cordel (pita) de 120 cm y clavaron estacas en la tierra para representar cada uno de los polígonos sugeridos; tomaron varias longitudes para cada lado en cada caso y almacenaron los datos en tablas. Para el caso de la circunferencia la mayoría tomó inicialmente como radio del círculo los 120 cm, pero posteriormente cayeron en cuenta que esta longitud correspondía al perímetro y que era necesario encontrar el radio utilizando la ecuación que se les había dado inicialmente; después de socializar la experiencia, la mayoría concluyó que el polígono que encierra la mayor área con un perímetro fijo es el círculo, pero no hubo un acuerdo general sobre cuál era el área más exacta y algunos aún pensaban que podía ser el cuadrado o un rectángulo; a raíz de estas inquietudes surgió la idea de trabajar la solución del problema utilizando la calculadora; los estudiantes argumentaron que a través de ésta podían tener más representaciones del mismo polígono, tomar una mayor cantidad de datos con más exactitud y precisión, además de utilizar otras cantidades no enteras, como lo habían visto y trabajado en la actividad de la



construcción de una caja sin tapa a partir de una hoja recortando en cada esquina un cuadrado.

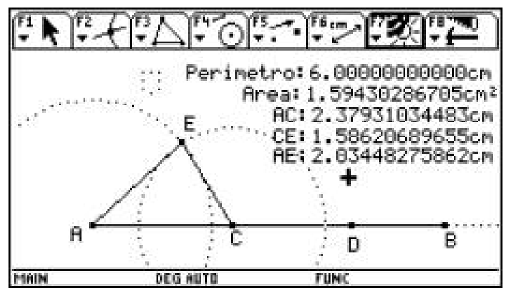
Otros grupos solamente utilizaron lápiz y papel. La mayoría de ellos pensaba que el polígono de mayor área tenía que ser el cuadrado, descartando de entrada el rectángulo y el triángulo; posteriormente esta idea fue contrastada con los cálculos numéricos. En el desarrollo de la actividad, el cálculo del área del triángulo fue el que presentó mayor dificultad, puesto que no tenían la altura, por lo que fue necesario suministrarles la fórmula de Herón.

Una vez terminada esta actividad, se les entregó la calculadora para que con ella y en grupos de dos, resolvieran el problema. Se les indicó que por el tamaño reducido de la pantalla, tomaran 1 centímetro por cada 20 metros. Hicieron laproporción y tomaron 6 centímetros para el perímetro.

Soluciones de algunos grupos

La mayoría de los grupos, realizó construcciones similares a la siguiente:

1. Representaron el perímetro de 6 cm como el segmento *AB*. Tomaron dos puntos sobre éste y los llamaron *C* y *D*.



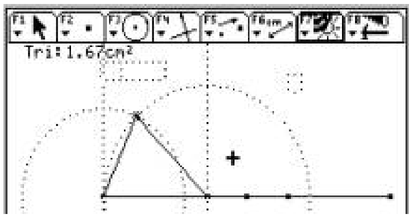
2. Construyeron las circunferencias C_1 con centro en *A* y radio *CD*, y C_2 con centro en *C* y radio *DB*. Hallaron el punto de intersección *E* entre C_1 y C_2. Con esta información construyeron el triángulo *ACE*.

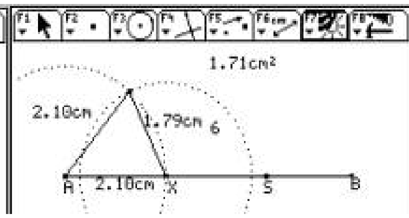
3. Calcularon el perímetro, la longitud de cada lado y el área del triángulo *ACE*. Se dieron cuenta de que al mover el punto *C* o el punto *D* sobre el segmento *AB*, se generaba una familia de triángulos de perímetro 6 cm y áreas diferentes, siendo la máxima cuando el triángulo es equilátero (1.73205080757 cm^2).

La siguiente construcción realizada por un estudiante refleja el progreso en la argumentación y justificación dada al problema.

Estudiante 1 (14 años): *Hago un segmento con 6 cm de longitud y lo llamo AB. Luego pongo dos puntos sobre él y los llamo C y D. ¿Por qué? Porque este es el perímetro que debe tener el triángulo. Los puntos son para partir en 3 el segmento.*

Con la distancia AC hago una circunferencia con centro en A y la llamo C_1*; tomo la distancia CD y hago una circunferencia con centro en C y la llamo* C_2*; tomo la distancia de DB, hago la circunferencia con centro en A y la llamo* C_3*. Hallo el punto de intersección entre* C_2 *y* C_3 *y lo llamo E. ¿Por qué?, uso circunferencias porque hay que transferir en sus radios la medida que deben tener los lados del triángulo y este no modifique su perímetro al mover C o D. El punto de intersección E, es porque esta intersección es el vértice tercero del triángulo junto con A y C. Oculto las circunferencias y trazo el polígono que pasa por los puntos A, C y E. Le hallo perímetro, área y longitud de sus lados. ¿Por qué?, porque necesito despejar para hacer el triángulo más fácil. Mido para verificar y buscar la mayor área y que el perímetro sea siempre 6 cm.*





Al mover los puntos C y D, el perímetro es siempre 6 cm, la longitud de los lados cambia junto con el área, siendo la máxima cuando el triángulo es equilátero con 1.73 cm^2

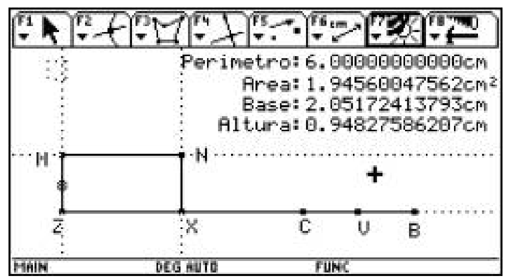
A continuación, se muestran otras construcciones realizadas por los estudiantes.

Algunos grupos almacenaron los datos de variación de cada uno de los lados y el área, lo cual les permitió afirmar con mayor seguridad que el triángulo de mayor área con un perímetro fijo dado es el triángulo equilátero.

La construcción del triángulo no presentó mayor dificultad, debido a la experiencia previa con el cordel y al trabajo con regla y compás.

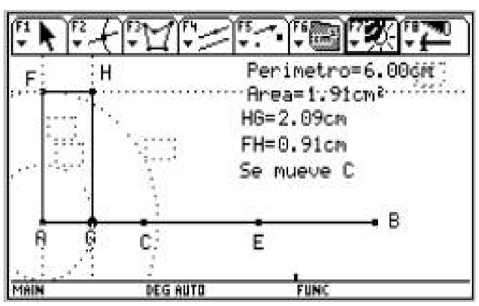
· Construcción del rectángulo:

1. Representaron el perímetro como el segmento *ZB*; escogieron un punto *C* del mismo. Hallaron el punto medio *X* del segmento *ZC* y el punto medio *V* del segmento *CB*, siendo *ZX* y *CV* las medidas de los lados del rectángulo.



2. Transfirieron la medida del segmento *CV* a la semirrecta que inicia en *Z* y es perpendicular a *ZB*. A este punto lo llamaron *M*.

3. Trazaron una perpendicular a la semirrecta *ZM* por *M*, y encontraron el punto *N* de intersección entre esta perpendicular y la perpendicular a *ZB* que pasa por *X*; con esta información construyeron el rectángulo *ZXNM*.



4. Calcularon el perímetro y verificaron que éste no variaba al desplazar el punto C a lo largo del segmento ZB, y que se generaba una familia de rectángulos de perímetro fijo. Calcularon el área, la longitud del lado ZX al que llamaron base y la longitud del lado XN al que llamaron altura y concluyeron que el cuadrado es el rectángulo de área máxima (2.25 cm^2). El hecho de cómo la construcción de un rectángulo los lleva a observar toda una familia de rectángulos pasando por el cuadrado, y ver que sólo hay uno cuya área es máxima, los llevó a concluir que sin la calculadora todas estas variaciones y conclusiones difícilmente hubieran sido observables.

El estudiante 1 realizó la siguiente construcción: *Hago un segmento con 6 cm de longitud y lo llamo AB. ¿Por qué? Porque 20 metros equivalen a 1 centímetro y 6 centímetros equivalen a 120 metros y porque luego éste debe ser el perímetro del rectángulo. Luego le pongo un punto que esté sobre él en cualquier parte, lo llamo C. ¿Por qué?, porque es para partir el segmento en dos. Pongo punto medio entre A y C y otro punto medio entre C y B llamándolos D y E respectivamente. ¿Por qué?, para partir en 4 el segmento siendo dos partes iguales y otras dos iguales.*

Con la distancia entre A y D hago una circunferencia con centro en A y la llamo C_1*, luego tomo la distancia CE y hago* C_2 *con centro en A también. ¿Por qué?, porque es para transferir la medida en sus radios, de la medida de los lados del rectángulo próximo a construir.*

Trazo una recta perpendicular al segmento AB que pase por el punto A y la llamo L_1, luego hallo el punto de intersección entre C_2 y L_1 y lo llamo F, luego entre el segmento y C_1 y lo llamo G. ¿Por qué?, así hallo el primer ángulo de 90° útil para el rectángulo y el punto F es porque así transfiero la altura que es el radio de C_2, el punto G para el ancho (radio de C_1).

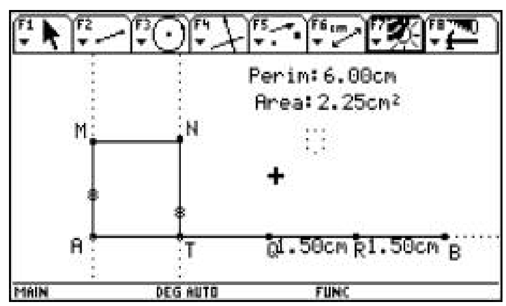
Trazo una recta perpendicular a L_1 que pase por F y la llamo L_2. Luego una recta paralela a L_1 que pase por G y la llamo L_3. Hallo el punto de intersección entre L_2 y L_3 y lo llamo H. ¿Por qué?, así con L_2 hallo el segundo ángulo de 90°, con L_3 el tercero y el cuarto, así completo el rectángulo. H es el vértice superior derecho.

Oculto C_1, C_2, L_1, L_2, L_3 y el punto D. Trazo el polígono que pase por los puntos A, F, H, G. Hallo su perímetro y mido sus lados. También el área. ¿Por qué?, las oculto porque necesito facilitar el trabajo. Mido el polígono para saber si está bien o no y buscar su máxima área.

Al mover el punto C, el perímetro no cambia. El rectángulo modifica su forma, cambian las longitudes de los lados y el área siendo la máxima cuando es un cuadrado con 2.25 cm^2.

Esta fue la construcción en la que mayor dificultad se encontró, especialmente con estudiantes de octavo grado, quienes inicialmente construyeron un rectángulo fijo; en este caso se necesitó de la orientación del profesor.

Algunos grupos construyeron primero el cuadrado de la siguiente manera:

1. Transfirieron la medida 6 cm a la semirrecta *AB*, hallaron el punto medio *Q* del segmento *AB* y los puntos medios *T* y *R* de cada segmento *AQ* y *QB*, respectivamente; trazaron perpendiculares por *A* y *T*, y semirrectas sobre estas perpendiculares con puntos iniciales en *A* y *T*. 2. Llamaron *M* y *N* a los puntos generados por la transferencia de las medidas *QR* y *RB* sobre las semirrectas. Representaron el polígono *ATNM* calculándole su perímetro y su área.	

En esta construcción encontraron que ningún punto del cuadrado se dejaba arrastrar, lo que les permitió afirmar que solamente se podía construir un único cuadrado de perímetro fijo 6 cm. Cabe anotar que tan pronto el estudiante realiza una construcción en *Cabri* busca mover algún objeto geométrico que le permita explorar y de esta manera encontrar invariantes.

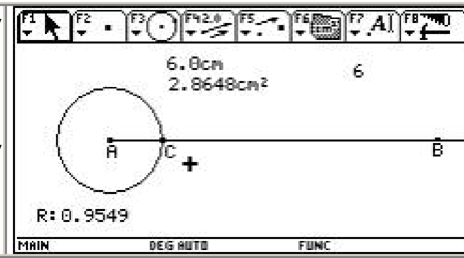
· Construcción de la circunferencia

Esta fue la construcción más fácil y rápida, puesto que en la actividad realizada con papel, lápiz y cordel, mediante el uso de la ecuación P = 2 p r habían realizado las operaciones necesarias para hallar la longitud del radio. Observaron que con el perímetro dado, solamente podían construir una única circunferencia, cuyo radio es de 0.95492965855 cm y área 2.8647889756 5 cm^2.

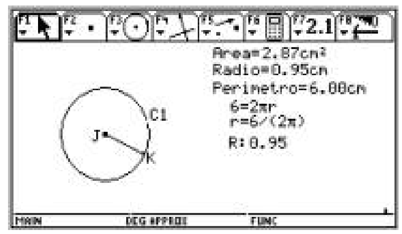
La mayoría de estudiantes realizó la siguiente construcción:

1. Con el editor numérico representaron los 6 cm y calcularon el radio tomando este número y dividiéndolo por 2 p .

2. Transfirieron este resultado a la semirrecta AB y construyeron la circunferencia con centro en A y radio AC.



Otras construcciones de los estudiantes se presentan a continuación:



Todos encontraron que el polígono de perímetro fijo 6 cm que tiene mayor área es la *circunferencia*.

Observaciones

Gracias al dinamismo y a la facilidad de exploración de *Cabri*, además de verificar la solución del problema, los estudiantes encontraron que:

§ en la construcción del triángulo existe una relación entre las medidas de los lados del triángulo, permitiendo así hablar de la desigualdad triangular.

§ la hipótesis inicial, según la cual, si el perímetro de un polígono no varía el área tampoco varía, era falsa.

§ con un perímetro fijo, entre los diversos polígonos el que siempre tiene mayor área es el regular.

§ con un perímetro fijo, al construir polígonos regulares, a mayor número de lados mayor área.

Otras conclusiones que resaltan la importancia del uso de la calculadora en la clase de matemáticas fueron expresadas por los estudiantes así:

§ Sin la modelación en la calculadora hubiera sido más difícil verificar y comprender mejor la solución del problema, porque tendríamos que haber hecho muchas construcciones, hubiéramos tenido menos precisión, gastado más tiempo y más papel y no habríamos llegado a otras conclusiones.

§ El proceso con lápiz y papel es más tedioso, y varias de las preguntas planteadas en toda la situación de la construcción no las habríamos podido responder o plantear porque no existe la posibilidad de movimiento y de interacción con el problema.

§ El trabajo con la calculadora ha contribuido a mejorar las relaciones personales entre los estudiantes y entre estos y el profesor, además de habernos ayudado a mejorar en otras áreas, puesto que ahora somos más lógicos, nos atrevemos a preguntar, nos ha ayudado a aprender a pensar y tenemos en general una visión diferente.

§ Manejamos con claridad más conceptos y utilizamos el lenguaje propio de las matemáticas; *ya no hablamos de una raya de un punto a otro, sino de un segmento entre dos puntos*, y hemos descubierto otras relaciones entre los objetos geométricos.

§ Aprendimos a trabajar con la tecnología y hemos aprendido a investigar de una manera más sencilla y práctica; podemos explorar lo que pensamos y no sólo esperamos instrucciones.

Esta experiencia muestra que, con la mediación instrumental y el uso de la modelación con *Cabri* o de un software de geometría dinámica, los estudiantes enfrentan una situación problemática con mayores posibilidades de contrastar hipótesis, de cambiar sus estrategias de trabajo, de relacionar ideas y conceptos, argumentar, plantear nuevas preguntas, dar más ejemplos y contraejemplos, mejorar su lenguaje, cambiar de un sistema de representación de un objeto matemático a otro y mejorar las relaciones interpersonales entre todos los miembros de la comunidad académica.

Bibliografía

Duarte Teodoro, Vitor , (1997) *Modelacao computacional em ciencias e matemática*, Revista Informática Educativa de Uniandes-Lidie Colombia Vol.10 N°2, pp. 171-182.

González-López, María J . (2000) *La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica.* En Gómez P. y Rico L. (Eds). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Ministerio de Educación Nacional , (2002) *Memorias proyecto de incorporación de tecnologías en la educación media de Colombia.* Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional . (1999) Proyecto: *Incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media oficial de Colombia*. Grupo de investigación pedagógica, Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional . (1999) Serie lineamientos curriculares: *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas* . Bogotá, Colombia.

La calculadora como re-diseñadora de la finalidad del trabajo del profesor

Jaime Humberto Romero Cruz & Martha Alba Bonilla Estévez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá

Resumen. Aceptando como principios que "todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser simbólico o físico" y que "los instrumentos son potenciadores de reorganización cognitiva y de las relaciones sociales", abordamos las percepciones que manifiestan profesores en ejercicio y estudiantes para profesor de matemáticas acerca de las transformaciones de las situaciones didácticas,en un aula gestionada por resolución de problemas, dada la presencia de un instrumento como la Calculadora TI 92. Por ello nos

proponemos dar respuesta a la siguiente pregunta ¿cómo se relaciona el modelo didáctico asumido por el profesor con su comprensión de la intencionalidad de la Tecnología encarnada en la calculadora (TEC)?

Introducción

Este escrito pretende aportar algunas evidencias, sobre las posibilidades que el trabajo con la Tecnología brinda para transformar la finalidad del trabajo del profesor de matemáticas en el aula, la que asumimos como la de "ayudar al estudiante a entrar en una cultura matemática escolar, en la que se privilegia la comunicación de ideas". Esta finalidad la ligamos a la intencionalidad incorporada en un instrumento dialogante -como lo es la calculadora TI -92 con el que se puede construir unas ciertas matemáticas. Analizamos las percepciones particulares sobre los cambios de las relaciones didácticas adjudicadas al uso de la calculadora en el aula de matemáticas, explicitadas por profesores o estudiantes para profesor que participaron directamente en el propósito de incorporar la calculadora TI 92 como instrumento de mediación en aulas de clase de matemáticas. Además describimos algunas condiciones que favorecieron el surgimiento de la percepción de dichas transformaciones, y construimos a partir de allí, una hipótesis plausible de relación entre el modelo didáctico del profesor (normativo, apropiativo) y la apropiación de las gramáticas incorporadas en la TEC.

Analizar esas relaciones, explicitadas por profesores en ejercicio y estudiantes para profesor, que se encuentran sensibilizados, algunas veces convencidos, de las posibilidades didácticas de la máquina y su pertinencia para el desarrollo del pensamiento matemático en los escolares, es un trabajo que puede ser útil para los formadores de profesores que pretenden transformar la cultura matemática escolar, asumiendo que *el uso del recurso tecnológico es fundamental para pasar de un currículo centrado en contenidos, a uno centrado en la resolución de problemas* (MEN, p.34).

Aspectos protocolares y metodológicos de la investigación. En la fase piloto del Proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*, coordinamos el trabajo con una profesora de cada uno de los colegios Heladia Mejía (jornada de la mañana), Rodrigo Lara Bonilla, (jornada de la tarde) y Unidad Básica Rafael Uribe Uribe(jornada de la mañana). La formación en el manejo de la calculadora y en la gestión de clase con su presencia, se ha realizado a través de talleres ofrecidos por el MEN, de reuniones semanales del grupo en las que se discuten y se diseñan actividades de aula y se estudian tópicos necesarios para el proyecto. La puesta en acción ha contado con la presencia de una profesora durante casi dos años, mientras que las otras se vincularon hace un año. Al mismo tiempo, como estrategia de formación, intervinieron haciendo práctica, estudiantes para profesor en los mismos grados en los que acompañan a las profesoras que implementan el proyecto en octavo, noveno y décimo.

Además del intercambio establecido durante su transcurso, al finalizar este período de trabajo, realizamos tres entrevistas no estructuradas: una, con las tres profesoras; otra, con un grupo de tres practicantes y la otra dirigida a tres estudiantes de pasantía. Recurrimos a esta forma de indagación, en lugar de observar clases o de analizar actividades, porque no se trata de describir o comprender lo que "realmente pasa" sino explorar percepciones que las profesoras y estudiantes para profesor pueden hacer explícitas. Por ello, en el proceso de análisis de la información primero agrupamos las evidencias de los cambios percibidos por los participantes en el estudio y luego categorizamos dichas evidencias, para construir desde allí, una hipótesis plausible que explica la complejificación de las percepciones.

El sustento del tratamiento de la información, la fenomenografía, (Marton, 1981) se basa en que *...en la comprensión que tiene la gente sobre fenómenos, conceptos y principios, encontramos repetidamente que cada fenómeno, concepto o principio puede ser comprendido en un número limitado de formas cualitativas diferentes* y su objeto es categorizar esas formas en las que se experiencia o se piensa algún fenómeno, las relaciones entre los seres humanos y el mundo que los rodea, como contenidos de pensamiento.

Ejes conceptuales

Puesto que las tecnologías modifican los entornos socioculturales (Moreno y Sacristán, 2002), los entornos escolares, socialmente construidos, han de afectarse en presencia de instrumental proveniente de nuevas tecnologías. Específicamente, habrá cambios en las situaciones didácticas (ó relaciones didácticas, denominadas algunas veces por nosotros) que Brousseau, (1988) citado por Douady (1995, p. 250) concibe como el

...conjunto de relaciones establecidas explícita e implícitamente entre un alumno o grupo de alumnos, un cierto medio (comprendiendo eventualmente instrumentos u objeto) y un sistema educativo (el docente) con el fin de que los alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constituirse

Por ejemplo, las investigaciones de Moreno y Waldegg (2002) acerca del uso y potencialidades de la calculadora simbólica y graficadora (como la TI 92 plus) en las aulas de matemáticas, la muestran como instrumento de indagación y exploración, convertida en socia cognitiva de los aprendices. Este hecho, y más aún, en tanto la podemos mostrar, como un instrumento con posibilidad dialógica, entendida como tecnología encarnada (TEC), depositaria de intencionalidad que le es constituyente, portadora también de gramáticas con las que se puede dilucidar y enriquecer esa intencionalidad, más o menos visible, de instrumento dialogante con el que se pueden construir unas ciertas matemáticas; nos permite visualizarla como rediseñadora de la acción del profesor en el aula o, en términos de Brousseau, como parte del sistema educativo (del cual el profesor es el representante).

Acerca de la TEC. Todo instrumento incorpora una intencionalidad que, al menos en parte, es aprendida con la ejecución del instrumento, pues tiene una gramática incorporada que se aprende mientras se hace un buen ejecutor del mismo. En el caso de la TEC la cuestión es más radical, pues en ella hay por lo menos dos gramáticas incorporadas, la generada por la interconectividad de sus representaciones ejecutables y la incorporada en la construcción de un instrumento así. La primera obedece a la pretensión de poner en el mundo un instrumento capaz de permitir el vínculo de las personas desde sus conocimientos -formas de representación y de acción- con formas de representación y de acción más estructuradas (interacción aprendiz, experto); cabe destacar aquí dos componentes dialécticamente antagónicos: posibilidades ilimitadas de intervención contra limitación de las formas de intervención por la presencia de la gramática incorporada. Destacamos esta presencia pues es responsable de la posibilidad de reconstrucción de conocimiento matemático, por la movilización de pensamiento en la dirección de pensamiento matemático, porque incorpora signos y normas de su producción y posibilidades de validación y diálogo dentro del sistema de signos. En palabras de Mockus (1988, p.31) permite usar la representación desde su verdadera función, su función de origen

(...) la representación describiéndola muy escuetamente no sería más que lo que permite el paso de un juego de lenguaje a otro, caracterizado por lo general por una mayor precisión y rigidez en sus reglas y –concomitantemente- mayores posibilidades de inferencia (...) la representación es construcción humana, pero también en la medida que es capaz de instaurar un nuevo juego de lenguaje, en la medida en que amplía las posibilidades de resolubilidad discursiva, articulando eficazmente lenguaje y acción, y llegando a proporcionar en el límite la certeza misma del cálculo- adquiere la autarquía propia de lo que es incorporado en la tradición y como tal nos interpela.

La segunda gramática recoge la intención, que recae principalmente sobre los constructores del instrumento, obedece a la comprensión y aceptación de que el hacer tecnológico ha impuesto en nuestra época la noción de ser como lo representable, dispuesto como intervenible, y la verdad como certeza, lo cual queda asegurado según Mockus por la contrastabilidad de las representaciones con un sistema de reglas, aunque no se trata de convertir todo juego de lenguaje en pura deducción, (1988, p. 160)

...se trata más bien de que, una vez introducida la representación, aumentan las posibilidades de dirimir las diferencias, de examinar las impugnaciones, y de explorar las conjeturas mediante argumentos que se caracterizan ...porque buscan acudir a presupuestos explícitos (o porque intentan explicitar estos presupuestos –valiéndose con frecuencia de los medios que para ello ofrece la representación introducida-)...porque pretenden validez para un hablante cualquiera...porque ofrecen criterios unívocamente universalizables de validez.

Gestión de la clase (C). Adoptamos con Charnay (1988), según la función principal que un profesor asigne a los problemas (que está en alta correlación con la función que asigna a la acción comunicativa de los estudiantes), tres modelos didácticos: normativo (problema como lugar de ejercitación y verificación de aprendizaje), iniciativo (problema como lugar de acción social lúdica sin compromiso relevante con aprendizajes necesarios) y apropiativo (problema como lugar social de aprendizaje en conexión con un saber constituido). Estos modelos suponen tres diferentes tipos de diseño de las actividades y de la gestión de la clase (conjunción que llamamos diseño de la clase)

El diseño de la clase. Apostamos por un diseño dentro del modelo apropiativo, lo cual conduce a una concepción de matemáticas compatible con la resolución de problemas que potencie los saberes matemáticos que tienen los estudiantes, con la pretensión de formar ciudadanos cuya formación matemática pueda entenderse como actividad de sujetos a fin de estructurar mundo, recurriendo a herramientas matemáticas, dentro de un contexto social compartido. En este diseño, la TEC deberá jugar el papel de instrumento vinculante de los saberes de los estudiantes con tradiciones establecidas por la comunidad humana en matemáticas. De manera que el diseño usa las representaciones ejecutables para favorecer la posibilidad de llegar a acuerdos en la acción comunicativa discursiva de las situaciones didácticas, manteniendo la pretensión, por demás necesaria, de ponerlas en un contexto más universal, generando conocimientos que, además de poseer sentido, son más generalizables y útiles. A este diseño de clase lo llamamos **(TEC, C)**.

El carácter cognitivo de la dupla (TEC, C). Desglosado en los siguientes tres ítems:

1. **El carácter dinámico de la dupla cognitiva (TEC, C)** . Refiere la capacidad de interacción de distintos niveles de formalización para la intervención o construcción de objetos matemáticos. Interacción que Moreno y Sacristán (2002) consideran como un dominio de abstracción y demostración.

2. **El carácter versátil de la dupla representacional (TEC, C)** . Refiere la capacidad simultánea de integrar en “tiempo real”, diferentes representaciones y tipos de registro de representación. Convierte a las relaciones entre representaciones en objeto de estudio, exploración y aprendizaje, gracias a que incorpora en el diseño la ejecutabilidad de las representaciones dispuestas en la TEC y su multiplicidad.

3. **La (TEC, C) complejifica la comunicación cooperativa.** Dadas su dinamicidad y versatilidad, ahora es altamente probable que aparezcan varias ideas matemáticas para decir y más formas de decirlas, ocasionando entonces mayor presencia discursiva y por lo tanto mayor complejidad en la acción comunicativa, que a la vez es regulada fuertemente por la gramática incorporada.

Primer momento: Muestra de percepciones explicitadas acerca de la transformación de las relaciones didácticas y su agrupamiento

A continuación presentamos pronunciamientos de profesores o practicantes (nombrados de manera genérica como profesor), que consideramos relevantes para establecer diferenciaciones, referidos, como ya se dijo, a sus percepciones particulares sobre los cambios de las relaciones didácticas adjudicadas al uso de la calculadora en el aula de matemáticas. Las evidencias se disponen sin un orden específico ya que nuestro interés es resaltar aspectos de lo dicho, intentando ganar comprensión. Optamos por codificar como PP a las profesoras de cada uno de los colegios, PO a los profesores observadores y EP a los estudiantes practicantes, sin mayores distinciones.

1. El profesor percibe que la TEC ha cambiado la relación de los estudiantes con el saber.

1.1. No les permite aprender los contenidos canónicos.

"Si. Con la calculadora aprenden a graficar, pero el razonamiento es lo que les falta.... el chico necesita saber los procesos, ¿cómo se deduce, por ejemplo, la ecuación de la circunferencia?, porque o si no ¿qué aprende de matemáticas?"(PO)

1.2. Les permite medios de razonamiento que antes no tenían.

"Hubo una actividad que era entre simetría axial y simetría de punto... ellos debían definir cual era, se les daba el objeto original y el simétrico y ellos debían decidir qué simetría se había hecho... entonces ellos lo primero que hacían era relacionar los puntos en el original y en el simétrico... relacionaban con líneas y empezaban a mirar que fueran paralelas... y usaban la herramienta verificar propiedades.. yo creo que esa verificación les sirve a los estudiantes para razonar la respuesta, para llegar a ver la evidencia, sí son paralelas... les permite tener juicios de razón para llegar a decir, sí es tal simetría..."(EP)

1.3. Les permite medios de acción que antes no tenían.

"Cuando el alumno utiliza lápiz y papel no tiene los elementos mínimos para poder arrancar (comenzar), de ahí el cambio, pues la calculadora permite por lo menos hacer una exploración sin conocer mucho de lo que se está discutiendo..." (EP)

1.4. Les permite medios de expresión que antes no tenían.

"¿De todo eso hizo una demostración? Decían yo hice esto y aquí compruebo que esto es así, porque lo hice de esta forma y cumplió y la forma en que lo hice fue tal y entonces conectaba y llegaba otro yo lo hice de tal forma que también seguía siendo válida y que era otra forma de mostrar que lo que había hecho estaba bien...."(EP)

1.5. Les permite medios de razonamiento ligados a los procesos de acción, cosa que antes no se tenía.

... permite que el estudiante relacione objetos entre ellos, por que a veces por ejemplo, en un libro va a encontrar una línea y la otra cruzándola pero no va a decir que las dos líneas tienen que estar relacionadas para que se pueda hablar de perpendicularidad,.. en cambio en la calculadora si uno tiene la calculadora en blanco y da línea perpendicular, obviamente no le va a aparecer nada, entonces para el estudiante es importante contextualizar y saber relacionar objetos entre ellos, si que la línea perpendicular es como una relación entre una línea y una nueva línea, o un segmento y otro...permite relacionar objetos...(EP).

2. El profesor percibe que la TEC ha de cambiar su papel en el aula.

2.1. Los puede relegar por sustracción de materia pues los estudiantes ya no los requieren para aprender, luego, ¿cuál sería su función?

"entonces será que a uno lo cambiarán por un aparato que le haga las cosas,... y el estudiante contento, nadie le exige" (PO)

2.2 La gestión de la clase involucra más discursos y el maestro consiente en rebajar su protagonismo

"la clase cambia, la clase cambia porque ya no habla uno solo al tiempo, hablan tres, cuatro al tiempo..." (PP)

"porque ya no es el maestro el personaje central, importante poseedor de todo el conocimiento y quien da las respuestas, sino que uno es un ente ahí que de pronto pasa mirándolos y preguntándoles y haciéndoles caer en cuenta de algunas cositas ..." (PP)

2.3 El diseño de las actividades debe tener en cuenta que la TEC produce desplazamiento de los esfuerzos cognitivos del estudiante, el asunto que aparece entonces es ¿hacia donde?, ¿hacia qué?

"en el diseño de actividades uno tiene que replantearse qué es lo que va a preguntar, porque no es lo mismo al hacer una tabla y preguntar ¿cómo la hizo?, sino ¿qué hay en una tabla?... ¿qué le permite ver una tabla?... ¿qué pasa con lo que varía aquí ?(...) en el fondo lo que yo creo es que debe cambiar preguntar por el análisis de lo que se tiene no cómo se llega allí..." (EP)

"(...) nosotros hicimos muchas actividades para que los muchachos diferenciaran el dibujo de la construcción..." (EP)

"...cuando uno trabaja con la calculadora, es tratar de que el diseño integre las dos cosas: lo que el estudiante ya sabe y lo que puede encontrar en la calculadora..." (EP)

4. El profesor percibe que la TEC ha de cambiar su comprensión de algunos objetos matemáticos

"...a reconocer representaciones que no se conocían como es el diagrama de cajas y cuando se tenía eso – eso no lo conocíamos ni nosotros- -eso a mí me queda grande- y reconocer qué información me está dando ese tipo de representación para poder hacer comparaciones, almacenar datos...."(PP)

"...la calculadora lo que le da a uno es expresión, hubo algo que de pronto yo tenía muy arraigado, que era pensar que la división y la multiplicación de segmentos se debía hacer única y exclusivamente en un ángulo agudo, y que los otros no servían...pero en la calculadora uno al construir esto resultaba igual para cualquier tipo de ángulo..."(EP)

"...en el salón de clase, en un tablero, uno siempre lo ve como dibujo y el mismo profesor lo ve como un dibujo. Yo creo que habrá profesores que no lo ven como una construcción, y que se ha enseñado así y ver ese choque eso fue, fue algo que definitivamente le cambia a uno lo que sabe ..."(EP)

5. El profesor percibe que la TEC ha resuelto problemas involucrados en el diseño de actividades de medición concreta de magnitudes continuas.

"...es que es muy distinto...antes cuando les decía que midan con lanas objetos cilíndricos, y luego que los chicos median impreciso entonces que no, que no da ...porque midieron sin juicio y que esto da ***p*** *y se siente mal que no se logró nada...ahora sí hay mucha precisión y sale de una vez que sí... " (PP)*

Este agrupamiento de percepciones de profesores y estudiantes para profesor, revela cantidad de manifestaciones que, a nuestro juicio, muestran conocimiento implícito de parte del profesor, es decir, un saber hacer que parece tener en cuenta las intencionalidades del instrumento y cuya elicitación parece estar en "correlación positiva" con la aceptación de las bondades de la TEC, como socia cognitiva para sus alumnos y la clase y, para sí mismo como docente y aprendiz de matemáticas. Para los alumnos, en cuanto les ayuda en la construcción de verdaderos razonamientos; para la clase, ayudándole a lograr fluidez expresiva y conceptual en dos sentidos:

1. el estudiante particular construye conceptos y relaciones que apuntan hacia los contenidos actuales.

2. expresa la potencia (TEC, C) para integrar menos lineal, pero más complejamente, distintos contenidos curriculares tradicionalmente presentados disgregadamente.

La dupla cognitiva detectada en otras investigaciones con respecto a los estudiantes, es también un hecho relativo a los profesores, no sólo en relación con el conocimiento de objetos matemáticos sino también con otros aspectos de su profesión (por ejemplo el diseño de actividades de medición). La resignificación realizada por profesores y practicantes de objetos matemáticos, la conciencia de su ocurrencia y su producción, dada por la realización práctica de actividades matemáticas que hacen uso de la calculadora, permite mostrar cómo el profesor también aprende matemáticas en el contexto (TEC, C), por ejemplo la comprensión del significado de una constante de proporcionalidad y el uso de las cajas para comprender los estadísticos de orden.

Por otro lado, al analizar los tres grandes agrupamientos, que tocan polos (estudiante, sistema educativo, saber constituido) de las situaciones didácticas en la dupla (TEC, C), encontramos que las diferencias se pueden explicar por el tipo de experiencia realizada durante la enseñanza. Esto es, para los profesores observadores (PO) es difícil incluso aceptar el uso de la calculadora, mientras que para los profesores participantes (PP) o los estudiantes para profesor (EP), que además tienen experiencia en clases gestionadas por resolución de problemas según el modelo apropiativo, la comprensión de las potencialidades de la TEC es mucho mayor y por supuesto también lo es su aceptación de un diseño como (TEC, C).

De las anteriores consideraciones, entonces derivamos el segundo momento de análisis, el cual presentamos a continuación.

Segundo momento: la clasificación

Como ya lo dijimos, la aceptación de TEC como socio cognitivo se hace más evidente en tanto más se haya tenido contacto con su uso, tanto para aprender como para enseñar. Pero, esta aceptación se relaciona también con el tipo de experiencia previa que se tenga con la gestión de una clase por resolución de problemas, en la que se pretende construir sentido. Con lo cual, dada la formación inicial a la que han estado sometidos los practicantes, que incluye contactos tanto discursivos como prácticos con la resolución de problemas, éstos se pueden centrar mucho más, en aspectos relativos a la incorporación en el diseño de actividades que usen más a fondo la distribución de la capacidad, inserta en la TEC, para generar objetos matemáticos, que desde su construcción inicial están gobernados por reglas, signos y representaciones externas al sujeto que conoce, lo que le posibilita el uso de formas de explicación, argumentación y demostración.

Los profesores han percibido la calculadora respecto de su trabajo en el aula como:

1. Un obstáculo (vuelve o sigue dejando al estudiante perezoso; le impide pensar en los procesos y entonces no le permite aprender matemáticas, por andar digitando teclas, el estudiante no aprende matemáticas; es una enemiga que eventualmente lo puede poner en peligro como profesor; posible de vencer a través de aprenderlo y entonces construir problemas adecuados; comete errores ...)

2. Una herramienta (libera de trabajo rutinario; dinamiza la clase y mejora la actitud de los estudiantes; mejora la calidad de anteriores actividades; ...)

3. Un instrumento (cambia la organización de la clase; cambia la estructura de los contenidos; desplaza los esfuerzos cognitivos; mejora la acción comunicativa discursiva...)

y no como:

un instrumento dialogante capaz de colocar al estudiante particular y a la clase como totalidad en comunicación con las voces de tantos matemáticos y pedagogos junto a sus culturas en dirección de sus intenciones. Que su papel pasa entonces por ayudar a develar, para fortalecer y reconstruir, esta relación con la humanidad.

Nuestra exploración parece evidenciar que la percepción de los cambios en las relaciones didácticas está dirigido por la presencia de un saber problematizado y que la valoración de los cambios percibidos está correlacionada positivamente con el tipo de solución encontrada para tal problematización, que entre más se involucre el profesor en el diseño (TEC, C) más avanza en la comprensión de sus tres características (dinamicidad, versatilidad, complejificadora de la acción comunicativa discursiva) logrando que perciba la TEC como un instrumento. Parece indicar también que hace falta otras condiciones para que la (TEC, C) pueda ser entendida como un contexto cuyo carácter trasciende tiempos y lugares para situarse en el centro de la comunicación con la humanidad entera.

A manera de conclusiones

Hipótesis de progresión: teniendo como sustento los agrupamientos realizados y el resultado del análisis presentado, lanzamos nuestra hipótesis de progresión. Esta hipótesis de progresión -para la que no tenemos evidencia respecto al profesor iniciativo, por lo cual de este modelo no afirmamos nada- indica un cierto "itinerario", de la relación entre el modelo didáctico del profesor (normativo, apropiativo) y la apropiación de las gramáticas incorporadas en la TEC.

La calculadora respecto de la clase como totalidad es concebida como:

	Obstáculo	Herramienta	Instrumento de reorganización cognitiva	Instrumento de diálogo vinculante con las matemáticas como cultura.
Normativo	x	x		
Apropiativo	x	x	x	

Afirmamos pues, desde nuestra experiencia y desde los resultados de nuestra aproximación al presente análisis, que si bien el hecho de incorporar esta nueva tecnología al aula de clase coloca a los profesores frente a situaciones de mejoramiento de su gestión en el aula, transforma su concepción de rechazo absoluto a la TEC hacia consideraciones como una herramienta útil, que permite proponer actividades complejas a los estudiantes logrando que las comprendan y las resuelvan. Por otra parte, a pesar de que un profesor haya gestionado su clase por resolución de problemas y esté dispuesto a incorporar el conocimiento y la voz del estudiante en su clase, es también cierto que esto no lo coloca en condición inmediata de asumir la calculadora como un instrumento de diálogo vinculante con las matemáticas como cultura. Es más, en un momento dado se le convierte en obstáculo ya que debe reelaborar el tipo de problemas para que con esta nueva mediación sigan siéndolo.

Una tensión que resaltamos, por su importancia en el rediseño de la actividad del profesor, es la posible contradicción manifiesta por muchos profesores, entre el tiempo que es necesario invertir para aprender el manejo de la calculadora, y las posibilidades que la calculadora le brinda al estudiante (y a él mismo) para resolver problemas, que por su dificultad no podrían ser abordados usando otra mediación. De la solución que el profesor de a esta tensión, privilegiando uno de los dos polos de la contradicción, dependen los cambios en sus percepciones de las relaciones didácticas y por tanto su transformación hacia modelos didácticos más flexibles. Si privilegia el aprendizaje de los estudiantes y la complejificación de las actividades matemáticas en el aula, puede asumir el manejo de la calculadora como aprendizaje de relaciones matemáticas y formas de producirlas; en contraste con la segunda opción, privilegiar el tiempo, lo conduce a aceptarla tal vez como herramienta útil para realizar procedimientos tediosos o para realizar gráficas.

Bibliografía

Brousseau, G. (1983) *Ingénierie didactique*. 2eme Ecole de didactique des maths. Citado por Doaudy.

C harnay , R. (1988) *Aprender (por medio) de la resolución de problemas.* En Grand. N. Revista de matemáticas, ciencias y tecnología para los maestros de primaria y pre-primaria, Nº. 42, enero de 1988. Documento CRDP. Grenoble, Francia.

Chevallard , Y. et **Johsua , M.** (1985) *La transposition didactique*, du savoir savant au savoir ensegné, Grenoble :La penseé sauvage.

Douady , R .(1995) *La didáctica de las Matemáticas en la actualidad*. En: Modulo de Educación Matemática Ibagué, Tolima : Universidad del Tolima.

Ministerio de Educación Nacional (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Serie Lineamientos Curriculares. Bogotá, Colombia.

Moreno, L. y Sacristán , A (2002, en prensa) *Abstracciones contextualizadas: Conjeturas y generalizaciones en un Micromundo Computacional.* México: Fondo de Cultura Económica.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2002.) *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas.* En: Memorias Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá : Ministerio de Educación Nacional

Morton, F. (1995) *Fenomenography: A perspective in investigation for searching diferent understandings about reality*. In Sherman and Webb (Eds) Qualitative research in education. Forms and Methods. London :The Falmer Press.

Resolución de problemas geométricos en el ambiente de geometría Cabri por profesores de matemáticas en formación

Octavio Augusto Pabón Ramírez

Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía

Universidad del Valle, Cali

Resumen. El presente artículo muestra algunas de las estrategias consideradas por un grupo de profesores de matemáticas en formación, ante un problema geométrico no rutinario abordado en el ambiente Cabri incorporado a la calculadora TI92. De esta manera, se intenta constatar algunos rasgos particulares del trabajo de los resolutores “expertos” (alumnos universitarios de los primeros semestres de la licenciatura en matemáticas) y los resolutores “novicios” (alumnos de secundaria), en cuanto a las estrategias de solución de problemas

geométricos, en particular tomando como referente la mediación instrumental de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (NTIC).

Introducción

Las investigaciones en educación matemática realizadas a lo largo de la última década, han contribuido a despejar algunos de los interrogantes planteados con relación al enfoque de resolución de problemas matemáticos en el ámbito escolar. Esto ha permitido caracterizar, entre otras cosas, métodos de resolución, tipos de problemas, tipos de resolutores y heurísticas desplegados por los alumnos en la clase de matemáticas. Sin embargo, sólo recientemente se ha integrado a estas investigaciones el análisis del impacto de las *Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación* (NTIC) sobre el desempeño matemático en la resolución de problemas por parte de alumnos de secundaria y profesores de matemáticas en formación. La importancia de este tipo de indagaciones se reconoce en muchas propuestas curriculares, incluyendo a la colombiana que haciéndose eco de esta perspectiva, señala:

... *con el énfasis que se le está dando a la matemática escolar centrada en la resolución de problemas y la intención de realizar conexiones matemáticas con otras áreas de las ciencias y entre ellas mismas, el uso del recurso tecnológico es fundamental para pasar de un currículo centrado en contenidos, a uno centrado en la resolución de problemas. El poder abordar situaciones problemáticas en contextos reales que permitan partir de la obtención de información o datos empíricos, para su posterior sistematización y análisis, es lo que verdaderamente posibilita el cambio. Igualmente, los problemas complejos pueden atacarse con diferentes herramientas matemáticas, lo que conlleva a la integración de las diferentes ramas: geometría, álgebra, estadística, de una manera natural.* (Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas**.** 1999).

En efecto, se reconoce que el trabajo en ambientes computacionales como los de geometría dinámica, permite entre otras cosas *investigar construcciones matemáticas y su significado, trabajar en problemas no rutinarios, formular y explorar conjeturas y determinar patrones generales de funciones recursivas*. Además, el trabajo en estos ambientes da lugar a un hecho extremadamente importante en términos didácticos: *la posibilidad de que los alumnos visualicen el problema desde varias representaciones*, lo cual puede permitir que identifiquen y exploren diversas *cualidades* asociadas al proceso de solución. (SANTOS TRIGO, 2000)

En este sentido, resulta interesante y necesario preguntarse sobre la *calidad matemática* de ciertos problemas que se han constituido de cierta manera en *paradigmáticos* en la investigación en didáctica de las matemáticas, como en el aula de clases. En particular, en el presente artículo se aborda a través del desempeño matemático de profesores en formación, un problema estudiado por algunos de los investigadores más influyentes en el desarrollo del enfoque de resolución de problemas (POLYA, 1945, Schoenfeld, 1985) y que recientemente se ha convertido en objeto de indagación didáctica en ambientes de geometría dinámica (SANTOS TRIGO, op. cit)

Marco teórico

En el escenario internacional, la investigación didáctica ha permitido desarrollar una conceptualización en torno a la implementación de las tecnologías computaciones en el ámbito escolar, que resulta ser bastante funcional para dar cuenta del trabajo en el aula. Las ideas relacionadas con los sistemas conceptuales que se proponen como organizadores del trabajo y que están estrechamente relacionadas con la teoría y la práctica del trabajo con las calculadoras, comprenden: *la mediación instrumental, las representaciones semióticas, los procesos de abstracción y generalización en contexto, las situaciones problemáticas y la evaluación de la práctica.* (MORENO, 2000).

Una de las categorías que se privilegia en este artículo es *la mediación instrumental* (en palabras sencillas, cómo el software Cabri Géomètre incorporado en la calculadora TI92 cambia o modifica las estrategias intelectuales del alumno y cómo moviliza las formas de conocimiento mismo que se van desarrollando a partir de la herramienta). El diseño de *situaciones problemáticas (entendidas como detonadores de redes conceptuales),* es elemento de análisis imprescindible en la búsqueda de propuestas de intervención en el aula que potencien la *dimensión simbólica y la interactividad*, en las cuales se reconoce que el uso del computador produce un impacto en las experiencias matemáticas de los alumnos (BALACHEFF & KAPUT, 1996). Se trata entonces de indagar cómo se pueden diseñar actividades de aprendizaje en las cuales el uso de la tecnología ayude o enriquezca el estudio de las matemáticas (MORENO & SANTOS TRIGO, 1999) y den cuenta del papel del docente en una clase enriquecida por cuenta de la tecnología.

De otra parte, al indagar el importante asunto para la enseñanza de las matemáticas, de cómo la herramienta tecnológica *media* el conocimiento y cómo este proceso de mediación realmente cambia el conocimiento en sí mismo y su uso, es evidente que se deben proporcionar evidencias empíricas que permitan hacer visible la *emergencia de una nueva epistemología de la matemática* creada por el uso de esta tecnología. Ejemplos de esto lo constituyen las investigaciones que han señalado, entre otras cosas, que la modelación es más relevante en la era del computador de lo que fue antes e igualmente que la naturaleza de la prueba es también un asunto susceptible de transformación por el uso de la tecnología (GUTIERREZ, LABORDE, NOSSS & HARKOV, 1999).

En este panorama la *Resolución de Problemas* se constituye en un espacio privilegiado para dar cuenta de la evolución cognitiva de los alumnos, pues permite un acercamiento práctico y experimental al estudio del *desempeño matemático* de los alumnos cuando se enfrentan a la solución de problemas no rutinarios en ambientes computacionales como el Cabri. Se reconoce así, la posibilidad de contar con una amplia gama de representaciones ejecutables que permiten la manipulación “directa” de los objetos geométricos (por ejemplo, a través del *dragging*), contribuye a la aparición de una amplia variedad de *estrategias* que acercan a los alumnos a la solución de problemas en el ámbito escolar y extraescolar. Aunque tradicionalmente algunos de los problemas se han abordado en el ámbito escolar en el ambiente de lápiz y papel, desplegándose de esta manera sistemas de representación muy concretos (y por ende ciertas formas de sistematización del conocimiento matemático), en la actualidad se considera que un *objeto matemático* como tal no se agota en sus diferentes sistemas de representación, por lo cual cuando se aluden a la incorporación de las NTIC en la enseñanza de las matemáticas se parte del principio de que tal tipo de instrumentos de mediación favorece la interacción del alumno con otros sistemas de representación que tienen su propia naturaleza y posibilitan en el alumno otras alternativas de sistematización del conocimiento matemático.

Metodología

En la experiencia de aula participaron 15 estudiantes del tercer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, durante 6 sesiones de clase de una hora de duración, durante tres meses. En las sesiones iniciales se permitió a los profesores en formación que enfrentados al enunciado del problema desplegaran sus estrategias espontáneas de solución. Posteriormente se socializaron y discutieron estas estrategias. En las sesiones siguientes, con base en indicaciones y preguntas con relación al poder mediador del ambiente Cabri, se analizó una experiencia con el mismo problema descrita por Santos Trigo, la cual fue reproducida por los profesores en formación. Nuevamente se discutió el trabajo de los profesores. Finalmente, y ante una solicitud de realizar una búsqueda bibliográfica del problema (versiones diferentes o adaptaciones), se trabajó nuevamente en el ambiente Cabri y se socializaron los resultados enfatizando en la importancia de que los alumnos calificaran y eventualmente validaran sus estrategias.

El problema

Se reconoce por parte de algunos autores, que un ingrediente esencial de los cursos de resolución de problemas para docentes en ejercicio o en formación, es que éstos puedan tener una experiencia similar de resolución a la de sus alumnos. Un modelo que se considera adecuado para intentarlo, es plantear a los profesores, no los problemas que tendrán que plantear a sus estudiantes, sino *problemas cuya dificultad para ellos sea similar a la que aquellos problemas tendrán para sus alumnos*. (BROWN, 1985). De acuerdo con este principio, se propuso un problema que - en cuanto al grado de dificultad – no requería grandes recursos (conocimientos matemáticos y manejo de la calculadora), que era un problema enmarcado dentro de sistemas matemáticos con los que estaban familiarizados los profesores en formación (geométrico y métrico) y que tenía un alto potencial heurístico cuando se lo abordaba en el ambiente de geometría Cabri. En efecto, se trataba de un problema que mostraba la importancia del *acceso a recursos matemáticos básicos para trabajar y resolver problemas no rutinarios.*

El problema formulado, *inscribir un cuadrado en un triángulo cualquiera*, estuvo precedido de una serie de actividades relacionadas con la construcción de figuras geométricas y problemas relacionados con la invarianza del área y el perímetro. Este problema fue abordado por Polya (1945) y luego por Schoenfeld (1985) y recientemente por Santos Trigo (2000). Es con relación al trabajo del último autor quien lo abordó con apoyo de la tecnología, que se pueden señalar algunas diferencias significativas entre las heurísticas de los alumnos de secundaria (de México) a los que inicialmente se planteó el problema y las heurísticas desplegadas por los profesores en formación de la licenciatura en matemáticas (Universidad del Valle, Colombia), de las que se ocupa este artículo.

Así por ejemplo, los alumnos de secundaria (de México) al leer la formulación del problema: *inscribir un cuadrado en un triángulo dado. Dos vértices del cuadrado deben estar en la base del triángulo, los otros vértices del cuadrado en los otros dos lados del triángulo, uno en cada uno,* formularon preguntas generales que apuntaban a comprender el problema y establecer condiciones en términos de la cuantificación de propiedades como áreas, perímetros y pendientes. Igualmente sugirieron la adopción de la estrategia de relajar una de las condiciones originales del problema (útil de tomar en consideración cuando el problema envuelve varias condiciones) y explorar su comportamiento a través del análisis de casos particulares como planteaba Polya. El diseño de acuerdo con las condiciones del problema y el examen de los casos particulares a través del *dragging* del ambiente, los llevó a reconocer que los puntos p, q & r (vértices superiores derechos de tres de los cuadrados) eran colineales y que en la intersección de la línea pq con el lado del triángulo se encontraba el cuarto vértice del cuadrado inscrito (figura 1). Uno de los aspectos más significativos, es la pregunta que se formularon los alumnos de secundaria, de *si era posible inscribir un cuadrado en cualquier triángulo,* sobre todo si se tiene en cuenta que se abordó un caso particular. La posibilidad de aplicar estas ideas al tratamiento del caso general, se observó en el tratamiento, por parte de los alumnos, de la colinealidad de los puntos p, q & r, a través del criterio de distancia o condición de pendiente.

Algunos estudiantes apelaron a las funciones incorporadas en la calculadora, para lo cual sólo se requiere dibujar un cuadrado. Los alumnos dibujan un caso particular como antes y entonces preguntan por el lugar geométrico del cuarto vértice cuando se mueve o se cambia uno de los lados del cuadrado.

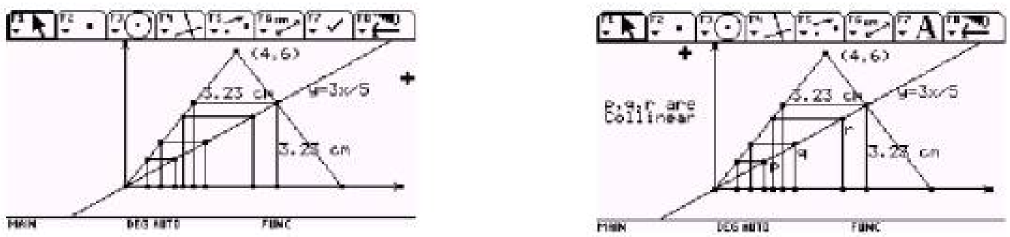


Figura 1

Resultados

Las estrategias espontáneas de solución por parte de los profesores en formación (Colombia), revelaron que en un primer acercamiento al problema, la mayoría de ellos apelaron a estrategias donde predominaba la *medición* (la medida se utiliza como evidencia visual para verificar el hecho), sin establecer relaciones funcionales. Predomina el uso de figuras prototípicas y no hay referencia significativa al poder mediador del ambiente. Así el problema es considerado como muy trivial. El *resultado* **-** entendido como lo que contesta a la pregunta del problema - es simplemente una construcción geométrica. No se percibe la necesidad de introducir elementos que "validen" la estrategia utilizada. (figura 2)

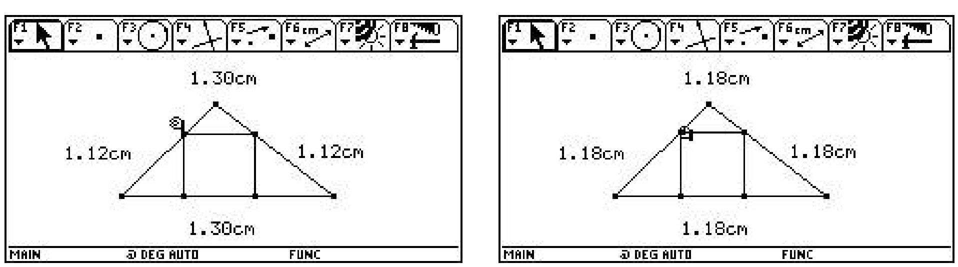


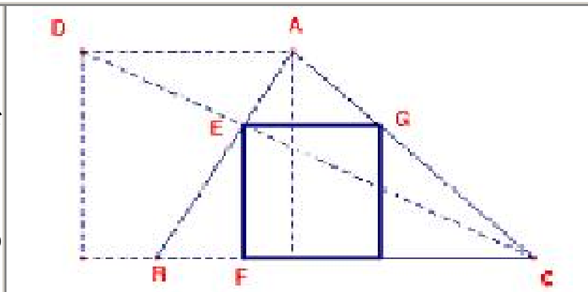
Figura 2

En una segunda sesión se revisó el tratamiento del problema de Santos Trigo, lo cual nos colocaba en los dominios de la *imitación* , que se configura cuando se sitúa a los alumnos en presencia de un modelo de *resolvente competente* y se enseña de alguna manera a analizar esa conducta competente y a compararla con conductas propias o ajenas.

Frente a esto se pudo observar que si bien los profesores en formación pudieron reproducir en el ambiente Cabri el diseño de los alumnos de secundaria mexicanos, no lograron capturar la esencia de la *sugerencia* de *relajar una de las condiciones del problema y examinar casos particulares.* Según ellos, no veían cómo esta estrategia permitía resolver el problema, pues analizar casos particulares no era lo mejor, ya que lo que se debía buscar era una solución *general*. Esta postura se revelaría dramáticamente en el tercer momento de encuentro con el problema, donde se hizo evidente que si bien *la mediación genera estrategias, estas tienen que ser validadas* .

En las ultimas sesiones se socializó la búsqueda realizada por los alumnos en torno al problema, quienes luego de revisar textos de matemáticas, manuales y páginas Web, pudieron darse cuenta que no se enfrentaban a un problema conocido y mucho menos rutinario de la clase de matemá ticas. Algunos de los tratamientos del problema que pudieron localizarse, estaban asociados a la caracterización de sus cualidades pero desde el punto de vista cognitivo. Sin embargo, se recalcó que lo que se buscaba eran abordajes que dieran cuenta de la posibilidad de acceder a recursos matemáticos y computacionales que ayudaran a aproximarse a la solución del problema.

De esta manera, se privilegió una actividad que correspondía básicamente a un "tratamiento matemático". La actividad seleccionada (DIAZ, 1994) explicaba cómo se podía *inscribir un cuadrado en un triángulo*. El problema que estaba acompañado de su "demostración" se describía en los siguientes términos: d*ado un triángulo cualquiera inscribir en él, con regla y compás, un cuadrado.* (figura 3)

Solución: Tomando como lado la altura, trazamos un cuadrado. Uniendo los puntos *D* y *C* obtenemos el punto *E* por el que trazamos una perpendicular a la altura para obtener G. Trazando perpendiculares a *BC* por *E* y *G* se obtienen los demás vértices del cuadrado pedido.	 Figura 3

Una vez que esta construcción fue realizada en clase utilizando la calculadora, los alumnos no dudaron en señalar que este tratamiento era el que consideraban más potente, pues garantizaba que las condiciones del problema se cumplieran para "para cualquier triángulo" pues al arrastrar los vértices del triángulo original, el cuadrado continuaba inscrito. (figura 4)

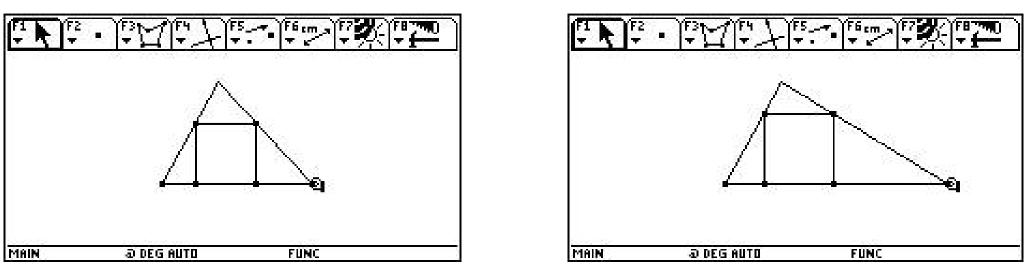


Figura 4

Solo a través del poder mediador del ambiente Cabri, sería posible convencerlos de que al realizar tal procedimiento ya no se trataba del mismo triángulo y el razonamiento era débil en términos de la *generalidad.* En efecto, la misma potencia del ambiente, en términos de posibilidades de representación, conduce a la aparición de lo que podríamos llamar un *conflicto cognitivo*. En efecto el arrastre de los vértices del triángulo “hacia fuera” reforzaba la credibilidad en este tipo de construcción, pero cuando el arrastre era “hacia adentro”, aparecían hechos visuales tales como la misteriosa “*desaparición* ” del cuadrado inscrito que no se podían atribuir solamente a las condiciones propias del ambiente. (Figura 5)

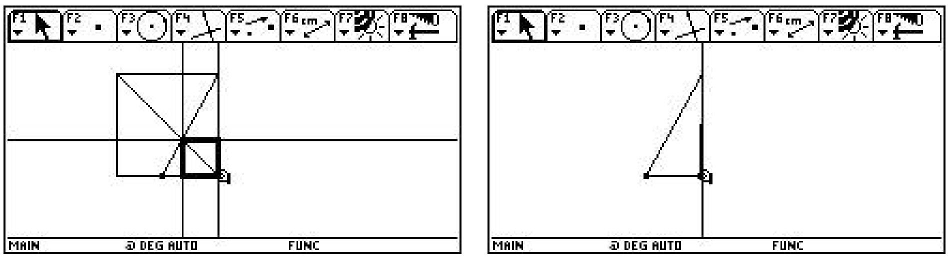


Figura 5

Se puede reconocer un sesgo particular: la validez de algunos procedimientos ya no descansa en las *estrategias* sino en la *credibilidad*. En este caso particular, el profesor en formación, frente a una estrategia que no es compatible con su sistema de creencias, prefiere la suya. Para una gran mayoría, la validez de la estrategia anterior, descansa en el hecho que se cuenta con una *demostración geométrica clásica*, que garantiza su validez y que resulta ser más potente para un trabajo en el aula en los niveles de escolaridad en que se puede proponer el problema ya que usualmente en las clases de geometría no se trabajan temáticas asociadas a la función lineal por ejemplo, contenido temático que se hace visible en la propuesta de Santos Trigo.

Adicionalmente, frente a la limitación de esta construcción, algunos profesores en formación, no descartan completamente la estrategia sino que más bien intentan “ajustarla” con estrategias previas, como aquellas que apelaban al recurso de la medida. En este sentido, se intenta “reforzar” la idea de la construcción geométrica, en este caso, una construcción exacta, añadiendo un elemento “probatorio”. (Figura 6). En otros casos se recurre a la combinación de sus propias estrategias, con otras que incluso fueron descartadas inicialmente pero que “aparentan” ser consistentes desde el punto de vista de la argumentación matemática, Así por ejemplo, aparecen combinadas una construcción “estática” (la construcción geométrica exacta) con una “dinámica” (una variante del diseño de los estudiantes de secundaria mexicanos). Sin embargo, el criterio “visual” sigue siendo dominante cuando se trata de validar el procedimiento. Otras estrategias combinan los tres procedimientos presentados, pero lo hacen sin tener un propósito manifiesto para resolver el *problema*.

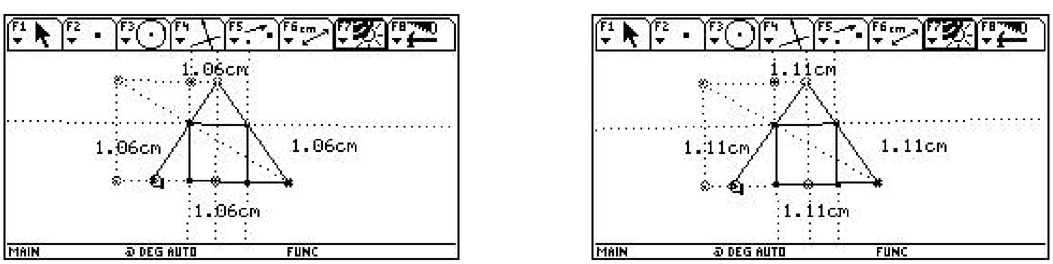


Figura 6

Confrontados los profesores en formación con su arsenal de recursos matemáticos, por ejemplo, los cursos de matemáticas universitarios (que incluyen la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral entre otros), se observó un excesivo virtuosismo en el tratamiento analítico y en la manipulación algebraica y algorítmica de los símbolos, que no se reflejó en un acercamiento productivo a la solución del problema. Se reconoció por parte de los profesores en formación, que era mucho más productivo, el abordaje en el ambiente Cabri, que incluso, lo que inicialmente fue considerado como una estrategia débil, como el uso de la medida, permitió hacer visible otra de las potencialidades que se reconocen en el ambiente: la de diseñar e implementar situaciones que permitan encontrar y explorar diferentes conjeturas. En efecto, como han señalado algunas investigaciones, el uso de la medida les ayuda a confirmar las propiedades geométricas que ellos descubren, y las mediciones les proporcionan fuerte evidencia para convencerlos de estas propiedades (KAKIHNA, 1996) Así, al preguntarse *si era posible inscribir un cuadrado en cualquier triángulo*, algunos profesores en formación, con base en sus diseños, concluyeron que la condición que debe cumplirse es que el triángulo sea acutángulo. Esto explicaría la desaparición "misteriosa" en algunos de los diseños al ser sometidos al *dragging*.

Observaciones finales

Las experiencias reseñadas previamente, son evidencia de problemas estructurales en la formación de docentes que no contempla un tratamiento exhaustivo del modelo de resolución de problemas. Así por ejemplo, no es extraño evidenciar la carencia de control (monitoreo) del proceso por parte de los maestros en formación. Esto se reflejó, inicialmente en el trabajo de los profesores en formación, en el limitado uso de la información disponible (el conocimiento matemático y computacional) y sobre todo en sus estrategias, que en el caso del problema propuesto, inicialmente estuvieron estrechamente vinculadas al "dibujo".

Es aquí donde la mediación instrumental del ambiente, en este caso del Cabri, contribuyó a que se reconociera la posibilidad de apelar a diversas *estrategias* al abordar un problema matemático. En esta misma dirección se advirtió que el poder mediador de la calculadora permite reconocer tempranamente posibilidades de intervención didáctica, como por ejemplo, la relacionada con los procesos de validación en la escuela. Un aspecto de gran trascendencia en las sesiones finales de la actividad propuesta, la utilización simultánea de todas las estrategias que habían aparecido desde el principio y que reconocieran que los problemas pueden tener múltiples soluciones igualmente validas

Referencias

Balacheff N. and **Kaput J.**. (1996) *Computer - Based Learning Environments in Mathematics.* EN: *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 469 -509.

Brown S.I (1985): *Problem-solving and Teacher Education: The Humanism twixt Models and Muddles*, in Morris, R., Studies in Mathematics Education 4, 3-28. París: UNESCO.

G utierrez A., Laborde C., Noss R., Rakov S. (1999) *Tools and Technologies* **.** European Research in Mathematics Education *I*: Group 2. URL: www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html.

Hernández M. A. y **Estrada J.** (1999) *Representaciones matemáticas de estudiantes pre-universitarios en la resolución de un problema de optimización*. Educación Matemática. Vol.11, No. 2 Agosto de 1999, pp. 32 -51

Kakihana K., Shimizu K., Nohda N. .(1996). *From Measurement to Conjecture in Geometry Problems. Student' Use of Measurements in the Computer Environment*. IN: *PME 20*ème,Vol. III. pp.161-168.

MEN (1999) *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas,* Serie Liniamientos Curriculares.

Moreno L. y **Waldegg G.** (1999) *Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas.* Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México.

Moreno L. and **Santos Trigo L. M.** (1998) *An exploration of mathematical qualities of task via the use of technology* . CINVESTAV, México.

Polya G. (1978): *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.

Santos Trigo L. M. (2000): *Students' Approaches to the Use of Technology in Mathematical Problem Solving*. IN: Representation and Mathematics Visualization *(1998 – 2001).*

Schoenfeld A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press

Siñeriz L. y **Santinelli R.**.(1998*). Estrategias espontáneas con uso de CABRI*. En: Educación Matemática. Vol. 10 No. 3, pp. 25-36.

Vadcard L. (1999).*La Validation en Geometrie au College avec Cabri – Géomètre. Mesures exploratoires et mesures probatoires.* Petit X, No. 50.

La Maloka: un caso de apropiación de nuevas tecnologías computacionales en la promoción del pensamiento variacional

Henry Urquina Llanos

Universidad de la Amazonía, Florencia

Resumen. Las representaciones ejecutables de la Calculadora Algebraica TI 92, posibilitan comprensión de la variación y el cambio a partir del abordaje de situaciones problemáticas situadas en el entorno socio cultural del estudiante, aproximando las matemáticas a otros campos de conocimiento. En este reporte se presentan algunos resultados logrados con un grupo estudiantes de grado noveno en el abordaje de una situación problemática vinculada con la construcción de una Maloka, empleando diversas formas de representación ejecutables.

Introducción

El vertiginoso desarrollo científico y tecnológico ha consolidado, como una de las tendencias de investigación en tecnología y medios tecnológicos a nivel mundial, el estudio sistemático de las interacciones simbólicas entre los medios y los procesos cognitivos de los sujetos (Cabero, 1992).

La educación, como proceso multimediado a través del cual se comunica de una generación a otra el legado cultural construido históricamente por la sociedad (que incluye la ciencia y la tecnología), no escapa a esta dinámica global. En el caso específico del conocimiento matemático escolar, que lleva a la formación y desarrollo del pensamiento matemático mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos (MEN, 1998), las posibilidades mediadoras que brindan nuevas tecnologías como las calculadoras algebraicas, se encuentran en el centro de interés académico e investigativo.

Atendiendo a este campo de interés, en el desarrollo de un curso de matemáticas en grado noveno del Colegio Juan Bautista la Salle de Florencia Caquetá, una vez se abordaron las temáticas relacionadas con la noción de función, algunas formas de representación (gráfica y tabular especialmente) y su empleo en "ejercicios de aplicación" a través de metodologías y formas de trabajo convencionales o tradicionales, se pasó a incorporar la calculadora gráfica TI 92, con el propósito de estudiar las posibilidades e implicaciones que ella tiene en la comprensión de la función como variación y sus diferentes formas de representación en situaciones o fenómenos de cambio de tipo constante y lineal.

En el presente reporte, se presentan algunos resultados en relación a la comprensión de la función como variación en la situación problemática de construcción de una Maloka (Huitoto). La Maloka es una construcción representativa de las comunidades indígenas de la Amazonía, que sirve como sitio de encuentro e interacción cultural tradicional mítico mágica.

Marco teórico: La mediación de las representaciones ejecutables en la cognición matemática situada

Los avances científicos de las últimas décadas de la humanidad, en procura de superar los límites del sistema sustentado en la energía, la materia y el espacio, han presionado la emergencia de nuevas perspectivas basadas en la abstracción y desmaterialización, en el cual la función prevalece sobre el objeto, es decir, el software, prevalece sobre la hardware, la información reemplaza materia y energía. (Defilippe, 1992)

De igual manera, los diversos estudios acerca de la cognición humana, han llevado a ver la cognición *...no tan sólo como "algo que ocurre en la cabeza del individuo", sino como algo que tiene indu dable connotación sociocultural. La cognición de un individuo se articula dialécticamente con la cognición de los demás...* (Moreno & Waldegg, 2001). Para alcanzar el progreso cognitivo, a partir de la interacción en el abordaje de situaciones problema, se debe generar conflicto sociocognitivo, que moviliza la presentación de diferentes centraciones cognitivas (puntos de vista, métodos, respuestas,...) y la búsqueda de una respuesta común al problema.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se desarrollan en procesos de interacción social en contextos determinados que influyen y determinan la naturaleza del conocimiento construido (Cognición situada), en donde cobra pertinencia el principio de mediación instrumental, en términos de que *todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico* (Moreno & Waldegg, 2001). De esta forma se asume que el efecto del uso de herramientas en los seres humanos es fundamental, en tanto que ayuda a relacionarse de modo más productivo con su ambiente externo y afecta intensamente las relaciones internas y funcionales del cerebro humano (Vygotski, 1995).

En el principio de mediación (Wertsch, 1993), convergen la naturaleza mediada de la actividad cognitiva y los recursos representacionales para el desarrollo de la cognición. No hay actividad cognitiva al margen de la actividad representacional. Por representaciones se entienden, en al ámbito de las matemáticas, nociones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes (Lupiañez & Moreno, 2001), que se articulan a un sistema representacional o de notación constituido por un sistema de reglas para *identificar o crear caracteres, operar en ellos y determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)* (Kaput, 1992).

La calculadora TI92 se asume como una herramienta de mediación en la construcción e internalización del conocimiento matemático, que encarna sistemas de representación ejecutables, que permiten trabajar dinámicamente un problema desde diferentes enfoques cognitivos. En este sentido, la educación matemática tiene como propósito central, el lograr fluidez representacional, que consiste fundamentalmente en el abordaje de una situación problema a través de diversos sistemas de representación (gráfico, simbólico, geométrico, numérico) y la capacidad para interpretar los resultados del tratamiento que se de a tales sistemas de representación mediante el instrumento ejecutor de que se dispone (Armella & Waldegg, 2001; Campistrous & López, 2000).

El Proceso Metodológico

En el desarrollo de un curso de matemáticas en el grado noveno del Colegio Juan Bautista la Salle de Florencia Caquetá orientado por el Profesor Eduardo Polanía, inicialmente se abordaron los temas relacionados con la función constante, lineal y los objetos matemáticos a ellos vinculados a través de metodologías y estrategias convencionales o tradicionales (Uso del tablero, explicación verbal de objetos matemáticos, ejemplos de funciones y sus elementos).

Una vez desarrollado dicho trabajo, se incorporó el trabajo con la calculadora gráfica TI92, para efectos de estudiar las posibilidades de las representaciones ejecutables de esta herramienta en la comprensión de la función como variación en situaciones constantes y lineales, a partir del abordaje de una situación problema relacionada con la construcción de una Maloka. Para ello, previamente los estudiantes hicieron consultas en el centro indigenista acerca de qué son las malokas y las características centrales relacionadas con su construcción.

Posteriormente, se les hizo entrega de un taller de trabajo en el cual, con apoyo del programa Cábri Géométre, se les presentó un esquema general que servía como un referente elemental para diseñar y construir la Maloka (ver figura 1):

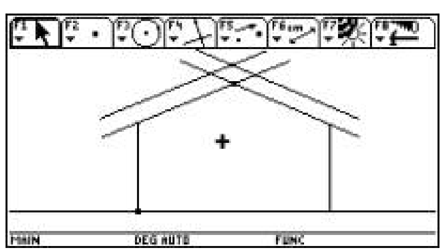


Figura 1: Esquema Gráfico General de la Maloka.

Teniendo como referente la figura 1, se solicitó a los estudiantes su construcción con apoyo de la Calculadora TI 92, empleando Cabri Géomètre. Para ello se les sugirió:

a) Construir los ejes de coordenadas.

b) Ubicar puntos sobre los ejes *x*, *y* para escoger el tamaño de la Maloka.

c) Trazar las rectas necesarias para la construcción.

d) Trazar rectas paralelas a las trazadas en c).

e) Identificar cada recta con la ecuación respectiva.

f) Ocultar los ejes de coordenadas.

A partir de la representación elaborada por los estudiantes se plantearon interrogantes en relación a las características matemáticas del techo, las paredes y el piso de la Maloka, así como respecto a las relaciones entre esas partes de la construcción.

Finalmente los estudiantes, con acompañamiento del profesor, a partir de las representaciones verbales, simbólicas y gráficas y los referentes matemáticos y geométricos que las sustentan, llegaron al diseño y construcción de la Maloka, argumentando acerca de los objetos matemáticos empleados.

Resultados

Es importante indicar que el grupo de estudiantes con el cual se abordó la situación problemática recién iniciaban su trabajo con la calculadora. Los estudiantes empezaron por ubicar en la calculadora el programa Cabri Géomètre, generando su archivo personal (New).

Teniendo como referente la figura. 1, incluida en el taller o guía de actividad para los estudiantes, reprodujeron la gráfica y con apoyo del asistente de ecuaciones, determinaron la ecuación de las rectas que daban forma al piso, la pared y el techo. Posteriormente construyeron otras rectas para ir dando mayor forma tanto al techo como a la pared, encontrando que el techo se va formando a medida que se varía la pendiente y se preserva un mismo punto de corte con el eje *y*.

Posteriormente, teniendo como referente las orientaciones dadas en el taller o guía de actividad para los estudiantes, trazaron el eje de coordenadas (F8: 9: Format); trazaron diversas rectas (con F2: 4: Line) para empezar a definir gráficamente la Maloka: una recta paralela al eje *x* por la parte de abajo y otras rectas paralelas al eje *y* (una a la derecha y otra a la izquierda) equidistantes al eje *y*. Tal como se muestra en la figura. 2:

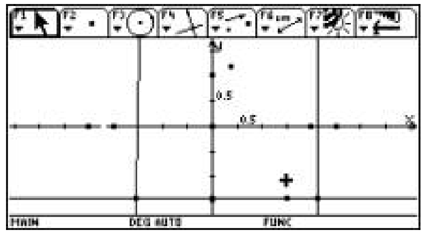


Figura 2. Empezando a definir algunos elementos estructurales para construir la Maloka.

Empleando segmentos (F2: 5:Segment) sobre las rectas trazadas, definieron el tamaño del piso, paredes y el techo de la Maloka, así como los rangos de variación. Aprovechando las posibilidades del asistente de ecuaciones (F6: 5: Ecuation & Coordenates), indicaron en pantalla las ecuaciones de las semirrectas del te cho, las paredes y el piso de la Maloka, tal como se muestra en la figura 3:

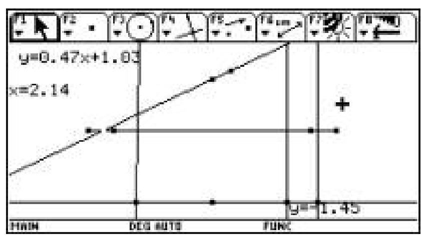


Figura 3: Definiendo piso, paredes y techo de la Maloka.

Seguida mente ocultaron las coordenadas, las rectas y únicamente dejan las semirrectas que al variar y colocarles traza, generen el techo y las paredes de la Maloka, dado que el piso se mantiene constante, como se puede observar en la figura. 4:

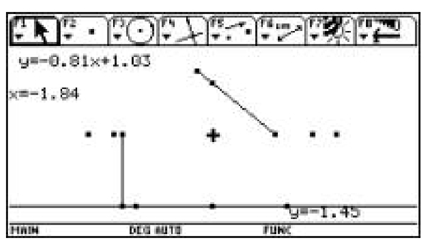


Figura 4: Objetos matemáticos que al variar permiten diseño gráfico de la Maloka.

Finalmente, definen la traza sobre los segmentos que definen techo y paredes y se anima el punto que hace variar el sistema representado, llegando a la representación de la Maloka, una construcción símbolo de la cultura y las tradiciones de los pueblos indígenas de la Amazonía (ver figura 5).

Las posibilidades de las representaciones ejecutables de la Calculadora TI 92, se constituyen en un escenario sensacional para re - crear y articular diversas formas de pensamiento matemático y la visualización (virtual) del comportamiento (variación) de los objetos matemáticos en situaciones determinadas.

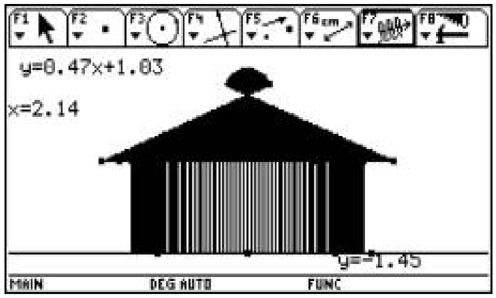


Figura 5: La Maloka, símbolo cultural de los pueblos de la Amazonía.

A pesar de que los estudiantes, mediante métodos y estrategias convencionales (tradicionales) de trabajo, habían abordado los objetos matemáticos que emplearon en la construcción de la Maloka, la posibilidad de observar la variación y comparar diferentes sistemas de representación (verbal, simbólico, gráfico, geométrico), posibilitó la comprensión e internalización de la función como variación y la comprensión de los objetos matemáticos vinculados a ella, lo que se constituye en una herramienta poderosa para avanzar posteriormente en el ámbito del cálculo. Cobra sentido, la variación de la pendiente de la función que genera el techo; la preservación constante del punto de corte de dicha función con el eje Y, que al variar genera la familia de funciones que da origen al techo de la Maloka ; el comportamiento constante de una función y su razón de ser, como es el caso de las paredes y el piso de la Maloka; la observación y exploración sobre la gráfica, su representación simbólica, geométrica y la articulación de una argumentación verbal y escrita para comunicarse con los demás compañeros.

De igual manera, permitió la exploración, el planteamiento de conjeturas, la comprobación de dichas conjeturas, el establecimiento de conclusiones a nivel personal y colectivo.

Cabe destacar aquí, las posibilidades de comunicación e interacción a partir de los aportes personales al trabajo colectivo. Por lo general, por bien diseñada que esté una situación problemática que se lleve al aula de clase, empleando herramientas mediadoras convencionales, como lápiz, papel, regla, compás, tablero, marcadores, entre otros, las posibilidades de conjeturar, explorar respuestas y colocar en el escenario colectivo las reflexiones y avances es menor y, quizá mucho más limitada, que con la mediación de la calculadora.

La ejecutabilidad y dinamismo de las formas de representación de la calculadora, motivan a la pregunta y reflexión personal, a la pregunta al compañero, a compartir lo que se hace, a explicar lo que se hace, motivando a la generación gradual de formas de argumentación y demostración en una nueva dinámica de hacer matemática escolar. Si esto se acompaña con la elaboración de registros escritos lo más detallado posibles por parte de los estudiantes, permite desde los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, contribuir a la producción escrita y al desarrollo de competencias comunicativas en y desde las matemáticas. Algo que incluso hoy, se considera una tarea difícil por parte de los maestros de matemáticas y otro de los retos trascendentales de los sistemas educativos del mundo.

Conclusiones

Las matemáticas son un saber fundamental de la cultura que circula en ambientes escolares. La cognición humana, tienen connotación socio cultural en tanto que los procesos cognitivos de una persona, se articulan dialécticamente con la cognición de las demás.

Las matemáticas escolares, tienen como propósito central la formación y el desarrollo del pensamiento matemático mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos a partir de la mediación instrumental material o simbólica. En la mediación instrumental convergen la naturaleza mediada de la actividad cognitiva y los recursos representacionales para el desarrollo de la cognición.

Las representaciones en matemáticas son nociones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes que se articulan a un sistema representacional o de notación constituido por un sistema de reglas para: Identificar o crear caracteres, operar en ellos y determinar relaciones entre ellos.

La educación matemática tiene como propósito central, el lograr fluidez representacional, que consiste fundamentalmente en el abordaje de una situación problema a través de diversos sistemas de representación (gráfico, simbólico, geométrico, numérico) y la capacidad para interpretar los resultados del tratamiento que se dé a tales sistemas de representación mediante el instrumento ejecutor de que se dispone

La calculadora es un instrumento de mediación que dispone de sistemas de representación ejecutables, que a través de su interacción permiten promover el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la observación dinámica del papel de los objetos matemáticos en el abordaje de una situación problemática determinada.

Las representaciones ejecutables (simbólicas, gráficas, geométricas, gráficas, tabulares) de la TI 92, permiten visualizar, comprender e internalizar la función como variación en situaciones problemáticas situadas en el contexto socio cultural en el cual se desarrollan los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

La Maloka es una construcción representativa de la cultura de los pueblos indígenas amazónicos, cuyo proceso de modelación matemática implica la comprensión de la función como variación a partir del empleo de las representaciones ejecutables de la calculadora.

La sistematización escrita de los procesos de exploración, conjeturación, reflexión personal, colectivización de los aportes personales y conclusiones colectivas, permite desde los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas contribuir a la producción escrita y al desarrollo de competencias comunicativas en y desde las matemáticas escolares.

Referencias

Cabero Almenara J. (1992) *Investigación Audiovisual y Nuevas Tecnologías,* Universidad de Sevilla. Sevilla, España.

Campistrous Pérez L.A. & López Fernández, J.M.(2000) *La calculadora como herramienta heurística,* La Habana Cuba.

Defilippe M. (1992) *Alianza entre ciencia, tecnología e industria,* Segunda Edición, Trillas, México D.F.

Kaput J . (2001) *Technology and Mathematics Education,* e n: Gómez P. & Carulla C. *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas,* ASOCOLME – GAIA. Santafé de Bogotá D.C. Colombia.

Lupiáñez J.L. & Moreno Armella L.E. (2001) *Estudios de Doctorado: Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática,* Universidad de Granada. España.

Ministerio de Educación Nacional. (1998) *Matemáticas: Lineamientos Curriculares,* Primera Edición. Santafé de Bogotá D.C, Colombia.

Moreno Armella L. & Waldegg G. (2001) *Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas,* CINVESTAV – IPN, México, D.F. 2001. En prensa.

Vygotski, L. S. (1995) *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores,* Crítica, Barcelona, España.

Wertsh J. (1993) *Voces de la mente*. Madrid. España, e n: Moreno Armella, L. & Waldegg, G.(2001) *Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemática,* . CINVESTAV – IPN, México D.F.

Exploraciones acerca de ángulos congruentes a partir de *ambientes de aprendizaje dinámicos*

Lorenza Lozano Moreno

Colegio Distrital Repúbica de Costa Rica, Bogotá

Leonor Camargo Uribe

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá

Resumen. El artículo presenta una experiencia de aula sobre un tema geométrico abordado como una propuesta de Situación Problema. Se plantearon importantes estrategias de solución en la exploración de ángulos congruentes, en el contexto de Geometría Dinámica del programa Cabri. Este nuevo ambiente hizo que los roles de los estudiantes y el profesor fueran más dinámicos, haciendo del aprendizaje en geometría un proceso más significativo.

Introducción

La enseñanza de la geometría en la educación tradicional se aborda generalmente mediante la presentación de un compendio de definiciones y fórmulas proporcionadas por el maestro, seguidas de algunos ejemplos. El papel de los alumnos consiste en consignar lo que el profesor explica para luego memorizar dichas definiciones y fórmulas y responder las preguntas en las evaluaciones. En este ámbito, nociones como la de ángulo, son asociadas frecuentemente por los estudiantes con apreciaciones de tipo perceptual, como posición y tamaño y la congruencia de ángulos con igualdad en la medida. Esto debido quizás, a la pobreza del tratamiento de los objetos de estudio, ya que el ambiente rígido de trabajo en el aula de clase limita el tratamiento de los objetos de estudio a unas pocas representaciones, propuestas por el docente la mayoría de veces. El estudiante entonces se limita en su acción y por lo tanto en la posibilidad de ampliar su conocimiento.

La experiencia de aula que se presenta, tuvo como propósito modificar el ambiente de aprendizaje a partir de un enfoque didáctico diferente, que parte de una situación problemática relativa a la construcción de ángulos congruentes, en la cual, la acción del estudiante cambia y el objeto de estudio se convierte en fuente para el establecimiento de relaciones y la identificación de invariantes geométricos. Este ambiente es posible gracias a los contextos tecnológicos que movilizan y amplían el campo experiencial del estudiante. El programa Cabri Géomètre se presenta como una alternativa de exploración dinámica y experimentación de una realidad virtual en la cual el estudiante exterioriza sus creencias acerca de los ángulos y su medida, enriquece sus argumentos acerca de la justificación de la congruencia de ángulos y propone la solución al problema mediante la identificación de las propiedades de los objetos geométricos y sus relaciones.

Hipótesis. El arrastre y la traza activada en el entorno computacional, permitieron identificar propiedades geométricas relevantes en la construcción de ángulos congruentes.

Marco teórico

Las ideas que enmarcan la propuesta y sirven como referente para la evaluación y el análisis de la experiencia de aula, se puede sintetizar en tres afirmaciones:

- la comprensión en geometría se logra a partir de la articulación de diversas representaciones,

- el aprendizaje significativo se logra a través de un ambiente de situación problema y,

- los contextos de geometría dinámica favorecen la construcción de ambientes de situación problema y permiten la articulación de diversos sistemas de representación, contribuyendo así al aprendizaje de las matemáticas.

La primera afirmación está sustentada por diversos investigadores quienes manifiestan que sin recurrir a la idea de representación es imposible estudiar los fenómenos relativos al aprendizaje. Una persona aprende cuando *domina los distintos sistemas de representación y los diferentes tipos de actividades asociadas a estos* (Rico y Romero, 1999). En matemáticas, esta idea cobra mayor peso pues, como lo plantea Duval (1996), en el aprendizaje de un objeto o concepto matemático las representaciones tienen un carácter imprescindible, pues los objetos de conocimiento no son perceptibles por lo que solo pueden estudiarse mediante sus representaciones. El aprendizaje en matemáticas implica pasar de un tipo de representación a otra, avanzando en el nivel de formalización de las representaciones que se usan (Moreno y Waldegg,1992).

Es cuestionable pensar bajo estos presupuestos, que la enseñanza de las matemáticas a partir de la presentación formal de los conceptos, produzca buenos resultados. La pobreza representacional, sobre todo si la única versión de los conceptos que se tiene es la formulación en un lenguaje sintáctico poco significativo para los alumnos, conduce a la dificultad de su aplicación en la resolución de problemas en un contexto de la realidad o de una disciplina. Dada la naturaleza de ese aprendizaje, adquirido generalmente de manera restringida y memorística, los alumnos no logran transferir sus conocimientos a situaciones nuevas.

Proporcionar ambientes enriquecidos se convierte en una responsabilidad de los docentes, en donde los estudiantes tengan la oportunidad de explorar ideas, socializar sus indagaciones y construir conocimiento colectivamente, a partir de la utilización de diversas representaciones.

Esto se logra si se favorece un ambiente de *situación problema* como contexto dentro del cual tenga lugar el aprendizaje.

El enfoque didáctico de *situación problema* aplicado a la geometría, propone entonces privilegiar la actividad del alumno sobre la contemplación pasiva de figuras, símbolos y memorización de conceptos para desarrollar la comprensión de estos a partir de la identificación de invarianzas bajo distintas transformaciones. Se trata de que el aprendiz avance progresivamente en la comprensión y el conocimiento de la geometría mediante la formulación de problemas que le brinden múltiples oportunidades de diseñar, explorar, modelar, conjeturar, definir y argumentar para que posteriormente y cuando esté abonado el camino para ello, entienda mejor la necesidad de las definiciones y la rigurosidad de las demostraciones, en un contexto puramente matemático.

Al favorecer la indagación, el análisis y la propuesta de alternativas de solución, los problemas se constituyen en un desafío de carácter atrayente, divertido, y creativo, que permiten al estudiante exteriorizar sus conocimientos previos para generar hipótesis. Al estudiar la información que aparece en un problema, organizarla e identificar las regularidades presentes en la situación, surgen aspectos matemáticos relevantes y se genera nuevo conocimiento.

Construir estos ambientes se convierte en un reto para los educadores quienes no sólo deben formular problemas interesantes para que los estudiantes se motiven y pongan a prueba su curiosidad, sino que permanentemente deben orientar el trabajo hacia la construcción conceptual, la participación libre y espontánea, la aceptación y valoración de los aportes individuales y la expresión de las ideas, en un ambiente de buena comunicación. Afortunadamente se cuenta hoy en día con programas de geometría dinámica que no sólo favorecen el trabajo con múltiples representaciones sino que, al estar instalados en calculadoras graficadoras con dispositivos para socializar en público las construcciones individuales, favorecen ambientes de aprendizaje de situación problema.

En contextos de geometría dinámica, como el programa Cabri Géomètre, la conceptualización de los objetos geométricos no se hace a partir de algunas pocas representaciones pues la posibilidad de transformar de manera continua las construcciones, mediante la opción *arrastre* de una figura, permite barrer un basto campo de representaciones asociadas. Las propiedades de las figuras emergen como los invariantes de las representaciones cuando se someten al movimiento. La posibilidad de exploración del comportamiento de las figuras geométricas permite una interpretación matemática de las mismas y favorece la conceptualización.

Al tener un contexto de exploración se favorece además en la clase, un ambiente de construcción de conjeturas y el deseo de presentar a los compañeros las producciones individuales o grupales. Las propuestas a los problemas matemáticos son validadas mediante la argumentación, la socialización y el intercambio colectivo de experiencias llegando por último, a la generalización de acuerdos conceptuales orientados por el profesor en un ambiente de *situación problema* diseñado por él.

Diseño de la experiencia

La situación problema c *onstruir un par de ángulos congruentes, cuya congruencia se conserve ante cualquier movimiento de los objetos de la construcción,* fue propuesta a los estudiantes de grado octavo de básica secundaria del Colegio Distrital República de Costa Rica, los cuales trabajaron por parejas, con una calculadora. Previamente a la aplicación de esta situación didáctica, los estudiantes trabajaron en el estudio de las alturas de un triángulo y puntos de concurrencia, el estudio de ángulos suplementarios y la conservación de las áreas de un rectángulo. Es decir, se realizaron aproximadamente diez sesiones previas que permitieron que los estudiantes adquirieran cierta habilidad instrumental al usar la calculadora y conocieran las opciones básicas de indagación acerca de propiedades geométricas.

La propuesta didáctica abordada para el trabajo en el aula fue la de situación problema. Los alumnos propusieron construcciones, resultado de la exploración libre con la calculadora. Luego, el grupo validó dichas propuestas y finalmente se generalizó el conocimiento. A través de este tratamiento se avanzó hacia la construcción de estrategias para obtener ángulos congruentes, cuya congruencia no fuera ocasional, basada en la igualdad en la medida, sino en la búsqueda de criterios de mayor validez, basados en propiedades geométricas como ser opuestos por el vértice o ser alternos internos y externos o correspondientes entre paralelas, que permitieran a los estudiantes reconocer este tipo de ángulos en cualquier contexto y sin medirlos. Se emplearon dos unidades de clase de 90 minutos cada una.

Estrategias usadas por los alumnos

Los estudiantes tuvieron dificultades desde el mismo momento de iniciar la experimentación en la calculadora. Sus apreciaciones acerca de los ángulos que construyeron y de su medida estaban fuertemente influidas por la percepción de propiedades irrelevantes, dependientes de factores físicos como forma, tamaño y posición, producto de un uso muy limitado de las representaciones. Estos son algunos ejemplos:

- *Este no es un ángulo porque esta de para abajo*- (ver figura 1)

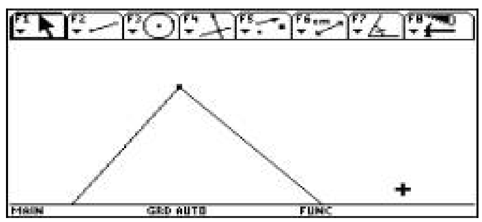


Figura 1

- *Estos ángulos no son congruentes porque no tienen la misma posición* - (ver figura 2)

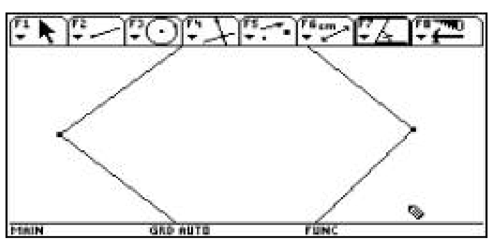
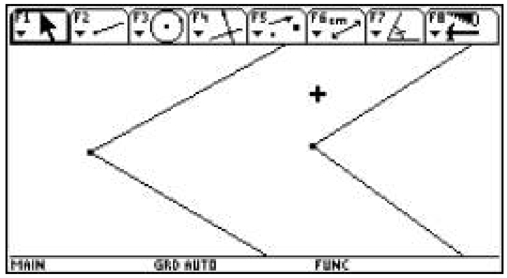


Figura 2

- *¿Cómo hacer para que dos ángulos midan lo mismo por todos los lados*? (ver figura 3)



F igura 3

La posibilidad de *arrastre* de los objetos de la construcción, en la calculadora, proporcionó a los estudiantes un contexto que les permitió experimentar sobre sus creencias acerca de las propiedades de los ángulos y su medida para comenzar a apreciar las propiedades geométricas más que las características perceptuales.

Las estrategias empleadas por los estudiantes se clasifican en los siguiente s tres tipos: construcción de ángulos opuestos por el vértice, identificación de pares de ángulos interiores de un polígono regular y obtención de ángulos a partir de una recta que intercepta a dos rectas paralelas.

Estrategia 1: **Construcción de ángulos opuestos por el vértice**

Una primera estrategia consistió en considerar que el ángulo ABC, podía relacionarse con otro ángulo, el opuesto por el vértice, mediante la prolongación de sus lados formando dos rectas que se intersecan por un punto (vértice B).(ver figura 4)

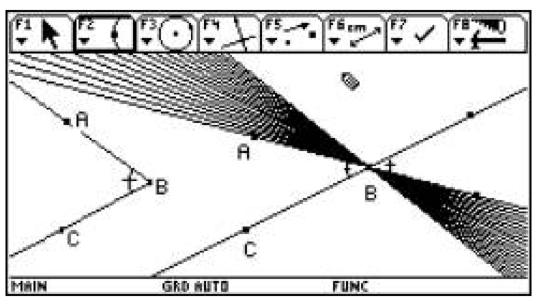


Figura 4

Al mover uno de los lados, por ejemplo BA, notaron que aumentaba la amplitud del ángulo ABC, pero al hacer esto, simultáneamente una de las rectas (s) se movía en sentido contrario haciendo que la amplitud del ángulo opuesto también aumentara; de esta forma, los dos ángulos en mención permanecían congruentes. De igual manera ocurría si se reducía la amplitud del ángulo ABC. En esta experimentación, los estudiantes aprovecharon la opción *Traza* del programa Cabri Géomètre , para validar esta conjetura (ver figura 4)

Ahora bien, el esfuerzo de socializar la propuesta contribuyó a que los estudiantes mejoraran las formas de expresión al introducir lenguaje matemático buscando precisar sus ideas. Poco a poco fueron haciendo uso de un lenguaje más elaborado tanto gramatical como matemáticamente. Ejemplo de esto lo constituye el siguiente fragmento de una conversación en clase, en la que se evidencian problemas iniciales para nombrar el vértice de los ángulos:

A: (Al arrastrar una de las rectas del ángulo ABC (ver figura 4) dice a sus compañeros) *Miren que lo muevo* (el ángulo) *y vean que los ángulos tienen la misma medida. Voy a explicar por qué no cambia la medida. Porque el ángulo está en el centro, entonces no cambia la medida.*

P: *¿Cuál ángulo?*

A: *Ah, no, el punto.*

P: *¿Cuál punto?*

A: *Ah, el vértice.*

P: *En esa construcción, ¿hay otros ángulos con la misma medida?*

(A muestra los otros dos ángulos de la construcción y dice: *Estos tienen la misma medida porque el vértice está en el centro*.

P: *O sea que estos cuatro ángulos , ¿tienen la misma medida?*

A: *Si*

Los estudiantes en coro manifiestan no estar de acuerdo y un estudiante demuestra que no lo son haciendo la medición de ellos.

Un caso especial de esta estrategia fue considerar el caso de la construcción de dos rectas perpendiculares (ver figura 5)

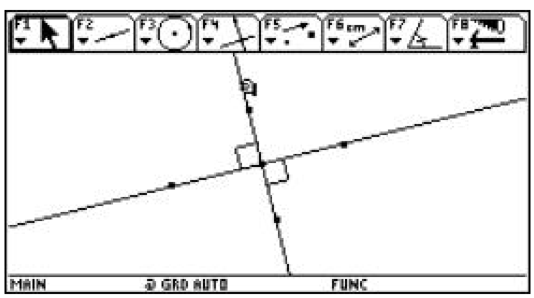


Figura 5

Los estudiantes descubrieron que se formaban cuatro ángulos congruentes, cuya congruencia se conservaba ante el movimiento de las rectas. A pesar de no aportar nuevos elementos para resolver el problema, esta propuesta fue importante pues permitió discutir acerca de los ángulos rectos. Solo hasta ese momento algunos alumnos asimilaron e interiorizaron el significado de la perpendicularidad de los ángulos rectos como propiedad fundamental de ellos. Esta nueva caracterización de los ángulos rectos desplazó la idea de congruencia de ángulos a partir de su medida, por una mas confiable y menos ocasional.

Estrategia 2: **Identificación de pares de ángulos interiores de un polígono regular**

Otra estrategia que se dio fue la de aprovechar las representaciones de los polígonos regulares y estudiar sus ángulos interiores. Se estudiaron los ángulos interiores de un cuadrado, después de un pentágono y posteriormente de un hexágono. (ver figura 6)

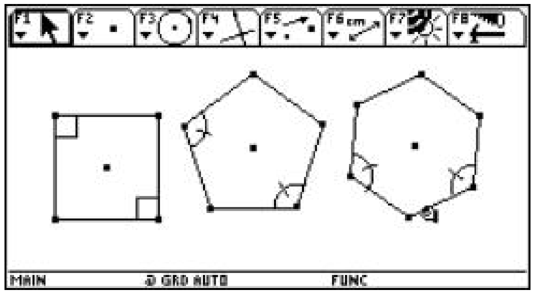


Figura 6

Los estudiantes usaron la opción *arrastre* para variar el tamaño y verificar si la congruencia se conservaba al variar las dimensiones de los polígonos. Esta situación no se ajustaba del todo a la situación problema planteada, ya que no se daba la posibilidad de variar la amplitud de los ángulos, en cada uno de los polígonos estudiados. Sin embargo, la conservación de la medida de los ángulos interiores de los polígonos regulares al variar el tamaño de los mismos, así como la congruencia de sus ángulos interiores, se constituyeron en descubrimientos importantes para algunos de los estudiantes. Otros desviaron su atención hacia el estudio de los polígonos estrellados dejando abierto un amplio espacio de exploración.

Estrategia 3 : **O btención de ángulos a partir de una recta que intercepta a dos rectas paralelas.**

La tercera estrategia propuesta por los estudiantes surgió cuando la profesora formuló la pregunta: *¿Existirán pares de ángulos congruentes que no compartan el vértice, pero cuya congruencia se conserve ante el movimiento de los objetos de la construcción?*

Unos estudiantes hicieron una representación como la que aparece en la figura (ver figura 7)

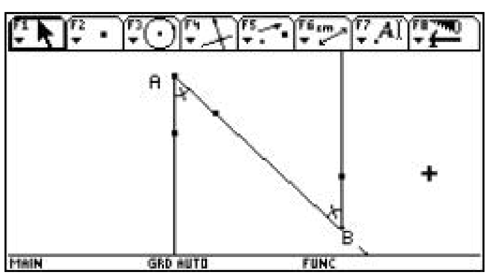


Figura 7

Aparentemente las líneas verticales parecían paralelas y los ángulos A y B medían lo mismo. Pero al *arrastrar* los objetos de la construcción no se conservaba la congruencia, lo que evidenció que los estudiantes seguían basándose en dibujos que se deformaban con el movimiento. Se originó así un conflicto cognitivo porque al descuadrarse la estrategia propuesta, obligó a los estudiantes a proponer otras que soportaran la prueba del arrastre. Construyeron entonces rectas paralelas cortadas por una transversal (ver figura 8)

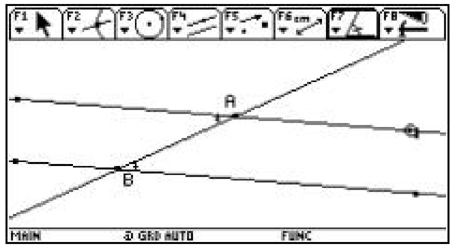


Figura 8

En esta representación, los ángulos estudiados fueron A y B inicialmente. Al intentar hacer una caracterización de estos ángulos que permitiera identificar pares de ángulos congruentes sin medirlos, concluyeron que tendrían que compartir un lado y tener los otros lados paralelos. Esta conjetura fue confirmada al comprobar la congruencia de los ángulos alternos internos. Posteriormente generalizaron la propiedad concluyendo que los lados deberían ser paralelos dos a dos, como en el caso de los ángulos correspondientes.

Conclusiones

El uso del programa de geometría dinámica en la situación problema propuesta, creó un ambiente favorable para que los estudiantes propusieran sus propias estrategias para encontrar ángulos congruentes sin medirlos. De esta manera lograron el reconocimiento de la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice y de los alternos internos, alternos externos y correspondientes entre paralelas. La exploración permitió adicionalmente aclarar propiedades geométricas importantes como la congruencia de los ángulos en los polígonos regulares y la perpendicularidad de los ángulos rectos.

Propiedades del Cabri como el *arrastre* de los objetos de la construcción y la opción *traza activada* favorecen la exploración de propiedades de los objetos geométricos inicialmente relacionadas con las características perceptuales de las figuras, o basando la verificación de las mismas únicamente en la medida, para dar paso a la identificación de propiedades geométricas relevantes. Como los estudiantes no estaban acostumbrados a establecer propiedades geométricas propiamente dichas, inicialmente construyeron ángulos aparentemente congruentes utilizando como comprobación, la medida. Pero más adelante y gracias a que la calculadora les amplió el campo de experimentación, pudieron generar estrategias de aprendizaje que hicieron de este algo más significativo.

Los nuevos roles asumidos por estudiantes y docentes en un ambiente de situación problema, desarrollan y mejoran la comunicación hablada y escrita. El clima de confianza, respeto y tolerancia que se creó, permitió a los estudiantes aprender matemáticas socialmente. Es decir, a través de diálogos inicialmente espontáneos, fruto de sus vivencias y conocimientos previos, empleando un lenguaje cotidiano. Y posteriormente, poco a poco y con la orientación del docente, construyeron un lenguaje más elaborado, el cual incluía vocabulario matemático.

Referencias

Santos L. M . (1996) Didáctica, *Lecturas. Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica.

De Guzmán M. (1991). *Para pensar mejor* , editorial Labor, España.

Moreno L . (1999) *Acerca del Conocimiento y sus mediaciones en la Educación Matemática*. Revista EMA, vol. 4 # 2, p. 103 - 1 16

Moreno L., Waldegg G (s.f.*). Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas* . En RICO L (eds.) *Didáctica de las Matem áticas*, Capítulo 3, editorial Síntesis, Madrid.

Una experiencia de "descubrimiento" en clase de geometría

Leonor Camargo Uribe

Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas, MEN

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá

Resumen. En este artículo se presenta una alternativa para aprovechar el papel protagónico del software Cabri como instrumento de reorganización de las actividades en clase en geometría. A partir de una dinámica de resolución de problemas en la que se propone la exploración de la relación pitagórica, se da lugar a la generación de conjeturas que permite a los alumnos poner en juego sus conocimientos informales y avanzar hacia la construcción del conocimiento geométrico genuino. Bajo la orientación del profesor, se revisan aquellas ideas que se creían interiorizadas y se construyen lo que hemos denominado reglas de procedimiento, que permiten a los alumnos el acercamiento conceptual a nuevas propiedades geométricas.

Introducción

El proyecto de *Incorporación de Nuevas Tecnologías en el Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia* que desarrolla el Ministerio de Educación en coordinación con universidades y colegios públicos, está basado en la premisa según la cual, los computadores y las calculadoras a lgebraicas que incorporan paquetes de geometría dinámica tienen gran potencial para cambiar las prácticas de aula en matemáticas. En particular, en geometría, el proyecto considera que el software Cabri Géomètre se convierte en una fuente de exploración que modifica la forma de concebir los objetos geométricos y las estrategias de resolución de problemas, contribuyendo a construir el puente entre la geometría de los dibujos y la geometría de los objetos geométricos (Moreno, 2002a).

A raíz de nuestra participación en el proyecto, hemos venido buscando alternativas para construir ambientes de aprendizaje de la geometría, con tecnología, que respondan a las expectativas antes mencionadas, pues la sola presencia de los recursos no garantiza el cambio curricular. En este sentido intentamos aprovechar el papel protagónico del software como instrumento de reorganización de las actividades en clase para generar una dinámica de resolución de problemas que de lugar al desarrollo de un conocimiento geométrico genuino.

La experiencia que vamos a relatar muestra de qué manera la posibilidad de explorar relaciones alrededor de una idea geométrica, por sencilla que sea, genera un clima de "elaboración de conjeturas" que permite a los alumnos experimentar la actividad de "hacer matemáticas". Alrededor de una propuesta de indagación con la calculadora, los alumnos ponen en juego sus conocimientos y comienzan a utilizarlos para resolver una tarea. Es allí donde, bajo la orientación del profesor, se revisan aquellas ideas que se creen interiorizadas y se construyen, lo que hemos denominado reglas de procedimiento, que permiten el acercamiento conceptual a nuevas propiedades geométricas.

Inicialmente presentamos algunas ideas que sirven de marco teórico al trabajo del proyecto y nos han servido de guía para orientar el trabajo con los alumnos e interpretar aquello que experimentan cuando hacen uso de la tecnología. Posteriormente narramos una experiencia en el aula alrededor de una tarea de construcción geométrica diseñada para verificar si los estudiantes tenían incorporada la relación pitagórica como una regla de procedimiento. Finalmente analizamos los logros de los estudiantes.

Marco Teórico

El marco conceptual que sustenta nuestro trabajo se centra en el reto de la didáctica de buscar hacer significativo el conocimiento matemático que en esencia es abstracto y descontextualizado (Moreno, s.f.). Si se busca un mecanismo para lograr movilizar la cognición del estudiante hacia la interpretación de una idea, la búsqueda de estrategias para la solución de un problema, la producción de una conjetura y el deseo de validarla para comunicarla, se van creando las condiciones para ir elevando el nivel de organización del que parte el conocimiento informal del estudiante y se generan las condiciones para comenzar el proceso de descontextualización y sistematización, que da origen al conocimiento matemático. A este último se llega cuando se produce la cristalización de una idea en una regla de procedimiento o "esquema de uso" (Moreno, 2002b; 2002c) que le permite al estudiante usarla, por decisión personal, para proceder a explicar nuevos resultados, hacer inferencias y trabajar en propiedades o relaciones geométricas.

Este reto de la didáctica se puede lograr, según Noss y Hoyles (1996), mediante la construcción de escenarios en donde los estudiantes puedan coordinar sus ideas informales con ideas más formalizadas, escenarios denominados por ellos como *dominios de abstracción*. Un ejemplo de dichos dominios son los ambientes computacionales y en particular los programas que han surgido para trabajar geometría dinámica (Cabri Géométre; Geometre Stketch Pad; Cinderella; etc.). A partir de unos objetos geométricos iniciales y de la construcción de otros que se "comportan" de acuerdo a ciertas relaciones estructurales que dieron lugar a su construcción, estos programas proporcionan una fuente inagotable de experiencias visuales que exteriorizan las relaciones geométricas en juego posibilitando la construcción del sentido de las mismas y su uso en la formulación de conjeturas. Los dibujos se constituyen en el hábitat de propiedades generales que dan la posibilidad de generalización y posterior construcción de reglas de procedimiento (Moreno, s.f.).

Un medio como Cabri Géomètre brinda las posibilidades de exploración de relaciones geométricas. El *software* se convierte en un socio cognitivo que acompaña al estudiante en sus indagaciones sobre los objetos matemáticos, se convierte en un inspirador de ideas sobre cómo manipular las representaciones de los objetos geométricos en juego y contribuye a darles sentido. El conocimiento matemático se sitúa en el mundo Cabri y en él se sientan bases sólidas para comenzar el proceso de descontextualización de las ideas geométricas para generalizarlas en invariantes que se incorporan en la red conceptual (Moreno, s.f.); de esta manera se da lugar a la construcción de reglas de procedimiento con las cuales enfrentarse a la resolución de problemas.

Sin embargo, este proceso no se da únicamente por la presencia de la tecnología informática. El esfuerzo del profesor por orientar el trabajo cognitivo del estudiante hacia la exploración y posterior construcción de reglas de procedimiento es fundamental para garantizar el éxito del proceso. El diseño de una actividad que interese a los alumnos, que los impulse al trabajo colectivo, que los lleve a formular conjeturas y querer validarlas, acompañado de la formulación de preguntas oportunas que dirijan la atención a los aspectos relevantes de la situación, a la búsqueda de patrones de generalización y formalización y a la construcción de invariantes, están bajo su responsabilidad. En un ambiente de interacción social y sin tener la presión por abarcar demasiados contenidos en una sola clase, el docente cambia de función, convirtiéndose en un orientador de las exploraciones de los estudiantes e impulsador de la construcción de dichas reglas.

Diseño de la experiencia

Contexto de la experiencia: **La experiencia se realizó con un grupo de estudiantes de grado séptimo del colegio Distrital Benjamín Herrera (jornada de la mañana). Los estudiantes habían trabajado con el software Cabri Géomètre incorporado a la**

calculadora algebraica una hora a la semana, en la clase de geometría, alrededor de 3 meses. Inicialmente el trabajo se centró en el conocimiento del comportamiento de los objetos geométricos básicos del software como puntos, rectas y circunferencias. Posteriormente, dentro de la situación problema, se trabajaron algunas relaciones geométricas como la congruencia de ángulos, la relación "ser par lineal" y el paralelismo y perpendicularidad entre rectas. Finalmente, al momento de presentar la situación que se describe, estaban trabajando algunas relaciones entre las partes constitutivas de los triángulos.

Situación problema : **la situación se desarrolló alrededor de la siguiente propuesta de construcción:**

Construir un triángulo en el que se cumpla que el cuadrado de la medida de un lado sea igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados.

Proponer este tipo de actividades sólo es factible si se cuenta con programas de geometría dinámica caracterizados por la posibilidad de "arrastre" de los objetos, aspecto que permite poner en evidencia la invarianza de las relaciones geométricas involucradas en las construcciones. Consideramos que para el grupo de estudiantes con los que se trabajó la actividad se constituyó en una situación problema pues los motivó a trabajar, les permitió partir de lo que sabían y los invitó a tomar decisiones frente a las estrategias a seguir. Aunque el trabajo con la calculadora ya era familiar para este grupo de alumnos, no así las relaciones geométricas presentes en un triángulo rectángulo. Por lo tanto, presuponíamos que tenían cierta información acerca de la relación pitagórica pero queríamos explorar si ya la habían incorporado como una regla de procedimiento.

Momentos de la intervención. En el diseño de la actividad se tienen en cuenta tres momentos que pretenden crear un ambiente de interacción que permita a los estudiantes partir de algunas hipótesis para enfrentarse a la tarea, socializarlas en un grupo pequeño y luego defender sus ideas ante el grupo en general. Inicialmente se sucede una etapa de exploración por parejas con intervenciones cortas del profesor para cuestionar aquello que los alumnos están haciendo o sugerir algún camino. A continuación los estudiantes pasan a exponer sus producciones siendo fundamental en este momento el *view screen*, o pantalla líquida, que al poder conectarse a cualquier calculadora permite presentar en pantalla grande el trabajo de cada grupo. En esta actividad de presentación es donde se da lugar la discusión pues cada grupo trata de defender sus construcciones o afirmaciones ante los demás. Finalmente, se realiza una institucionalización dirigida por el profesor en donde se destacan las conclusiones obtenidas y se avanza en la formalización al presentar en forma sistemática las relaciones estudiadas, la notación correspondiente y aquellos aspectos que el profesor desee destacar.

Evaluación. Para la evaluación del desempeño de los alumnos así como de la pertinencia de la tarea, dirigimos la atención hacia los procesos que los alumnos realizaron, más que hacia los productos del aprendizaje. En ese sentido daremos cuenta de por qué decimos que Cabri Géomètre se convierte en un dominio de abstracción que permite construir reglas de procedimiento, si el profesor aprovecha su potencialidad. Hemos establecido las siguientes categorías de análisis:

Procesos Cognitivos : Con la evaluación queremos dar cuenta de cómo el escenario propuesto favorece estrategias cognitivas de los estudiantes dirigiendo especial atención a (i) la posibilidad de partir de su conocimiento informal en el lenguaje natural e irlo adecuando para expresar sus ideas correctamente y comenzar a formalizar, (ii) el uso de la ejecutabilidad de las representaciones para construir conjeturas y hacer exploraciones en diversos contextos geométricos y (iii) las posibilidades que brinda el escenario para argumentar, construir invariantes y formular reglas de procedimiento. En síntesis, se trata de documentar los patrones de generalización y formalización que salen a la superficie en la actividad de solución del problema.

Procesos actitudinales: También queremos dar cuenta de cómo el dominio de abstracción que proporciona Cabri, al constituirse en fuente de generación de significados a partir del potencial visual que brinda, desarrolla una sensación de confianza en los alumnos que los motiva a hacer exploraciones más allá de las solicitadas, enrumbarse por caminos insospechados y querer comunicar los resultados de sus exploraciones al grupo. Queremos mostrar de qué manera el software se convierte en un socio cognitivo del estudiante y le permite mejorar sus relaciones con la matemática convirtiéndose en laboratorio experimental con el cual poner en juego conjeturas, experimentarlas y validarlas para construir después reglas de procedimiento.

Resultados

Más que dar cifras para mostrar el éxito del ejercicio lo que pretendemos es narrar algunas situaciones vividas con nuestros alumnos que ejemplifican el ambiente experimentado.

El primer acercamiento a la tarea consistió en interpretar lo que se pedía en el enunciado del problema, en términos de identificar qué tipo de triángulo debía construirse. Inicialmente algunas parejas de alumnos se aventuraron a conjeturar que la relación pedida se verificaba en los triángulos donde la suma de las medidas de los ángulos interiores fuera 180º. Dicha conjetura fue rebatida en la socialización casi de inmediato a su presentación, por un alumno que mostró, usando la herramienta del *arrastre*, que era factible tener triángulos en donde se verificaba la invarianza pero en los cuales no se tenía la relación pedida. (ver Figura 1).

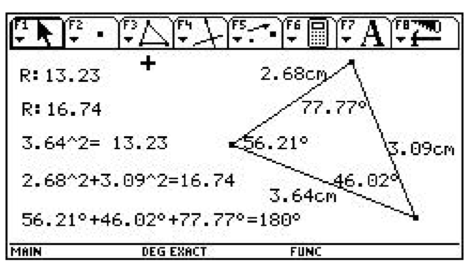


Figura 1

Al dirigir la atención sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo un alumno comentó que esto era siempre así porque al hacer variar los ángulos del triángulo *lo que se aumentaba en un ángulo se disminuía en el otro* (Mario). En respuesta a este comentario, otro estudiante manifestó que *la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°,* *eso no lo tenemos que medir* (Juan). Para este alumno, esta propiedad era ya una regla de procedimiento.

A continuación se generó un ambiente de exploración, nuevamente por parejas, que llevó a algunos alumnos a conjeturar que uno de los ángulos del triángulo debía ser recto, es decir, de 90º. Para verificar dicha conjetura, unos grupos se dedicaron a encontrar un triángulo rectángulo en el cual esto no sucediera. Como utilizaron la estrategia de alargar o acortar los lados, procurando mantener constante la medida del ángulo de 90°, generalizaron la propiedad a todos los triángulos rectángulos obtenidos a partir del alargue de los lados del ángulo recto en el original. Adicionalmente observaron que el lado más largo siempre era el lado opuesto al ángulo recto, generalizando otra propiedad de los triángulos rectángulos. Aprovechamos esta última generalización para introducir los nombres "oficiales" hipotenusa-cateto para hacer referencia a los lados de un triángulo rectángulo.

Como la búsqueda del contraejemplo fue infructuosa les sugerimos aprovechar el dinamismo del recurso computacional para validar la propiedad por un camino diferente al seguido, tratando de construir un triángulo rectángulo que soportara cualquier tipo de arrastre y en donde se verificara la propiedad. Esta pregunta generó dos estrategias de trabajo que condujeron por dos caminos de indagación diferentes, a la búsqueda de un mecanismo para asegurar que el triángulo siempre fuera rectángulo y estudiar la relación:

a) hacer uso de rectas perpendiculares:

El uso de esta estrategia condujo a los estudiantes a relacionar dos hechos geométricos que conocían desde primaria pero que no habían conectado: *como dos rectas perpendiculares forman ángulos rectos, entonces dos lados de un triángulo rectángulo están formados por segmentos perpendiculares.* Al estudiar esta conjetura, los estudiantes reconocieron los segmentos perpendiculares en cualquier posición del triángulo lo que los llevó a identificar que la perpendicularidad no dependía de la posición vertical u horizontal del ángulo (figura 2).

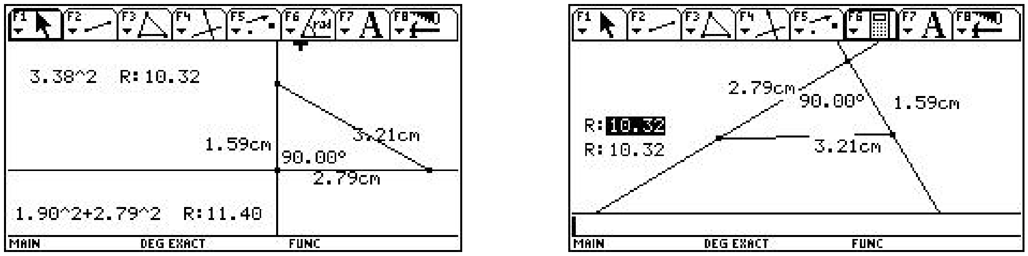


Figura 2

b) aprovechar las propiedades de los polígonos regulares:

Un estudiante recordó que en una clase anterior habían estudiado que los ángulos de un cuadrado eran rectos. Esto lo llevó a usar un cuadrado (figura 3), afirmando que *al hacer una diagonal, se forman dos triángulos como los que me piden* (Andrés).

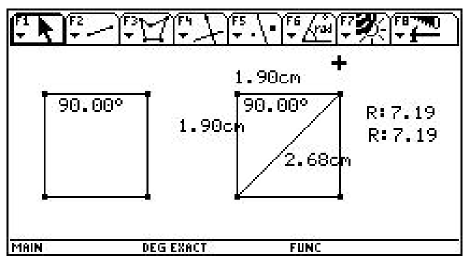


Figura 3

Como esta solución le pareció muy sencilla decidió explorar otros polígonos regulares en los que pudiese encontrar ángulos rectos. Encontró que en los polígonos regulares con un número par de lados siempre era posible encontrar un ángulo recto si tomaba como hipotenusa el diámetro de la circunferencia circunscrita (figura 4).

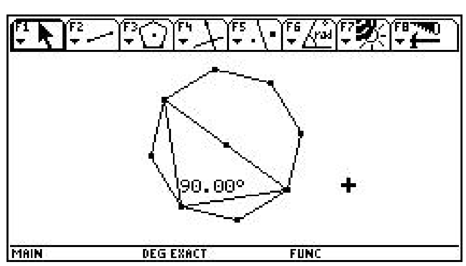


Figura 4

Le sugerimos estudiar cómo eran los triángulos semi - inscritos en circunferencias. De allí llegó a concluir que dichos triángulos siempre eran rectángulos porque *"era la mitad de la circunferencia que mide 360º"* (Andrés).

Una vez identificadas dos formas de construir triángulos rectángulos que soportaran la prueba del *"arrastre"* nos concentramos en la relación a estudiar y les explicamos a los estudiantes que este era un teorema conocido, llamado el Teorema de Pitágoras.

Algunas conclusiones consignadas por los estudiantes en sus cuadernos de trabajo al solicitarles explicar el Teorema de Pitágoras, reflejan la comprensión de la relación estudiada, y las reglas de procedimiento que generaron:

Se traza una recta y por cualquier parte una perpendicular. Sobre la perpendicular se traza una recta oblicua que llegue hasta la primera recta. Se mide el ángulo que forman las perpendiculares que es de 90º para probar que el triángulo es rectángulo y luego vemos que si sumo un lado elevado al cuadrado con el otro lado también elevado al cuadrado, este resultado es igual a la hipotenusa elevada al cuadrado (Camilo).

El Teorema de Pitágoras nos dice que la suma de los catetos al cuadrado nos da como resultado la hipotenusa al cuadrado, pero se tiene que tener un triángulo rectángulo (Diego).

No hay triángulos en donde la suma de los ángulos interiores sea distinto a 180º (Juan).

Gracias a un cuadrado podemos construir dos triángulos rectángulos que cumplen el Teorema de Pitágoras (Andrés).

Para construir un ángulo recto dentro de un polígono regular siempre tiene que pasar la hipotenusa por el centro del polígono (Andrés).

Conclusiones

El dominio de abstracción de Cabri generó la posibilidad de crear un contexto de exploración que permitió a los estudiantes vincular la noción informal de ángulo recto: *aquel que mide 90º* con la propiedad geométrica de la *perpendicularidad*. Decimos que el conocimiento del ángulo recto como de 90º es informal por que inicialmente para los alumnos justamente esa medida no era indicativo de ninguna propiedad geométrica en particular. En el dominio de abstracción los estudiantes vinculan dos hechos geométricos conocidos pero no necesariamente significativos.

La posibilidad de ejecutar las representaciones permite a los alumnos explorar los invariantes de las construcciones y hacer uso de las herramientas de verificación que proporciona el programa para validar sus conjeturas. El cálculo inmediato de las medidas de los ángulos, al tiempo que de la relación pitagórica lleva a los estudiantes a re-conocer propiedades importantes de los triángulos en general (como que la suma de las medidas de los ángulos es 180º) y de los triángulos rectángulos (el lado más largo es la hipotenusa; teorema de Pitágoras). Además, el aprovechar las propiedades geométricas que salen a relucir en los procesos de construcción, lleva a la formulación de inferencias que se convierten en el fundamento de las reglas de procedimiento, con las cuales se enfrentarán a futuras tareas. Sus reflexiones ascienden del nivel perceptual que se pondría probablemente en juego al hacer el ejercicio con lápiz y papel, hacia discusiones donde se explicitan propiedades geométricas.

La introducción del lenguaje formal de la geometría se hace poco a poco y sobre la necesidad de ponernos de acuerdo en la comunicación. Al comienzo los estudiantes utilizan el lenguaje natural para hablar de sus producciones, pero en el momento en que el profesor orienta el lenguaje y comienza a referirse al lenguaje especializado, este último se va contagiando y se comienza a usar con naturalidad, permitiendo a los niños reconocer la necesidad de usarlo para hablar con mayor precisión y claridad.

Del punto de vista de las nuevas metas acerca de la enseñanza de las matemáticas, esta experiencia permite adquirir confianza en la capacidad de hacer matemáticas, valorar el trabajo en grupo, la comunicación, etc. (NCTM, 1991) rescatando así la geometría, como un espacio de aprendizaje que contribuye al desarrollo cognitivo.

Referencias

Moreno L. (2002a). *Ideas Geométricas del Currículo presentadas mediante el Cabri Géomètre*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

Moreno L. (2002b) *Instrumentos matemáticos computacionales*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

Moreno L. (2002c) *Nueva matemática Experimental*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas* . Serie Memorias.

Moreno L; Waldegg G (s.f.) *Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas* . En RICO L (ed) *Didáctica de las Matemáticas* , Capítulo 3, Editorial Síntesis, Madrid.

Noss R ; Hoyles C (1996) *Windows on mathematical meaning, learning cultures and computer.* En MORENO L; WALDEGG G (s.f.) *Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas* . En RICO (ed) *Didáctica de las Matemáticas,* Capítulo 3 del libro, Editorial Síntesis, Madrid.

NCTM (1991). Estándares curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Editorial: Grupo Thales, Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Madrid.

Exploración, construcción, argumentación y demostración en la solución de un problema [1]

Ernesto Acosta Gempeler

Escuela Colombiana de Ingeniería, Bogotá

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Fabiola Rodríguez García

Instituto Pedagógico Nacional, Bogotá

Leonor Camargo Uribe

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá **[2]**

Resumen . En este artículo mostramos cómo la interacción de un individuo con el programa de geometría dinámica Cabri al enfrentarse con la solución de un problema, permite el reconocimiento de relaciones implícitas en el enunciado que le ayudarán a construir la solución y a argumentar sobre su validez. Una vez más se ejemplifica la idea de que la geometría dinámica se constituye en un dominio de abstracción que permite al aprendiz utilizar la calculadora (o el computador), como socia cognitiva, facilitando su participación en la construcción del conocimiento.

Introducción

En diversos trabajos se ha presentado el potencial didáctico del software de geometría dinámica. Se muestran sus bondades en la construcción de ambientes de aprendizaje que favorecen actividades de exploración de propiedades y relaciones geométricas, seguidas de la verificación de las mismas, con el uso de mecanismos de control que vienen incorporados al programa. Sin desconocer estas actividades como esenciales en el aprendizaje escolar, algunos críticos han manifestado su preocupación por la pertinencia de éstas como actividades matemáticas genuinas que, por no ser fruto de una construcción deductiva no conducen al desarrollo de conocimiento matemático propiamente dicho. Esta inquietud ha llevado a los educadores matemáticos a plantearse el siguiente interrogante: *¿cómo tratar con la naturaleza descontextualizada de las proposiciones matemáticas que forman parte de una cultura matemática universal y, al mismo tiempo, con la necesidad de admitir que el conocimiento que un estudiante construye, produce, asimila, se da siempre mediado por un contexto?* (Moreno, s.f.)

En este artículo queremos mostrar que el uso de un software de geometría como CABRI permite, a partir de la dinámica entre la exploración y la sistematización de propiedades y relaciones geométricas presentes en la solución de un problema, generar argumentos para comprobar afirmaciones y validarlas dentro del contexto geométrico en que se trabaja. Estas actividades conforma n parte esencial de la sistematización y el refinamiento de la argumentación para dar sentido a lo que se entiende en matemáticas como *sistema axiomático* y *demostración.* El uso del software se convierte así en un puente entre el conocimiento empírico que se valida a través de la ostensión y el conocimiento formal que se valida a través de la deducción.

Hemos podido detectar que para aprovechar al máximo el potencial del software es necesario conjugar cuatro momentos estrechamente relacionados que se combinan permanentemente en el trabajo matemático: *la exploración, la construcción* , *la argumentación y la demostración.* Para ejemplificar estas ideas vamos a presentar la manera como tres profesores de matemáticas se enfrentan individualmente a la solución del siguiente problema: ***Construir un triángulo equilátero de tal forma que cada uno de sus vértices esté sobre cada una de tres rectas paralelas dadas.*** Haremos una descripción, de manera sucinta pero lo más fiel posible de las estrategias utilizadas en cada una de las soluciones y sus argumentaciones, procurando destacar los momentos mencionados anteriormente. Cada una de las soluciones se diferencia esencialmente en la estrategia empleada que depende principalmente de la exploración inicial. De esta manera pretendemos mostrar la riqueza de alternativas que surgen en el ambiente CABRI para enriquecer el aprendizaje ya que los aprendices tienen la posibilidad de desarrollar diversas estrategias de solución a un mismo problema y convencerse de que los problemas de matemáticas no tienen necesariamente un único camino de solución. Esperamos que el lector pueda tomar elementos de lo expuesto aquí para enriquecer su trabajo en el aula.

Marco Teórico

Este trabajo asume los presupuestos teóricos desarrollados en el proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías en el Currículo de Matemáticas de la Educación Básica de Colombia* (MEN, 2000) centrándose en lo que se ha denominado un *dominio de abstracción* (Moreno, 2002) y en la conceptualización de la argumentación desde una perspectiva más amplia que la tradicional.

La noción de *dominio de abstracción* surge en el panorama educativo cuando se aborda el reto de construir significado de nociones matemáticas que en esencia son abstractas (Moreno, s.f.). Al aceptar que la cognición de un estudiante no se adapta de modo natural a la organización formal de una disciplina, y que la exigencia cognitiva que significa el enfrentarse al aprendizaje de las matemáticas a partir de este tipo de organización es enorme, se ha visto la necesidad de aceptar que el conocimiento y el aprendizaje son por naturaleza *situados,* es decir, dependen en su construcción y en su interpretación, de la especificidad del contexto en el que surgen (Wertsh, 1993).

Al usar contextos que posibiliten acceder al tratamiento de problemas matemáticos a partir de los conocimientos que se poseen, se desencadena una exploración sistemática que da lugar al establecimiento de asociaciones, regularidades, invariantes, etc., y a una posterior creación de nuevos entes matemáticos. Se dice que el contexto se constituye en un dominio de abstracción pues pone a disposición del estudiante los recursos que estimulan la construcción de significados, brinda un soporte para establecer conexiones entre porciones aisladas de conocimiento, permite conectar el conocimiento informal con fragmentos de conocimiento matemático y permite avanzar hacia la abstracción de la esencia de las relaciones encontradas, dando lugar a construcciones intelectuales de mayor estatus conceptual. El conocimiento avanza hacia proposiciones generales cuyo rasgo característico es estar descontextualizadas y se accede así, a mayores niveles de complejidad.

Los recursos computacionales se constituyen en sí mismos en un dominio de abstracción. Estos contextos han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático, al estructurar la exploración favoreciendo una mayor capacidad de cálculo, un mayor poder expresivo y flexibilidad en la transferencia entre sistemas de representación (Moreno, 2002). El estudiante puede expresar la generalidad matemática, inicialmente en dependencia del medio, para luego orientar sus expresiones más allá, hacia las descripciones abstractas de las estructuras matemáticas. Se hace posible partir de la exploración de ideas dentro de ámbitos particulares, concretos y manipulables pero que contienen la semilla de lo general y lo abstracto. Con el tiempo, es posible articular los resultados de las exploraciones de manera tal que éstos puedan ser llevados más allá del medio computacional hacia dominios de teorías matemáticas abstractas.

Al poner de presente la necesidad de constituir dominios de abstracción en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, se pone en evidencia la necesidad de replantear la noción de argumentación, pues ésta debe verse como una herramienta eficaz y confiable para establecer la validez de una proposición y no como una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto definido de esquemas impuestos por la comunidad matemática. Dentro de un dominio de abstracción es posible construir argumentos a favor de una proposición que si bien no constituyen una demostración formal, sí constituyen, en el interior del dominio de abstracción correspondiente, una argumentación para resultados expresados en el lenguaje del medio y cuyo sentido proviene de él, aunque puedan tener un nivel de generalidad mayor (Moreno, 1996). Así por ejemplo, al trabajar con CABRI en un ambiente de resolución de problemas, se delimita un contexto cuyos argumentos provienen del mundo de la geometría dinámica y los recursos del software. La argumentación utiliza la información, los hechos aceptados en el entorno CABRI y las posibilidades de construcción geométrica constituyéndose así en un socio cognitivo que apoya a los estudiantes en su paso hacia la formalización dentro de una teoría geométrica. De esta manera se va construyendo de manera simultánea la racionalidad matemática a partir de un dominio de abstracción y la actividad de validar, que exige la solución de un problema.

Aunque la demostración, entendida como mecanismo de incorporación de un hecho matemático a una teoría de tal manera que éste sea resultado de la misma, constituye el método de validación por excelencia de las proposiciones matemáticas, el énfasis en las demostraciones ha comenzado a cambiar en el ámbito educativo ante el interés por el estudio de las prácticas matemáticas que resaltan la importancia de la argumentación como mecanismo de explicación, verificación, constatación de hechos, y validación, con un sentido de interesar más que de formalizar. Los ejemplos del trabajo de profesores alrededor de un problema matemático, propuestos a continuación apuntan en esa dirección.

Solución 1

El profesor 1 comenzó su *exploración* construyendo tres rectas paralelas *a, b, c* y un segmento *AB'* de tal forma que *A* estuviera sobre *a* y *B'* estuviera sobre *b*. Luego construyó el punto *C'* de tal forma que el triángulo *AB'C'* fuera equilátero (ver figura 1). Al mover el punto *B'* sobre la recta *b*, el punto *C'* se movía en la pantalla, lo que permitió visualizar relaciones existentes entre el lugar geométrico de *C'*, las rectas paralelas y el triángulo equilátero buscado. Aparentemente este lugar geométrico era una recta que cortaba a las otras tres. Además, uno de los vértices del triángulo buscado debía ser el punto de corte del lugar geométrico y la recta *c*.

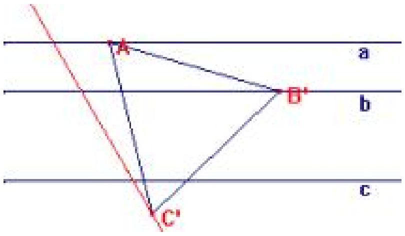


Figura 1

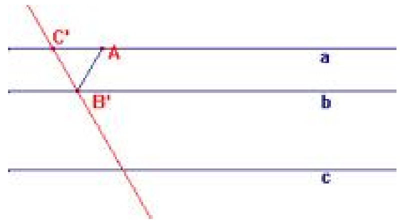


Figura 2

En un instante de la exploración (ver figura 2) el profesor 1 observó que cuando *C'* estaba sobre la recta *a*, *B'* parecía estar en el lugar geométrico de *C'*, lo que indicaba que el lugar geométrico de *C'* debía ser una recta que formaba un ángulo de 60^{o} con las rectas paralelas dadas, pues *AB'C'* era equilátero.

Construyó entonces una recta *l* formando un ángulo de 60^{o} con las rectas paralelas y nombró con P_1, P_2 y *C* los puntos de intersección (ver figura 3). El punto *C* debía ser uno de los vértices del triángulo buscado pues correspondía a la intersección de la recta *c* con el lugar geométrico de *C'.*

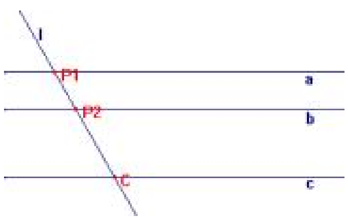


Figura 3

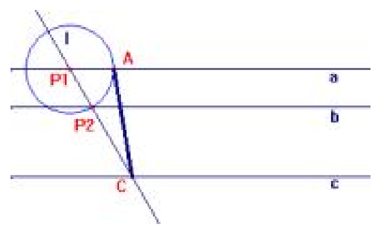


Figura 4

El punto *A* del triángulo que se estaba buscando debía estar sobre *a* y además $\overline{P_1P_2}$ debía ser congruente con $\overline{P_1A}$ (ver figura 2). El profesor 1 construyó *A* sobre *a* con esas características. Así, $\overline{AC}$ debía ser uno de los lados del triángulo buscado (ver figura 4). Después trazó dos circunferencias con centros en *C* y *A* y radio *AC*, respectivamente. El punto de intersección *B* de estas circunferencias debía ser el tercer vértice buscado (ver figura 5).

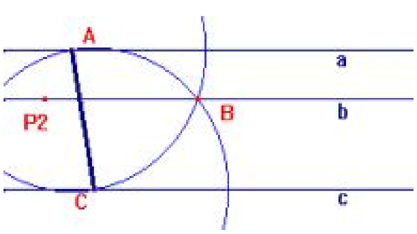


Figura 5

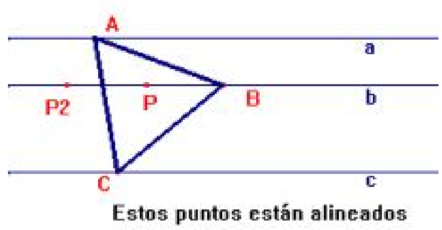


Figura 6

La construcción mostraba explícitamente que el triángulo *ABC* era un triángulo equilátero. Lo que no sabía con certeza era si *B* estaba o no en la recta *b*. Para *argumentar* este hecho usó los recursos del programa Cabri, aceptados como válidos en este dominio de abstracción. Tomó un nuevo punto *P* sobre *b* y preguntó al programa si P_2, *B* y *P* estaban alineados. En efecto, el programa respondió que así era (ver figura 6).

Solución 2

El profesor 2 comenzó la *exploración* construyendo tres rectas paralelas *b, c, a* y el segmento *CB´* de tal forma que *C* estuviera sobre *c* y *B'* estuviera sobre *b*. Luego construyó el punto *A´* de tal forma que el triángulo *A´B´C* fuera equilátero. Al mover el punto *B´* sobre la recta *b*, el punto *A´* se movía en la pantalla y esto le permitió explorar las relaciones existentes entre el lugar geométrico de *A´* y las rectas paralelas. Uno de los vértices del triángulo buscado era el punto de corte del lugar geométrico y la recta a. Aparentemente este lugar geométrico era una recta que cortaba a las tres rectas formando un ángulo de 60 grados (ver figura 7). Con el ánimo de verificar si el ángulo era efectivamente de 60 grados trazó la recta *d* perpendicular a *c* pasando por *C* tratando de buscar una relación trigonométrica en los triángulos involucrados. Sin embargo, observó que el punto *P* de intersección entre el lugar geométrico y *d* era el simétrico de *C* con respecto a *b*. (ver figura 8). Con estas observaciones decidió hacer su *construcción* .

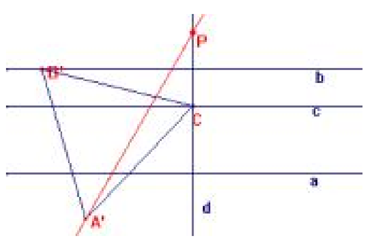


Figura 7

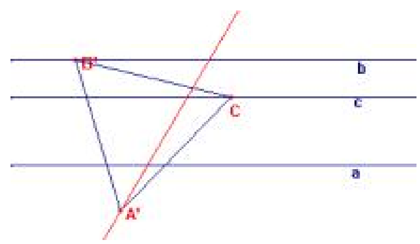


Figura 8

Construyó el punto *P* simétrico de *C* con respecto a *b* y un triángulo equilátero como el construido en la figura 7 (ver figura 9). *A'P* sería el lugar geométrico de *A'* cuando *B´* se mueve sobre *b*, y como el punto *A* de intersección entre *A'P* y *a* debía ser uno de los vértices que se estaba buscando, *AC* debía ser uno de los lados del triángulo (ver figura 10).

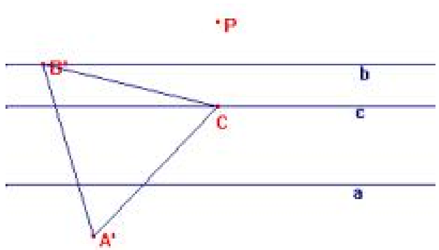


Figura 9

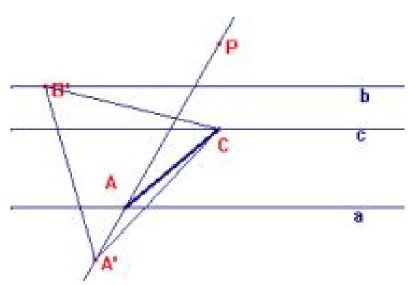
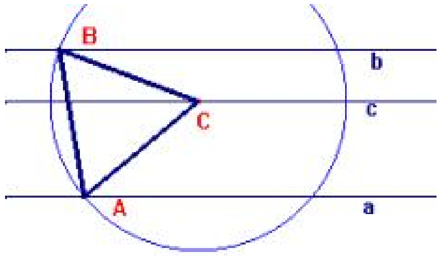


Figura 10

Bastaba trazar una circunferencia con centro en *C* pasando por *A*. El punto *B* de intersección con *b* debía ser el tercer vértice y *ABC* el triángulo buscado (figura 11).



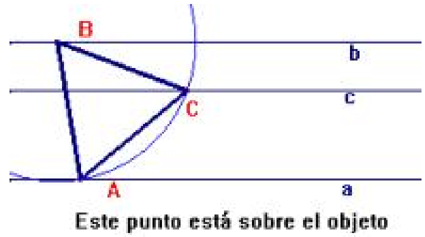


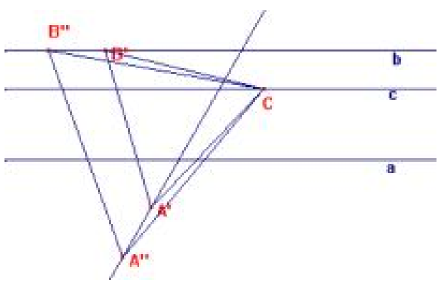
Figura 11

Figura 12

Para *argumentar* este hecho el profesor partió de aceptar que la construcción mostraba explícitamente que *B* estaba en *b*, *C* estaba en *c*, *A* estaba en *a* y que *AC* era congruente con *BC*. Lo que no sabía con certeza era si *AB* era congruente con los anteriores. Construyó la circunferencia con centro en B pasando por C y preguntó al programa si *A* pertenecía a esta circunferencia. En efecto, el programa respondió que así era (ver figura 12).

Solución 3

El profesor 3 comenzó su *exploración* con una construcción igual a la del profesor 2 y llegó a las mismas relaciones iniciales entre las rectas paralelas y el lugar geométrico, pero también observó que el lugar geométrico de *A'* era la recta que pasa por dos vértices *A* de dos triángulos equiláteros construidos como *A'B'C* y *A''B''C*(ver figura 13) y que la intersección de la recta *A'A''* con a era el segundo vértice *A* buscado (ver figura 14).



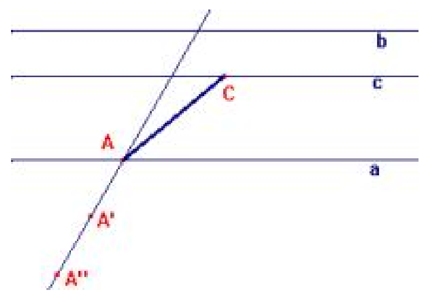
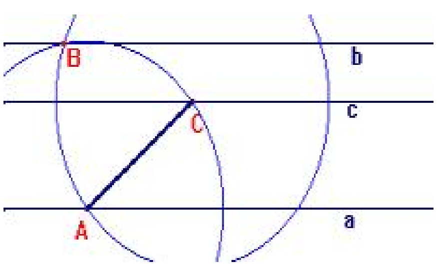


Figura 13

Figura 14

Realizó la *construcción* de dos triángulos equiláteros *A'B'C* y *A''B''C* para obtener el lado *AC* del triángulo buscado (ver figura 15).



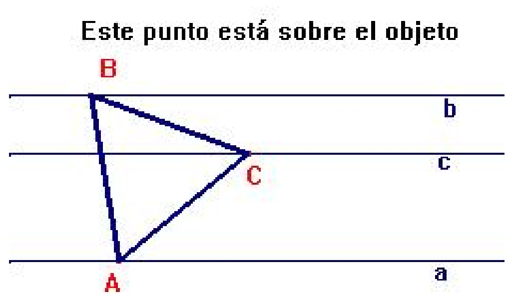


Figura 15

Figura 16

La construcción mostraba explícitamente que el triángulo *ABC* era equilátero. Lo que no sabía con certeza era si el punto *B* estaba o no en *b*. Para demostrarlo, preguntó al programa si *B* estaba en *b*. En efecto, el programa respondió que así era (ver figura 16).

Paso a la demostración

El primer profesor se puso en la tarea de demostrar el hecho de que el triángulo obtenido al realizar la construcción era en realidad equilátero. Obsérvese que esto no quiere decir que no pudiera serlo, ya que lo hecho hasta el momento no deja ninguna duda. El uso de las palabras ...*en realidad...* quiere decir que el hecho ya obtenido se puede incorporar a una teoría geométrica para que se vea como resultado de la misma. El profesor lo que hizo fue realizar una nueva construcción, a partir de la evidencia recopilada en su primer intento, que permitiera una manera más sencilla de deducir el hecho de resultados de una teoría geométrica. La teoría geométrica a la que nos referimos aquí es cualquiera que acepte los siguientes hechos como *verdaderos*, en el sentido de que se han deducido de un conjunto de axiomas que no vamos a especificar:

1. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

2. Diagonales correspondientes de paralelogramos congruentes son congruentes.

Estos hechos se deducen de las proposiciones que se refieren a la congruencia de triángulos a partir de la congruencia de ciertos lados y ángulos correspondientes de los mismos (lado-ángulo-lado, lado-lado-lado, etc.) y las correspondientes a los ángulos alternos internos formados por una recta que corta dos paralelas. Al profesor no le interesaba hacer una demostración con todo detalle del hecho, sino mostrar la posibilidad de hacerlo.

La construcción que realizó el profesor, que dentro de su narración describió como natural a partir de la exploración que había hecho inicialmente, es la siguiente.

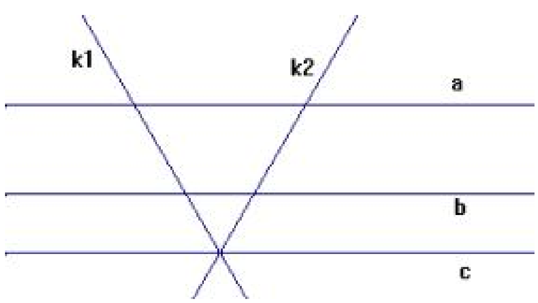


Figura 17

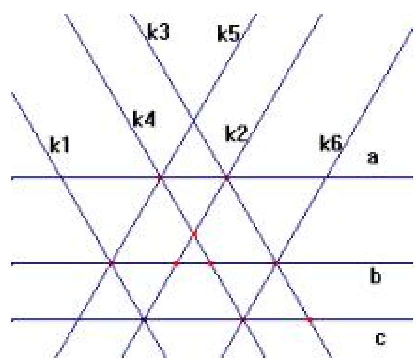


Figura 18

La recta k_1 forma un ángulo de 60^o con las rectas a, b, y c, y la recta k_2 forma a su vez un ángulo de 60^o con k_1 (figura 17). Las rectas k_3, k_4, k_5, y k_6 se construyeron todas mediante paralelismo con k_1 y k_2 (figura 18). Por consiguiente, los paralelogramos de la figura 19 son congruentes, de donde el triángulo de la figura 20 es equilátero.

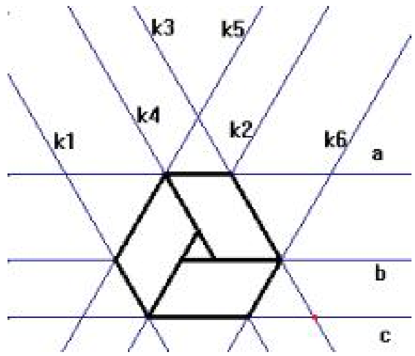


Figura 19

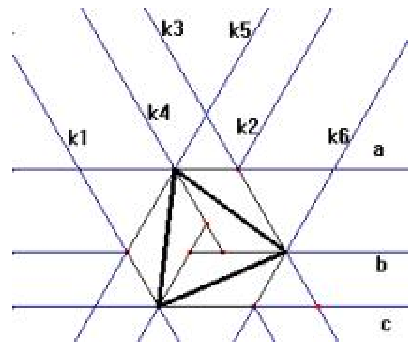


Figura 20

A pesar de que los profesores propusieron otras demostraciones acordes con sus exploraciones no las expusimos aquí por economía de espacio. Sin embargo, el razonamiento presentado ilustra con claridad lo que queremos plantear.

Conclusiones

Como se puede apreciar en el trabajo de los profesores, la riqueza didáctica generada por la interacción con el programa CABRI va más allá de la exploración y la comprobación de propiedades. La interacción con el programa da ideas al aprendiz (profesor o estudiante) de las relaciones implícitas en las condiciones del problema, de la lógica particular de construcción y de los argumentos que se deben usar para una demostración formal dentro de una teoría geométrica. Esta experiencia motiva a estudiar más a fondo las posibilidades de formalización a partir de un conjunto de *axiomas* (proposiciones implícitas) propios de CABRI que serán el punto de partida para realizar un trabajo de argumentación y demostración formal en este contexto.

Como dominio de abstracción, el ambiente CABRI se convierte en una fuente inagotable de experiencias en las que el aprendiz se siente capaz de hacer geometría, pues el ambiente le proporciona elementos para activar su cognición a partir de actividades de exploración, construcción y argumentación. Hemos podido detectar que la dinámica entre la exploración y la sistematización conjuga cuatro momentos estrechamente relacionados que se combinan permanentemente en el trabajo matemático y que discriminamos para efectos de claridad en la exposición de las ideas: (i) la *exploración,* que surge al intentar enfrentarse a la solución de un problema y que da pie a la formulación de conjeturas para generar estrategias de solución, (ii) la *construcción*, que pone en evidencia las propiedades geométricas en juego y las relaciones entre ellas, constituyéndose en la semilla de la deducción, (iii) la *argumentación,* entendida como mecanismo para validar afirmaciones dentro del contexto en el que se está trabajando, a partir de la elaboración de inferencias de carácter deductivo y (iv) *la demostración* con la cual, las proposiciones geométricas se incorporan a una teoría geométrica.

Referencias

MEN (2000) *Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas.* Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. Documento interno.

Moreno L , Waldegg G (s.f.*). Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas* . En RICO L (eds.) *Didáctica de las Matemáticas*, Capítulo 3, editorial Síntesis, Madrid.

Moreno L (2002). ***Instrumentos matemáticos computacionales*****. En MEN (2002)** ***Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*****. Serie Memorias.**

Moreno L (1996). ***La epistemología genética: una interpretación.*** **Revista Educación Matemática, vol. III (3).**

Wersh J (1993). *Voces de la Mente.* editorial Visor, Madrid

Nuevas posibilidades de razonamiento geométrico

en un ambiente de geometría dinámica

Martín Eduardo Acosta Gempeler
Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas, MEN

Resumen. En este artículo presentamos la posibilidad de usar la geometría dinámica como un instrumento para resolver problemas, más que como un instrumento amplificador. Ilustramos esto con un ejemplo en el que se resuelve un problema de regresión lineal con Cabri.

Introducción

El proceso de incorporación de la tecnología a la enseñanza de las matemáticas es lento y complejo. Uno de los factores clave de esta incorporación es la asimilación que el profesor hace de la tecnología, no solamente desde el punto de vista técnico (habilidades de manejo) sino sobre todo desde el punto de vista matemático y pedagógico. La tecnología, como instrumento nuevo en la actividad de la clase, entra a competir con otros medios de representación, con otras maneras de concebir las matemáticas y con otras formas de concebir la enseñanza. Por lo tanto, la primera asimilación que el profesor hace de ella es para complementar su labor, es decir, como auxiliar amplificadora, sin provocar una reorganización de sus concepciones matemáticas y practicas pedagógicas.

Sin embargo, el verdadero potencial de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas esta en la posibilidad de transformar las concepciones sobre las matemáticas y las practicas pedagógicas. Para lograr esta transformación, es necesario identificar y explicitar los usos novedosos de la tecnología, en los que las matemáticas cobran un nuevo sentido (tanto para el alumno como para el profesor), posibilitando nuevas formas de hacer matemáticas.

En el caso especifico de la geometría, la situación actual muestra una subordinación total de la geometría al álgebra y el análisis, subordinación que la reduce al papel de ilustración o aproximación heurística a la solución del problema, dejando toda la operacionalidad o el peso del razonamiento al planteamiento y la solución de ecuaciones. En este artículo nos proponemos describir un enfoque diferente, en el que la geometría juega un papel protagónico en la resolución de un problema, sin recurrir al álgebra.

Según Luis Moreno, la incorporación de la tecnología en la enseñanza pasa por un proceso en dos etapas: la amplificación y la transformación, equiparables a los conceptos de asimilación y acomodación descritos por Piaget. Es decir, en su práctica de enseñanza, los profesores primero buscan realizar con la tecnología las tareas que realizaban sin ella. En esta etapa la tecnología juega un papel amplificador, se pueden realizar tareas con mayor exactitud, rapidez, etc. Sin embargo, no implica una transformación de la práctica, las actividades de clase siguen siendo en el fondo las mismas, aparte de la presencia de las herramientas que ayudan a realizarlas.

Pero si los profesores utilizaran regularmente las herramientas tecnológicas podrían llegar a descubrir cómo las herramientas tecnológicas pueden trasformar su práctica, produciendo actividades radicalmente nuevas.

Este proceso de transformación no es necesariamente espontáneo, y los profesores pueden permanecer indefinidamente en una fase de amplificación, es decir de asimilación de la tecnología a su práctica, sin una transformación de fondo. Es necesario que descubran nuevas posibilidades, usos novedosos de las herramientas tecnológicas, y que reconozcan en ellos la presencia del razonamiento matemático, para que comiencen a apreciar el potencial de las herramientas, y comiencen un proceso de acomodación de los propios esquemas para aprovechar todo ese potencial.

Un ejemplo

El ejemplo que presentamos a continuación pretende mostrar cómo el software de geometría dinámica Cabri Géomètre se puede utilizar de manera que la geometría desempeñe un papel fundamental en todo el proceso de resolución del problema, sin recurrir al planteamiento y resolución de ecuaciones. Es una modificación del trabajo sobre la regresión lineal publicado en Internet por José A. Mora (http://teleline.terra.es/personal/joseantm). Textualmente se plantea lo siguiente:

En los nuevos curricula de matemáticas en secundaria se hace especial hincapié en la enseñanza de la Estadística, esto es actualmente posible gracias a la tecnología que incorporan las calculadoras y los diferentes programas implementados en los ordenadores. Un ejemplo de la importancia del uso de la tecnología en la enseñanza de estos tópicos es la regresión, el uso de muchos datos lo más reales posible hace que muchas veces parte del alumnado se quede en el algoritmo de construcción y no acabe de ver qué es lo que hay detrás. Vamos a presentar un par de ejemplos de construcción geométrica de las rectas de mínimos cuadrados y mediana-mediana que hacen que se visualice el proceso de construcción y ayude al alumnado en la construcción de los conceptos para mejorar su comprensión .

Después de este planteamiento el profesor Mora da unas instrucciones para hacer unas construcciones en Cabri con las que espera ilustrar su punto . Podemos describir sucintamente su propuesta como sigue:

1. Construir algunos puntos que representan datos sobre los cuales se desea aplicar la regresión lineal.

2. Construir una recta a partir de un punto en el eje de las ordenadas que se ajuste aproximadamente a los puntos.

3. Construir los segmentos verticales que conectan los puntos con la recta.

4. Construir los cuadrados que tienen como lado los segmentos anteriores y sumar sus áreas.

5. Modificar la pendiente de la recta y el punto de corte con el eje de las ordenadas hasta obtener un valor mínimo de esa suma.

6. A partir de la fórmula estadística de la recta de mínimos cuadrados, deducir que la recta de regresión pasa por el punto que representa el promedio de los datos.

En esta actividad podemos ver cómo la tecnología funciona como amplificadora, es decir, sirve para ilustrar algunos aspectos de la teoría (en qué consiste el método de los mínimos cuadrados, y el hecho de que la fórmula contenga el promedio de los datos), aspectos que serían difíciles de ilustrar sin la herramienta, en términos de tiempo y precisión de las construcciones necesarias. El dinamismo se puede utilizar para ilustrar la idea de aproximación sucesiva a un valor mínimo.

Sin embargo, no hay una transformación cualitativa del trabajo de enseñanza: el objetivo es la comprensión de una fórmula, los razonamientos de cálculo son analíticos. Incluso podríamos decir que en la actividad está ausente una problemática, pues no se plantea ninguna pregunta: es una actividad de mostración, de ilustración. Una de las razones para este enfoque es la complejidad de los cálculos necesarios para la deducción de la fórmula, ya que se busca minimizar dos variables simultáneamente, y los alumnos pueden carecer de las herramientas matemáticas para comprender o desarrollar por sí mismos ese procedimiento.

Pero si tomamos en cuenta las potencialidades de la herramienta Cabri, esta actividad puede transformarse de manera significativa, permitiendo la exploración del problema desde el punto de vista geométrico, sin necesidad de desarrollar procedimientos analíticos complejos. Es lo que nos proponemos ilustrar en lo que sigue.

Enriquecimiento de la actividad

Comencemos por plantear un problema relacionado con la actividad el profesor Mora: *dado un conjunto de seis puntos (que representan parejas de datos), ¿es posible construir una recta de manera que las distancias de esos puntos a la recta sean mínimas? Si es posible, ¿cómo determinar esa recta?*

Partimos luego de la misma situación. Representación de los seis puntos, trazo de la recta de manera que pueda variarse la pendiente y el punto de corte de las ordenadas (para lo cual hay que construir primero un punto sobre el eje de las abscisas, una circunferencia con centro en dicho punto, un punto sobre la circunferencia para modificar la pendiente; la recta pasará por esos dos puntos), construcción de los cuadrados sobre los segmentos verticales que conectan los puntos con la recta y la suma de las áreas de esos cuadrados.

Una primera manipulación de la recta permite ver que es posible hacer variar la suma de los cuadrados, llegando aparentemente a un valor mínimo. Sin embargo, cabe la pregunta: ¿existe realmente un valor mínimo (o podemos encontrar de manera indefinida mejores aproximaciones)?

Procedamos entonces a fijar una de las variables en juego para estudiar el efecto de variación de la otra. Dejando fija la pendiente de la recta vamos a variar el punto de corte con el eje de ordenadas y analizar el efecto de esta variación en la suma de los cuadrados de las distancias:

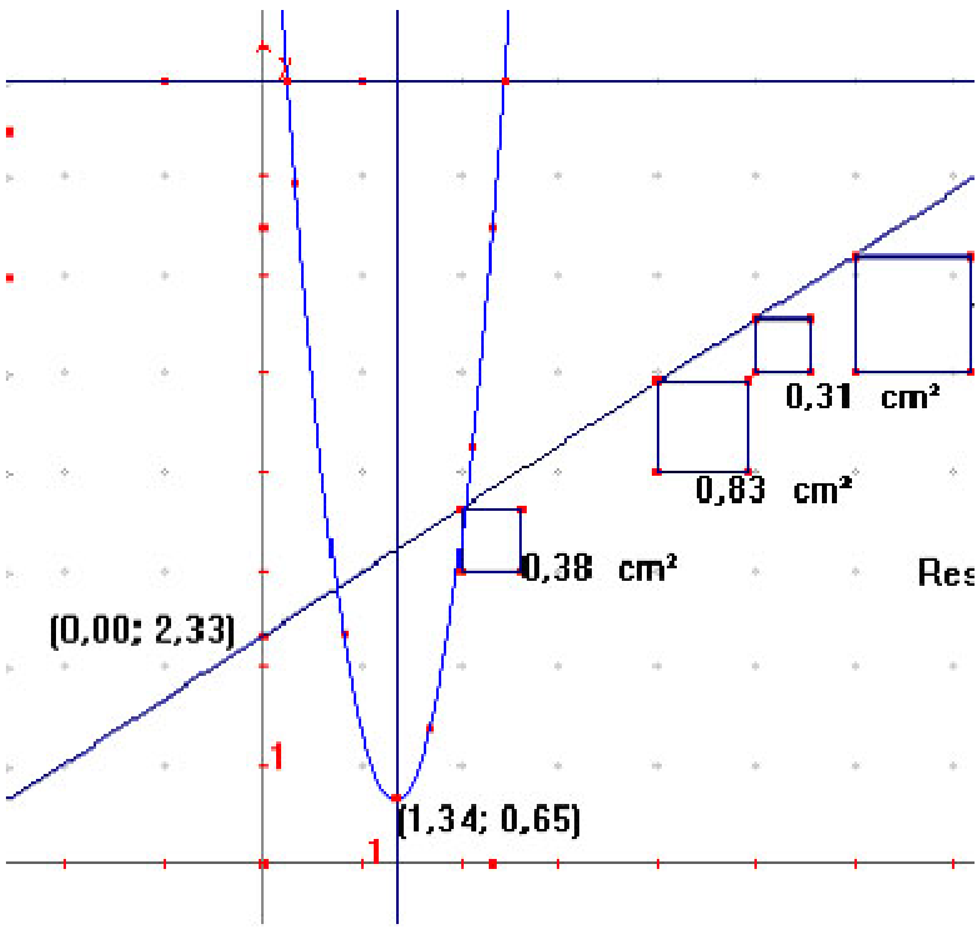
1. Determinar el punto de corte de la recta con el eje de las ordenadas, utilizando la herramienta Mostrar Coordenadas.

2. Transferir esa ordenada sobre el eje de las abscisas como variable independiente.

3. Transferir la suma de los cuadrados sobre el eje de ordenadas como variable dependiente.

4. Construir el punto que relaciona esas dos variables.

5. Construir el lugar geométrico de ese punto con respecto al punto de corte de la recta con las ordenadas (Nota: es importante definir 500 puntos para el cálculo del lugar geométrico).



Podemos arrastrar el punto de corte de las ordenadas y ver que la suma de los cuadrados disminuye hasta un cierto punto y luego vuelve a crecer. Además podemos asimilar ese lugar geométrico a una parábola, y por lo tanto deducir que tiene un vértice, o punto donde la suma de los cuadrados es mínima. ¿Cómo determinar ese punto? Dado que el vértice de la parábola se encuentra sobre el eje de simetría, basta con construir ese eje y determinar la intersección con la parábola.

1. Construir una cónica que pasa por cinco puntos sobre el lugar geométrico.

2. Trazar una recta horizontal cualquiera y determinar los puntos de intersección con la parábola.

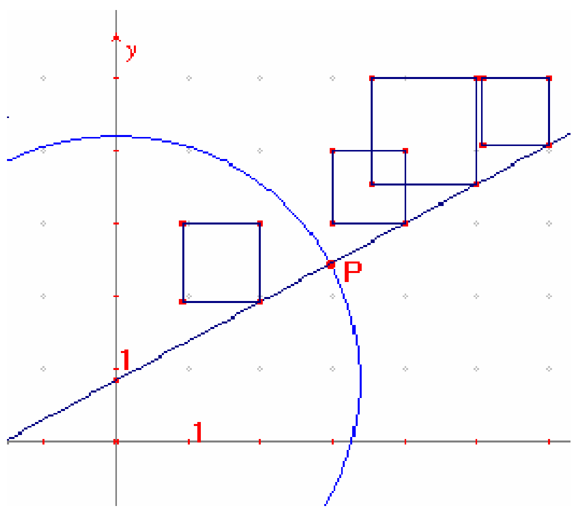
3. Construir la mediatriz de esos dos puntos de intersección.

4. Determinar la intersección de esa mediatriz con la parábola.

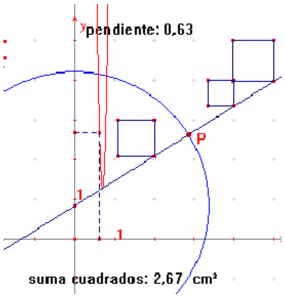
5. Determinar las coordenadas de ese punto.

Hasta aquí hemos logrado "demostrar" que para una pendiente definida existe un valor del corte de la recta con el eje de las ordenadas de manera que la suma de los cuadrados es mínima. También definimos un procedimiento para determinar ese valor.

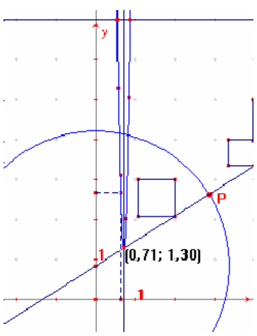
¿Ahora, qué sucede si fijamos el corte con las ordenadas y variamos la pendiente? Podemos utilizar el mismo procedimiento anterior (transferencia de variables a los ejes y construcción del lugar geométrico).



Si transferimos ahora el valor de la pendiente sobre el eje de las abscisas (variable independiente) y la suma de los cuadrados sobre el eje de las ordenadas, obtendremos un punto que relaciona esas dos variables. Podemos entonces construir el lugar geométrico de ese punto con respecto al punto P (que determina el valor de la pendiente).



Utilizando un razonamiento análogo al anterior, podemos "demostrar" que para un corte de las ordenadas definido, es posible encontrar un valor de la pendiente tal que la suma de los cuadrados sea mínima.



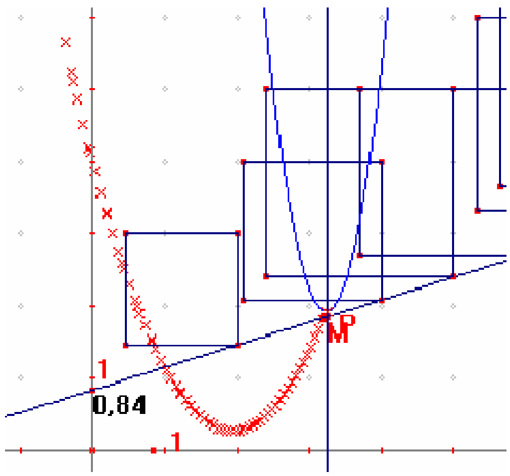
Ya sabemos entonces que fijando una de las dos variables en juego (pendiente y punto de corte con las ordenadas), es posible encontrar un valor de la otra que minimiza la suma de los cuadrados. Pero ¿existe un valor mínimo con respecto a las dos variables simultáneamente, y cómo determinarlo?

Tomemos la primera parte de la pregunta: Utilizando Cabri, podemos determinar todos los valores (razonablemente pequeños) de la suma de los cuadrados para una pendiente dada, variando el corte con el eje de ordenadas: es la parábola obtenida como lugar geométrico.

Además podemos determinar el punto en el que esa suma es mínima: el vértice de la parábola. Podríamos entonces preguntar qué sucede con ese punto a medida que varía la pendiente. es decir, ¿cuál es el lugar geométrico de ese punto con respecto a P?

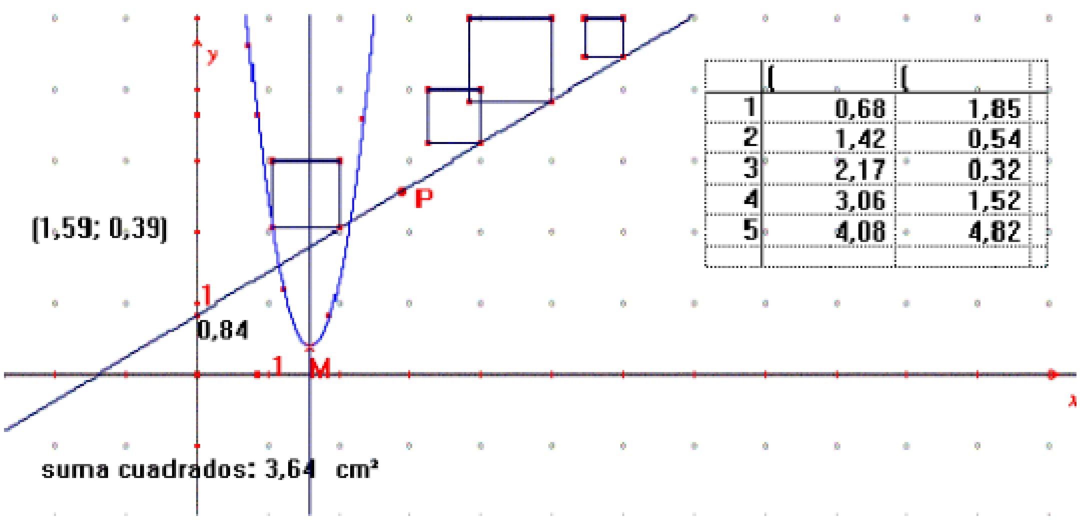
Desafortunadamente la máquina parece llegar al límite de su capacidad de cálculo y el programa se bloquea. No obstante, podemos utilizar otro procedimiento de geometría dinámica para darnos una idea sobre ese lugar geométrico: la traza.

Coloquemos la traza al vértice de la parábola obtenida y apliquemos animación al punto P.

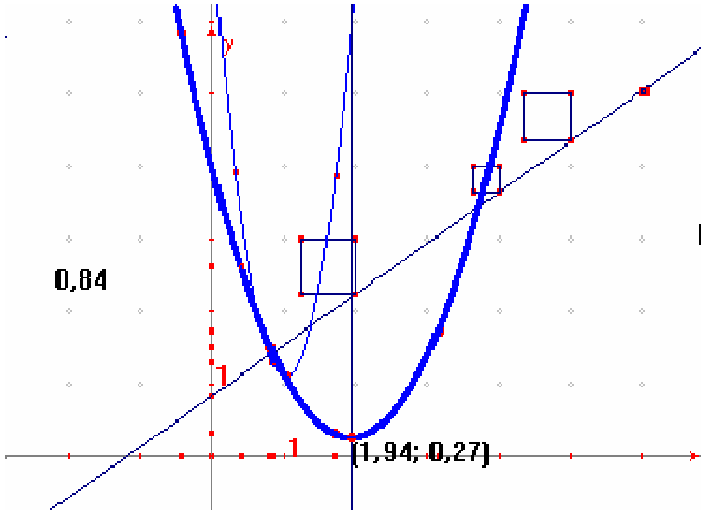


Aparentemente ahí tenemos nuevamente una parábola. El inconveniente es que no podemos construirla de manera explícita utilizando la traza. Así que vamos a utilizar un procedimiento alternativo.

Mostramos las coordenadas del punto M (mínimo de la parábola) y las incluimos en una tabla. Luego arrastramos P y almacenamos en la tabla cinco valores de M.



	(	(
1	0,68	1,85
2	1,42	0,54
3	2,17	0,32
4	3,06	1,52
5	4,08	4,82



Luego podemos reconstruir esos cinco puntos para trazar la parábola y encontrar el vértice, es decir el punto para el cual la suma de los cuadrados es mínima con respecto a la pendiente y al corte de las ordenadas de manera simultánea.

Una vez obtenido el punto de corte con las ordenadas para el cual la suma de los cuadrados es mínima, basta con utilizarlo como punto de partida para la parábola de las pendientes para encontrar a su vez la pendiente para la cual esta suma es mínima.

Llegamos así a contestar plenamente el problema planteado sin plantear ninguna ecuación, utilizando únicamente recursos geométricos.

Conclusiones

En este ejemplo puede verse como el Cabri no solo actúa como amplificador, gracias al cual se puede ilustrar el sentido de una fórmula de estadística, sino que transforma la actividad en una solución de un problema matemático utilizando el razonamiento geométrico. Gracias a las herramientas lugar geométrico y cónicas, el Cabri toma a su cargo la complejidad de la construcción, sin eliminar el sentido de la misma. El razonamiento sintético, es decir sobre figuras, se convierte en procedimiento adecuado para la resolución del problema. De esta manera adquiere un nuevo significado no solo el problema en si, sino los conocimientos geométricos utilizados para su solución (parábola, vértice, mediatriz, etc.).

La familiarización de los profesores con ejemplos como éste es indispensable para que superen la utilización de la tecnología como amplificador, y pasen a una etapa de transformación curricular.

Referencias

Moreno L (2002) *Evolución y tecnología, en Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional, Serie Memorias.

Mora JA *http://teleline.terra.es/personal/joseantm*

Argumentación matemática y demostración en Cabri:

el problema de la colinealidad

Hugo Martín Cuéllar García

Instituto Técnico Industrial de Tocancipá, Cundinamarca [3]

Resumen. El trabajo con Cabri ha mostrado ser muy efectivo al permitir, mediante exploraciones sistemáticas, el estudio de las regularidades de las construcciones geométricas generando una forma de presentar la geometría escolar basada en la búsqueda de invariantes de las figuras geométricas diferente a la presentación tradicional a partir de demostraciones, en ocasiones, sin sentido. Sin embargo, un pensamiento matemático genuino necesita, además de la experimentación para obtener conclusiones y dar significado a las mismas, desarrollar esquemas de argumentación que admitan llegar a estas conclusiones a partir de hechos conocidos. Cabri permite el juego en ambos sentidos, es decir, además de ser muy útil en la búsqueda de regularidades, también ofrece la posibilidad de generar esquemas válidos de argumentación matemática.

Introducción

El razonamiento matemático se puede entender como la *acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión* y se caracteriza, entre otras, por acciones como: *dar cuenta del cómo y por qué de los procesos, justificar las estrategias y los procedimientos, formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contra-ejemplos, y, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos* (MEN, 1998). Estas acciones también caracterizan las funciones que se observan en el proceso de demostración matemática: descubrimiento, verificación/convicción, explicación, sistematización y comunicación (De Villiers, 1993).

Un software de geometría dinámica como Cabri presenta un ambiente en el cual las acciones de explorar, formular hipótesis, hacer conjeturas y encontrar contraejemplos, se hacen explícitas por el dinamismo que adquieren los objetos geométricos –básicamente por la acción agarre/arrastre – y estas se pueden entender como un fuerte apoyo hacia las funciones de explicar y descubrir del proceso de demostración. Sin embargo, como se pretende ilustrar en el presente artículo, el ambiente Cabri también se presta para vivenciar las funciones de sistematización y de verificación/convicción señaladas por De Villiers.

Marco conceptual

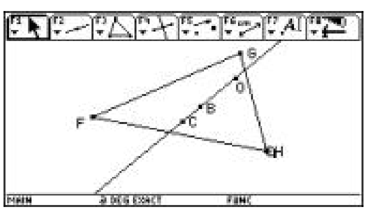
En una construcción geométrica con Cabri tanto el juego de manipulación de los objetos independientes para inferir resultados, como la consecuente comprobación "visual" que se hace de los mismos, inciden en la interiorización de las conclusiones que se elaboran para que de esta manera comiencen a formar parte de una gama de conocimientos que se dan por hechos. Por ejemplo, cuando se construye un triángulo y se trazan las tres medianas, se obtiene un solo punto en su intersección (baricentro). La manipulación, con la acción agarre/arrastre, que lleva a convencer sobre la validez de este resultado se basa en el *Principio de Experiencia*, es decir, se llega al convencimiento que es cierto puesto que cada vez que se experimenta bajo las mismas condiciones los resultados son los mismos (GONZÁLEZ, 2001). La experiencia muestra que el baricentro es único sin importar el triángulo que se tome para hacer la construcción y sin importar las modificaciones que se realicen sobre el mismo.

Otra herramienta útil de Cabri cuando se pretende verificar y convencer es la herramienta Check Property que permite comprobar la validez de algunas condiciones como paralelismo, perpendicularidad y colinealidad, entre otras. En este caso el proceso de convencimiento se da por el *Principio de Autoridad,* caracterizado por el hecho de que como hay alguien (o algo) que es el depositario del saber, se recurre a él para resolver las dudas sobre conclusiones obtenidas (GONZÁLEZ, 2001). En este caso el depositario del saber es Cabri, y la verificación que hace funciona de tal manera que ni el profesor ni los estudiantes saben a ciencia cierta el proceso que ha seguido para dar su respuesta. La condición se cumple porque Cabri dice que se cumple.

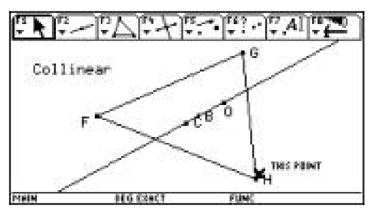
Estas dos vías hacen parte del trabajo normal con Cabri para convencer sobre la validez de los resultados, pero no son las únicas de las cuales se puede sacar provecho a la hora desarrollar pensamiento matemático. En este artículo se pretende mostrar que con Cabri es posible adelantar procedimientos de argumentación basados en el principio de usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos –precepto utilizado en la construcción de un sistema axiomático –. De esta forma, el proceso que se sigue para convencer se basa en el *Principio de Argumentación Matemática* y para emplearlo es necesario construir un sistema que lo sustente, de tal manera que a partir de ciertas definiciones iniciales y de unos primeros principios –llamados postulados– se generen nuevos hechos que a su vez se puedan utilizar para obtener conclusiones cada vez más elaboradas. En el contexto Cabri los elementos que se consideran como básicos en la argumentación dependen del entorno tecnológico en el cual se está trabajando, es decir, del software incorporado en las calculadoras algebraicas.

El sentido de la argumentación en Cabri

Al considerar un problema como el de verificar que el ortocentro, el baricentro y el incentro de todo triángulo no equilátero están alineados (recta de Euler), es posible recurrir a explicaciones de carácter visual puesto que basta con construir la recta que pase por dos de ellos y notar que, al manipular los vértices del triángulo original, dicha recta contiene al tercero (convencimiento por el *Principio de Experiencia*). Ahora bien, si esta manipulación aún no convence, se puede verificar la condición de colinealidad de los tres puntos con la herramienta Check Property de tal manera que Cabri informe (convencimiento por el *Principio de Autoridad*) si están alineados o no lo están (Figura 1).



Principio de Experiencia: Al manipular cualquiera de los vértices F, G o H se nota que el resultado de la colinealidad es "visualmente obvio".



Principio de Autoridad: Cabri comprueba –sin explicitar cómo– que los tres puntos son colineales.

Figura 1

Sin embargo, si se trata de desarrollar esquemas de razonamiento matemático que lleven a la verificación y al convencimiento utilizando el *Principio de Argumentación Matemática* es primordial establecer de antemano normas de acuerdo al interior de la comunidad en la que se esté discutiendo el problema. En el ambiente Cabri, estos principios pueden variar teniendo en cuenta el grado de rigurosidad que se quiera establecer. En algunos casos se puede acordar el aceptar como principio de verificación la medición, usando las herramientas que para ello tiene incorporadas el programa y en otros casos, será necesario crear herramientas –que no recurran a la medición– para justificar las afirmaciones matemáticas que se realicen.

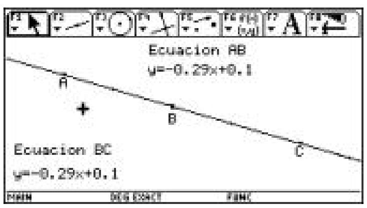
A continuación se ilustran estos tipos de argumentación matemática y los problemas que pueden surgir al considerar como norma de verificación la medición.

Argumentos que recurren a la medición

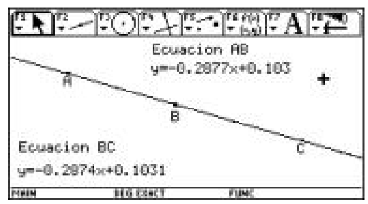
Tomando como referencia la idea intuitiva de colinealidad de tres puntos dados y aceptando la medición que hace Cabri como norma de verificación, es posible recurrir a diversas argumentaciones. En todas ellas entra en juego el problema de la aproximación puesto que, dependiendo del número de cifras significativas que se tomen, las conclusiones serán verdaderas o no. Algunos ejemplos de este tipo de argumentación, para probar que tres puntos dados A, B y C son colineales, son los siguientes:

Argumento 1. Se trazan dos rectas, una a partir de A y B, y otra a partir de B y C. Se pide la ecuación de cada una de estas rectas. Si las dos ecuaciones son iguales entonces los tres puntos son colineales.

En este caso, los coeficientes de las ecuaciones son tan solo aproximaciones y es posible que, dependiendo del número de cifras significativas que se tomen, los tres puntos no se consideren colineales. La Figura 2 ilustra un ejemplo en el cual se observan las diferencias al considerar dos o cuatro cifras significativas: con dos cifras significativas la afirmación es válida, con más cifras ya no lo es.



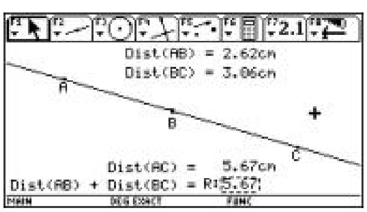
Argumento 1 con dos cifras significativas.



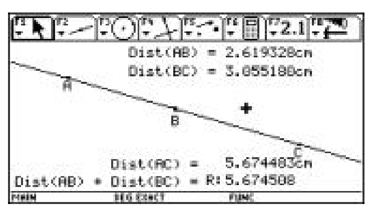
Argumento 1 con cuatro cifras significativas.

Figura 2

Argumento 2. Se toman las distancias AB, BC y AC –dist(AB), dist(BC) y dist(AC) respectivamente–. Si dist(AB) + dist(BC) = dist(AC) entonces los tres puntos son colineales. La Figura 3 muestra un ejemplo de respuestas que se pueden obtener al considerar dos o seis cifras significativas, en donde se observa que ocurre lo mismo que en el caso anterior.



Argumento 2 con dos cifras significativas.



Argumento 2 con seis cifras significativas.

Figura 3

Argumento 3. Se trazan las rectas BA y BC. Se mide el ángulo ABC. Si el ángulo medido es de 180°, entonces los tres puntos son colineales.

Argumento 4. Se construye el triángulo ABC y se mide su área. Si la medida de esta área es cero (0), entonces los tres puntos son colineales.

Argumento 5. Se construye el triángulo ABC. Se mide las distancias AB y BC –dist(AB) y dist(BC) respectivamente–. Se mide el perímetro del triángulo. Si el perímetro del triángulo es el doble de la suma dist(AB) + dist(BC), entonces los tres puntos son colineales.

Construcción de herramientas de verificación que no recurren a la medida

Si no se acepta la medición como un mecanismo de argumentación, es necesario construir herramientas de verificación que, en el contexto de un sistema, permitan hacer la comprobación de proposiciones. Antes de construir dichas herramientas se describen los componentes del sistema Cabri que se quiere edificar.

Definiciones básicas. Para el caso de la colinealidad, se consideran como definiciones básicas las construcciones Cabri de*: punto, segmento, punto sobre objeto, recta, punto de intersección y circunferencia*. Se toman como definición de estos objetos lo que Cabri dibuja con la herramienta correspondiente *(Point, Segment, Point on object, Line, Intersection Point, Circle)*.

Postulado: Rectas en el mundo Cabri. Dadas dos rectas se pueden dar tres casos:

1. No se cortan (*rectas paralelas*)

2. Se cortan en un punto (*rectas intersecantes*), en cuyo caso este punto recibe el nombre de *Punto de Intersección*.

3. Una recta está ubicada exactamente sobre la otra (*rectas equivalentes*), en este caso no existe punto de intersección –Cabri no dibuja “el punto de intersección” entre dos rectas equivalentes–.

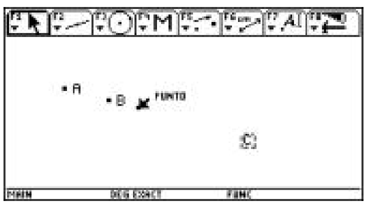
Definición: Rectas equivalentes. En Cabri ocurre que es posible que dos o más rectas ocupen el mismo “espacio”, de tal manera que, aunque visualmente no se diferencien, se trata de objetos (rectas en este caso) diferentes. De esta forma, al contrario de lo establecido en los postulados de la Geometría Euclidiana, por dos puntos Cabri pueden pasar muchas rectas y, por lo tanto, se pueden caracterizar (definir) como rectas equivalentes aquellas que tienen por lo menos dos puntos en común.

Proposiciones Iniciales. Aunque el término proposición se refiere a una frase completa con sujeto y predicado, en el contexto de este artículo se toma como *proposición* cualquier construcción de Cabri que se caracterice por el hecho de poder ser elaborada únicamente a partir de los elementos tomados como definiciones básicas: *punto, segmento, punto sobre objeto, recta, punto de intersección* y *circunferencia*. En este caso las siguientes herramientas de construcción que utiliza Cabri: *Perpendicular Line, Parallel Line, Midpoint, Perpendicular Bisector* y *Angle Bisector*, son consideradas como *proposiciones iniciales* puesto que para cada una de ellas es posible crear una *Macro Construcción* que genere la construcción deseada a partir, únicamente, de los elementos básicos. Pero dado que Cabri ya tiene incorporadas estas construcciones se pueden aceptar en el mismo sentido en que se aceptan las definiciones básicas, es decir, en este sistema una recta perpendicular es lo que Cabri dibuja con la herramienta (Macro) *Perpendicular Line*, y de igual manera se pueden establecer definiciones análogas con las otras cuatro construcciones mencionadas.

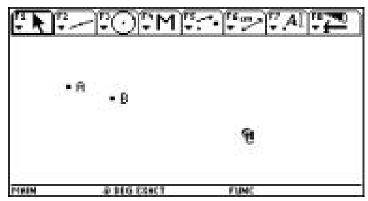
Herramientas de verificación. Se pretende desarrollar una argumentación que permita establecer la condición de colinealidad a partir de las definiciones básicas, los postulados y las proposiciones iniciales, y para ello se van a construir las herramientas (*Macro Construcciones*) que verifiquen esta condición. Desarrollar una argumentación significa, en este sentido y para este sistema, construir las proposiciones para aquello que se quiere verificar.

Definición 1 de colinealidad . Dados tres puntos libres A, B y C, se construyen los puntos medios de los segmentos AB y BC. Se nombran estos puntos G y H respectivamente. Se trazan las rectas AH y CG, y se llama P al punto de intersección de las mismas. La manipulación de los puntos libres permite construir el criterio de validación al observar los casos en que aparece el punto P y los casos en que desaparece. Se define como condición de colinealidad el caso en que el punto P desaparece (Figura 4).

Para construir la macro, se ocultan los puntos medios y las rectas. Se toman como objetos iniciales los puntos A, B y C, y como objeto final el punto P. Esta herramienta (Macro Construcción) permite verificar la colinealidad puesto que al aplicarla sobre tres puntos dados, es posible que no estén alineados, en cuyo caso se forma el punto P objeto final, o, si están alineados no se forma este punto.



Los tres puntos no son colineales y por tal razón aparece un nuevo punto (PUNTO)



Los tres puntos son colineales. Al mover el punto C, o cualquiera de los otros, el nuevo punto desaparece en el momento de la colinealidad.

Figura 4

Definición 2 de colinealidad. Dados tres puntos libres A, B y C, se construyen las mediatrices (*Perpendicular Bisector*) de los segmentos AB y BC. Se encuentra el punto de intersección (P) de estas mediatrices y se traza el segmento PB. La manipulación de los puntos libres permite construir el criterio de validación al observar los casos en que aparece el segmento PB y los casos en que no aparece. Se define como condición de colinealidad el caso en que el segmento desaparece (Figura 5).

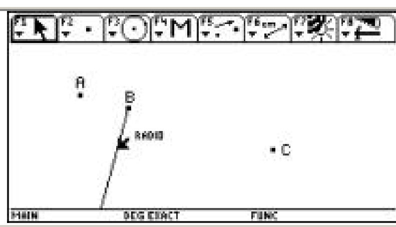
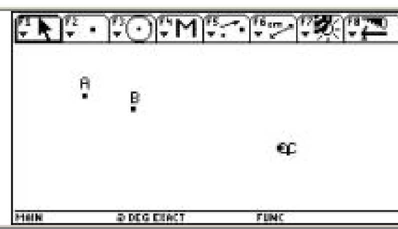
	
Los tres puntos no son colineales y por tal razón aparece la recta PB.	Los tres puntos son colineales. Al mover el punto C la recta PB desaparece en el momento de la colinealidad.

Figura 5

Para construir la macro se ocultan los segmentos, las mediatrices y el punto P. Se definen como objetos iniciales los puntos A, B y C y como objeto final el segmento PB(RADIO). Esta herramienta (Macro) permite verificar la colinealidad puesto que al aplicarla sobre tres puntos dados se puede observar que si son colineales no se crea el segmento objeto final (RADIO), y, si no son colineales el segmento objeto final si se genera.

Antes de continuar, es conveniente realizar una corta observación metodológica. Se estableció anteriormente como *proposición Cabri* aquella construcción que puede realizarse mediante una Macro a partir de los elementos básicos y, por tal razón, si se realiza una Macro para construir la recta de Euler se le da el status de *proposición* a dicha recta, es decir que ahora se puede aceptar como *recta de Euler Cabri* aquella recta que Cabri dibuja con la macro correspondiente. Esto es cierto, pero de ninguna manera garantiza que los tres puntos implicados sean colineales puesto que al construir la recta, como objeto final de la macro, solo se consideran dos puntos, y el que contenga al tercero sólo se verifica, como ya se observó, experimentalmente por manipulación o recurriendo al principio de autoridad.

Ahora si, aceptando cualquiera de los argumentos que utilizan la medición o alguna de las definiciones anteriores como criterios de verificación para la colinealidad de tres puntos dados, al considerar la construcción de la recta de Euler se puede afirmar que el ortocentro, el baricentro y circuncentro son colineales, no solamente por la manipulación de los vértices del triángulo del cual se parte, ni porque Cabri diga que si lo son, sino porque se ha creado un procedimiento, a partir de las definiciones básicas, que verifica que efectivamente estos puntos son colineales *(Principio de Argumentación Matemática).*

Aplicación: el Teorema de Varignon

Un ejercicio revelador, tanto de la exploración Cabri como del potencial de las herramientas de prueba construidas, consiste en determinar las características del cuadrilátero que se genera al unir los puntos medios de los lados de otro cuadrilátero dado. La manipulación permite observar que se trata de un paralelogramo (*Principio de Experiencia*) y Cabri puede chequear esta condición (*Principio de Autoridad*) al tomar lados opuestos del cuadrilátero formado (Figura 6).

Ahora se busca una herramienta de prueba que permita concluir que efectivamente los lados opuestos del cuadrilátero obtenido son paralelos recurriendo al *Principio de Argumentación Matemática.*

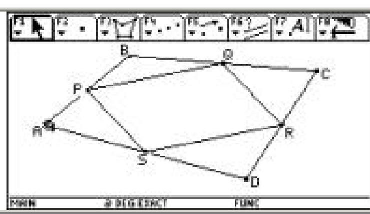
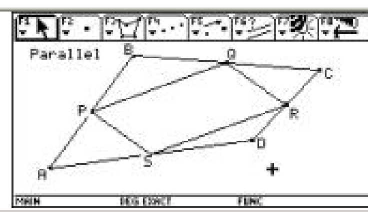
	
Principio de Experiencia: La manipulación de los vértices del cuadrilátero original permite observar que siempre se genera un paralelogramo.	***Principio de Autoridad:*** Cabri verifica la condición de paralelismo entre dos lados opuestos del cuadrilátero obtenido.

Figura 6

La argumentación puede seguir el siguiente esquema:

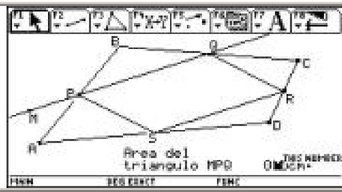
· Se considera un segmento del cuadrilátero obtenido, por ejemplo el segmento SR.

· Se traza una paralela *(Parallel Line)* a este segmento por uno de los otros dos puntos medios.

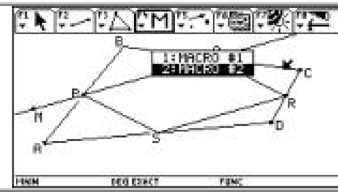
· Se ubica un punto M sobre la paralela construida en el paso anterior (*Point on object*). Este punto se define sobre la paralela pero no sobre el segmento.

· Se utiliza algún argumento de medición o herramienta de prueba.

¿Qué ocurre cuando se aplica uno de los argumentos o macros, construidos anteriormente, a los puntos M, P y Q? (Figura 7)



Argumento 4. Al construir el triángulo MPQ y medir su área, esta es 0 cm^2.



Definición 2 de colinealidad. No se genera el segmento RADIO, objeto final de la macro.

Figura 7

· Se afirma que los tres puntos M, P y Q son colineales, es decir, que existe una recta (I) que los contiene.

· Si ahora se toma otro punto N sobre la paralela de la construcción y se verifica la colinealidad de N, M y P con el método descrito, se observa que también cumplen la condición. Es decir que existe otra recta (recta II) que contiene a los puntos N, M y P. Igualmente se puede verificar la colinealidad para M, N y Q, para P, Q y N, etc., concluyendo, por lo tanto, que todas estas rectas son equivalentes. Es decir el segmento PQ está sobre una recta paralela al segmento SR y en consecuencia PQ y SR son segmentos paralelos.

El mismo tipo de argumentación se emplea para verificar el paralelismo entre PS y QR.

Observaciones finales

· Estas macros que verifican la colinealidad pueden convertirse en un instrumento de gran poder cuando se quiere convencer, por *argumentación matemática*, de otros resultados obtenidos por la *experimentación* o por el *principio de autoridad*. Por ejemplo se puede crear un argumento para convencer que efectivamente el corte de las medianas de un triangulo (baricentro) es único y extender el mismo tipo de argumentación para el ortocentro, el circuncentro y el incentro. Además también se pueden verificar, como ya se vio, condiciones de paralelismo y crear argumentos para verificar condiciones de perpendicularidad y de pertenencia a una recta.

· Los razonamientos descritos en este artículo son de argumentación en el mundo Cabri y por lo tanto tienen que ser explorados en este ambiente ya que no es posible extenderlos, por ejemplo, a la geometría euclidia de papel y lápiz.

· El esquema de argumentación que se ha trabajado recurre a un argumento visual, como lo hace Cabri por el *Principio de Experiencia* o por el *Principio de Autoridad*, pero con la diferencia de que ahora el proceso de creación de las herramientas de verificación se hace explícito.

· La exposición presentada muestra una forma de entender, en especial con sentido didáctico, la demostración matemática. Hecho que se puede resumir en los siguientes términos:

> Se tiene una teoría –en este caso, el sistema formado por las definiciones básicas, los postulados y las proposiciones en el ambiente Cabri y se tiene un "hecho matemático" –la colinealidad de tres puntos–. Demostrar este hecho significa incorporarlo a la teoría, de tal manera que sea consecuencia de la teoría. Y es eso lo que se ha mostrado.

Referencias

De villiers M. (1993) *El papel y la función de la Demostración en Matemáticas*. Epsilon No 26. p.15-30.

González, M. J. (2001) *Reflexiones en torno a la demostración* (recopilación de textos preparados por el Grupo de Aprendizaje de la Geometría). Documento en línea ver http://uv.es/~didmat/angel/seiembid.html#textos

Ministerio De Educación Nacional (1998) *Matemáticas, Lineamientos curriculares*. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá.

Moreno, L. (1996) *La demostración en perspectiva*. Revista Mexicana de Investigación Educativa, Vol. 1.

Herramientas computacionales en el desarrollo de procesos de interpretación y argumentación en la clase de matemáticas

Gilberto Obando, Fabián Posada, Alexander Jiménez & John Mario Sepúlveda

Universidad de Antioquia, Medellín

Gloria Galvis Vingues

Normal Superior María Auxiliadora, Medellín

John Jairo Múnera Córdoba

Liceo Comercial Pacho Luis Álvarez, Medellín

Carlos Mario Cárdenas

Colegio Santa Teresa, Medellín

Francisco Osuna Martínez

Escuela Normal Superior, Envigado

Resumen. Los instrumentos computacionales en la educación matemática se han convertido en una alternativa para dinamizar los procesos de aprendizaje y por consiguiente movilizar el pensamiento matemático de los estudiantes. Tomando como punto de partida el concepto de sistema representacional, documentamos aquí los cambios cualitativos de los estudiantes en cuanto a la argumentación y comunicación de ideas matemáticas. El desarrollo de una situación problema relacionada con el pensamiento numérico y, mediada por los diversos registros de representación que proporciona la calculadora TI-92 plus.

Introducción

Ignorar los aportes de las tecnologías de la información y la comunicación en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas es desconocer las diversas posibilidades de interacción de los estudiantes con el quehacer matemático a través de dichos mediadores y privarlos de los acercamientos conceptuales que ofrecen los diferentes sistemas de representación de las herramientas informáticas. En particular, la utilización de calculadoras gráficas dotadas de software interactivo especializado para entornos escolares, está permitiendo a estudiantes y docentes tratar los conceptos matemáticos a través de la relación entre las diferentes representaciones ofrecidas. Estos recursos han puesto en manos del docente un gran potencial para hacer de las matemáticas un espacio significativo en el desarrollo del pensamiento y la creatividad.

El propósito de este artículo es mostrar los cambios que se evidencian en las formas de argumentación de los estudiantes a partir de la utilización de diferentes sistemas de representación. La situación problema propuesta hace alusión a un problema convencional de la aritmética escolar, cuyo único propósito, al tratarla sólo con papel y lápiz, ha sido aplicar el concepto de mínimo común múltiplo. Al incorporar para su tratamiento la mediación instrumental, los estudiantes, de un lado, indagan y analizan mejor la situación, y de otro, amplían las reflexiones en cuanto a las relaciones entre los conceptos involucrados y por consiguiente comunican de manera más elaborada sus argumentos conceptuales.

Marco teórico

Si bien el concepto de representación es de gran complejidad, y admite diferentes posibilidades de interpretación, es ampliamente aceptada la acepción en la que se piensa la representación como el acto a través del cual algo está en lugar de, o evocando a, otra cosa ausente. Kaput (1987a), propone que toda representación hace referencia a dos dominios claramente diferenciados e interrelacionados: el mundo representante (la representación, lo simbólico) y el mundo representado (el objeto, el concepto). También propone que la actividad representacional es intrínseca a la actividad matemática misma dado que los objetos conceptuales son abstractos y no se puede acceder a ellos sino a través de sus representaciones. La actividad matemática misma es impensable por fuera de los sistemas utilizados en la representación. Aparece pues, una unidad indisoluble que plantea que los sistemas de representación 'representan' los conceptos matemáticos, pero a su vez, los conceptos matemáticos se estructuran a partir de los sistemas de representación. Esta identidad hace que los sistemas de representación jueguen un papel fundamental en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Adicionalmente, en el hacer matemático, la representación de unas estructuras por otras es una actividad natural y ha permitido enormes desarrollos a las matemáticas. Muestra de tal actividad representacional se puede ver en los morfismos, en los isomorfismos, en las construcciones algebraicas, en las representaciones geométricas, etc.

Conviene sin embargo aclarar que en ocasiones, cuando un concepto se trabaja a partir solo de un registro, da origen a distorsiones en el tratamiento didáctico de la enseñanza de las matemáticas, pues termina confundiéndose el representante con lo representado, y por ende, desde esta perspectiva la experiencia matemática propuesta a los estudiantes es muy pobre.

Dicho de otra manera, no puede asumirse que los sistemas de representación sean neutros en el aprendizaje de las matemáticas. Esto es, no deben entenderse los sistemas representacionales solo como una externalización de lo que está en la mente, sino que se debe asumir que la organización conceptual en la cognición humana es el resultado de los sistemas representacionales utilizados, y que por tanto, han moldeado la comprensión matemática misma.

Así pues, las experiencias de aula deben permitir al alumno construir significados a partir de la interacción con diversos sistemas de representación. Pero esta interacción no debe quedarse en el acto de traducir de un sistema a otro. Se debe posibilitar, en términos de Duval (1999), la coordinación entre sistemas de representación. Esta coordinación debe entenderse como la posibilidad de identificar los elementos estructurales que en un sistema de representación dado están cumpliendo con la fu nción de la representación, y ponerlos en relación con los elementos estructurales del otro sistema de representación. Así, se puede determinar cómo un sistema influye en el otro o viceversa, y cómo, en su conjunto, determinan la pluralidad de sentidos y significados para el o los conceptos matemáticos representados.

Por ejemplo, en la enseñanza de la aritmética, el trabajo sobre la multiplicación es presentado de manera estática por medio de un único tipo de representación asociado al esquema de suma de sumandos iguales. Por el contrario, si dicho trabajo se realiza desde el estudio de situaciones matemáticas enfocadas en la búsqueda de relaciones multiplicativas a través del cambio y la covariación, se puede aprovechar la riqueza de las diferentes representaciones: una simulación, toma y organización de datos en arreglos tabulares, representación gráfica de los mismos y búsqueda de expresiones simbólicas, y por lo tanto, la riqueza semántica construida por los estudiantes es más significativa.

Diseño de la experiencia

En la experiencia se seleccionó como muestra un grupo de grado séptimo de estrato socioeconómico bajo, fundamentalmente 1 y 2. Con esta población se realizó, previamente a las situaciones planteadas, un trabajo centrado en el manejo básico de los programas instalados en la calculara (Cabri, editor de datos, editor de funciones, home, etc). En general las situaciones problemas fueron abordadas en pequeños grupos de tres o cuatro alumnos.

Las situación problema propuesta al grupo fue la siguiente:

Una pista de carreras de autos tiene forma circular. Tres autos de marcas Toyota, Honda y Mazda, inician la carrera desde la meta. Durante el desarrollo de la carrera se observa que el carro Toyota siempre tarda 3 minutos en dar una vuelta, que el carro Honda siempre emplea 4 minutos en dar una vuelta y que el Mazda siempre tarda 6 minutos en dar una vuelta. La carrera está programada para 200 vueltas. ¿en qué momento de la carrera los tres autos vuelven a pasar de manera simultánea por la meta?.

La secuencia de enseñanza parte del principio de permitir el análisis de una misma situación problemática a partir de diferentes sistemas de representación, y la coordinación entre ellos. Es decir, a partir de la información suministrada por un sistema de representación, se identifican aspectos estructurantes del concepto que están presentes en otro y se reconoce nueva información a partir del análisis de las representaciones.

Así pues, la situación parte de un trabajo inicial con lápiz y papel que permite a los estudiantes una primera aproximación a la situación problémica propuesta. En este trabajo inicial se ponen en juego sistemas de representación numérica y tablas de datos.

Un segundo momento de la actividad se realiza con la ayuda del ambiente representacional ofrecido con la calculadora TI-92. De esta manera, en el Cabri se simula la situación problema [4], y a partir de allí, aprovechando la ejecutabilidad de las representaciones informáticas, se procede a analizar la situación y a confrontar el trabajo realizado solo con lápiz y papel.

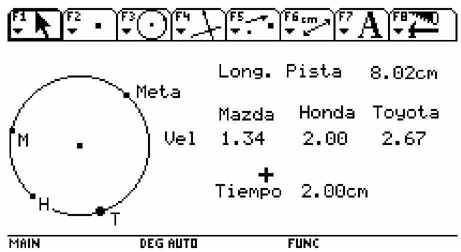


Figura 1: Pantalla del archivo de simulación

En un tercer momento se sugiere a los alumnos llenar una tabla de doble entrada en la que se consignen el tiempo y el número de vueltas de cada auto. Estas tablas se realizan con lápiz y papel y, en algunos casos con la ayuda del archivo de simulación.

Finalmente se utiliza la toma automática de datos de la calculadora TI-92, para llenar las tablas y se realizan las respectivas gráficas cartesianas.

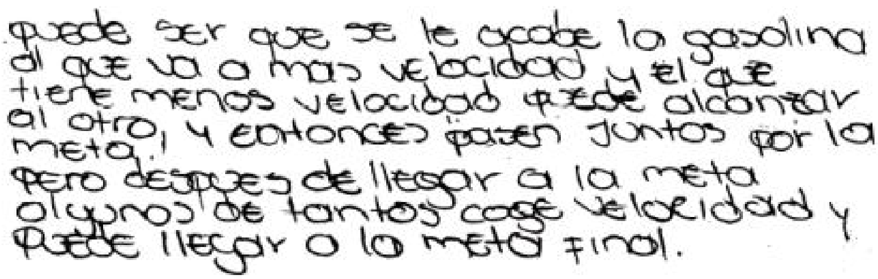
El trabajo realizado de esta manera permite que la situación problema tenga en su desarrollo mecanismos de validación explícitos, de tal forma, que el estudiante pueda regresar sobre lo realizado para confirmar o rechazar las hipótesis iniciales, y así, mejorar, o incluso, trazar un nuevo plan de acción. Además, esta estrategia de validación, centrada en el trabajo del alumno sobre la situación, y no en la palabra del maestro, permite el desarrollo de formas y estrategias de argumentación, que al pasar por los diferentes sistemas de representación evolucionan en su estructura conceptual.

Resultados

Un primer resultado, fruto del trabajo realizado, tiene que ver con la capacidad de los alumnos para organizar, analizar, sistematizar y obtener conclusiones a partir de la información proveniente de la situación problema.

A continuación se muestran ejemplos de respuestas de dos alumnos en el trabajo inicial con papel y lápiz, a partir de las cuales se hace el seguimiento llevado a cabo por ellos.

Alumno 1:


puede ser que se le acabe la gasolina
al que va a mas velocidad y el que
tiene menos velocidad puede alcanzar
al otro, y entonces pasen juntos por la
meta.
pero despues de llegar a la meta
algunos de tantos coge velocidad y
puede llegar a la meta final.

Alumno 2:

Figura 2: Muestra del trabajo de dos alumnos

Como se puede observar, la segunda respuesta es cualitativamente mejor elaborada, no solo porque llega a resultados correctos, sino porque la forma como organiza la información le permite una exploración sistemática de la misma, y por ende, obtener conclusiones acertadas frente al problema. En contraste, la primera respuesta no solo lleva al alumno a conclusiones equivocadas frente a la situación, sino que el análisis lo realiza desde su intuición sobre el movimiento (es más, del movimiento en línea recta), sin incluir un análisis cuantitativo soportado en la utilización de herramientas matemáticas. Este tipo de respuestas, por demás generalizadas en el grupo de alumnos, mostró que inicialmente no logran hacerse a una representación apropiada del problema, lo que los lleva a obtener dichas conclusiones.

Una vez se tuvo un primer contacto con la situación de la manera antes descrita, se les permitió abrir el archivo de simulación del problema, en el Cabri Géométre de la calculadora TI-92, lo que les permitió a los alumnos avanzar en la exploración del problema y por ende ampliar la manera como lo habían resuelto inicialmente. Entre las nuevas estrategias está la determinación de otros encuentros durante toda la carrera y la organización tabular de estos datos, y quienes afirmaban que los tres autos no se encontraban, dada la interpretación lineal que habían hecho de la situación, tuvieron la oportunidad de replantear sus hipótesis.

La ampliación de las estrategias de solución se explica a partir de que la utilización de la calculadora para modelar la situación de la carrera de los autos, permite a los alumnos formarse una representación visualmente más clara de la situación, y por tanto, apropiarse de elementos para determinar los conceptos matemáticos necesarios en la solución de los cuestionamientos que se les realizaron.

Posteriormente, llenar la tabla de valores tenía como principal objetivo explorar las regularidades matemáticas existentes entre el tiempo transcurrido de la carrera y el número de vueltas que ha dado cada auto, lo cual se hizo inicialmente con papel y lápiz. Ahora bien, llenar la tabla de valores no fue un proceso fácil. La principal dificultad se presentó en lo relativo a cuantificar las fracciones de vuelta que lleva cada auto en aquellos tiempos en los que no tienen un número entero de vueltas. Para estos casos, la utilización de la simulación en Cabri de la situación fue una herramienta valiosa en el éxito final de la tarea.

Inicialmente la mayoría de los alumnos llenaron la tabla, llenando en algunos casos sólo aquellos valores en los que el número de vueltas era entero, o bien ignorando la fracción de vuelta correspondiente a un tiempo que no corresponde a un número entero de vueltas (como se puede observar en la figura 3).

Tiempo	Cantidad de vuelt	
	Toyota	Honda
1.0		
2.0		
3.0	1	
4.0		1
5.0		
6.0	2	
7.0		
8.0		2
9.0	3	
10.0		

Figura 3: Tabla sin considerar fracciones de vuelta

Obsérvese como este tipo de sistematización de la información en la tabla muestra que los alumnos están pensando en términos discretos, es decir en números naturales. Para ellos, no hay una percepción clara de la continuidad del movimiento, y por tanto de las fracciones de vuelta. En otras palabras, los números racionales, para estos estudiantes prácticamente no existen.

Para ayudar a los alumnos en la construcción de una representación más clara de la situación en términos de números racionales, y no solo de números naturales, se introdujo una modificación a la simulación, de tal forma que mostrara tres radios de la circunferencia, de extremos en los puntos que representan cada auto (figura 4).

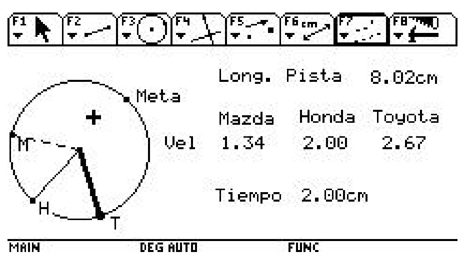


Figura 4: Pantalla del archivo de simulación modificado

Este ingrediente nuevo en la simulación dotó a los estudiantes de ideas para pensar en la existencia de fracciones de vuelta. Esto se evidencia en el afán por querer corregir su tabla inicial, al relacionar esta situación con las tradicionales tortas tan comunes en las clases sobre números fraccionarios. Al menos así lo revela la siguiente tabla:

Tiempo	Cantidad de vueltas de		
	Toyota	Honda	Mazda
1.0	1/3	1/4	1/6
2.0	2/3	2/4	2/6
3.0	3 da una vuelta 3/3	3/4	3/6
4.0	4/3	4 da 1 vuelta 4/4	4/6
5.0	5/3	5/4	5/6
6.0	6 da 2 vueltas 6/3	6/4	6 da 1 vuelta 6/6
7.0	7/3	7/4	7/6
8.0	8/3	8 da 2 vueltas 8/4	8/6
9.0	9 da 3 vueltas 9/3	9/4	9/6
10.0	10/3	10/4	10/6
11.0	11/3	11/4	11/6
12.0	12 da 4 vueltas 12/3	12 da 3 vueltas 12/4	12 da 2 vueltas 12/6

Figura 5: Tabla considerando fracciones de vuelta

Para esta nueva tabla, la utilización de la simulación de la situación en Cabri fue una herramienta valiosa en el éxito final de la tarea.

Finalmente, la última parte del trabajo planteó un nuevo reto a los estudiantes: la construcción automática de la tabla con la calculadora.

F1 F2 Plot Setup F3 Cell F4 Header F5 Calc F6 Util F7 Stat

DATA	Tiempo	Mazda	Honda	Toyota	
	c1	c2	c3	c4	c5
1	1.	.16667	.25	.33333	
2	1.2	.2	.3	.4	
3	1.4	.23333	.35	.46667	
4	1.6	.26667	.4	.53333	
5	1.8	.3	.45	.6	
6	2.	.33333	.5	.66667	
7	2.2	.36667	.55	.73333	

r6c1=2.

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 6: Tabla de la calculadora

Lo novedoso para los estudiantes fue que los datos aparecían en notación decimal, mientras que las que ellos habían realizado manualmente quedaron en notación fraccionaria. Esta situación permitió plantear reflexiones en torno a si ambos tipos de tablas arrojaban información diferente o no, sobre el problema. Después de largos debates, los alumnos accedieron a una comprensión de la equivalencia de la información presentada en las diferentes tablas, y por ende, de las relaciones que existen entre las notaciones decimales y fraccionarias para los números racionales.

En esta parte final del trabajo se realizaron las gráficas cartesianas de las tablas de valores, y se calcularon las ecuaciones de las gráficas resultantes. Esto permitió confrontar los análisis matemáticos que habían realizado en las fases anteriores del trabajo.

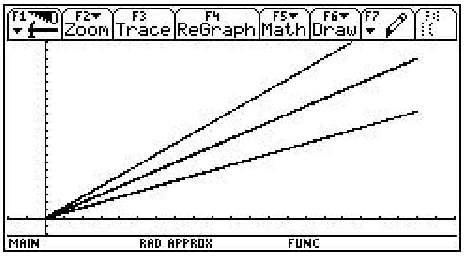


Figura 7: Gráficas cartesianas

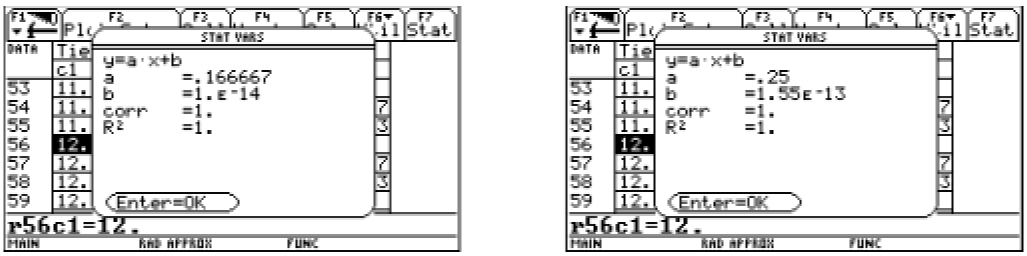


Figura 8: Análisis de regresión

Conclusiones

La forma como los estudiantes se vincularon a la interacción con la situación problema planteada, deja ver cómo la calculadora se convirtió en un mediador fundamental para cualificar paulatinamente sus visiones frente a la interpretación de la misma. La ampliación de datos en la estrategia de solución, una vez abordada con lápiz y papel, es fruto de la implementación de la simulación utilizada. Ésta ofreció a los estudiantes elementos para mejorar las exploraciones ante un problema y por consiguiente contribuyó en la manera de ampliar sus avances, esto es, les mejoró el radio de acción para organizar, analizar, sistematizar y obtener conclusiones a partir de la información proveniente de las relaciones conceptuales involucradas en la tarea matemática.

Los estudiantes pudieron replantear la tabla de tiempos versus número de vueltas con la presencia de fracciones para aquellos tiempos en que no había un número entero de vueltas; se puede observar que, mientras no se trabajó con la simulación que mostraba los segmentos de recta trazados desde el centro de la pista a los puntos que representaban a los autos, los estudiantes no habían pensado en números racionales. Solo se ocurrió traerlos de su esquemas a partir de la interactividad del software utilizado, el cual les permitió observar lo que ocurría en cuanto a la posición de cada auto, al cambiar el tiempo. Esto es una prueba más de que las herramientas computacionales se están convirtiendo en instrumentos mediadores para potenciar el desarrollo de competencias argumentativas en los estudiantes y por consiguiente mejorar sus formas de comunicar ideas matemáticas.

El papel mediador de la tecnología fue crucial en el cambio de estrategias de razonamiento de los alumnos a través de la validación de los resultados, ya que el pasar rápidamente de una representación a otra permitía problematizarlas, compararlas entre sí y establecer las relaciones de unas a otras. Así, los alumnos, al tener herramientas de validación intrínsecas a la situación problema, se ven obligados a centrar sus argumentaciones en los elementos matemáticos en juego y no en elementos externos a ella (como la palabra del maestro). Este es sin lugar a dudas un avance significativo en la autonomía intelectual.

En suma, dos elementos fueron claves en los resultados obtenidos en la actividad desarrollada. De un lado, el diseño de una situación problémica que de manera explícita ofrecierá la posibilidad de ser tratada a partir de diferentes sistemas de representación, y de otro, la utilización de la mediación interactiva de la calculadora TI-92 plus, lo cual permitió a los alumnos la confrontación de lo realizado en cada parte de las actividades, y por ende, generar análisis centrados en conceptos matemáticos. Además, la mediación computacional, puso al alcance de todos los estudiantes herramientas matemáticas de análisis que, en condiciones normales de la educación tradicional, solo son posibles de utilizar en los niveles superiores. Esto de alguna manera puede entenderse como una democratización al acceso del conocimiento matemático.

Referencias

Duval R (1999) *Semiosis y Pensamiento Humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales* . Traducción al español de Myriam Vega. Universidad del Valle. Primera edición. Santiago de Cali. P 314.

Kaput J (1987a) *Representation System and Mathematics. En Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Claud Janvier (Ed). Hillsdale N.J. Lawrence Erlbaurn Associated.

Kaput J (1987b) *Toward a Thoery of Symbol Used in Mathematics. En Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* . Claud Janvier (Ed). Hillsdale N.J. Lawrence Erlbaurn Associated.

Kaput J (1998) *Representation, Inscriptions, Descrptions and Learning: A Kaleidoscopio of Windows*. Journal of Mathematical Behavior. Vol 17. Nros 1 y 2.

Moreno L, Santos M (2002) *Proceso de transformación del uso de la tecnología en una herramienta para la solución de problemas de matemáticas por parte de los estudiantes.* Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Clase, Ministerio de Educación, Serie Memorias.

MEN (1999) *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemática*. Serie Lineamientos Curriculares. Punto EXE Editores. Santafé de Bogotá. P 81.

Uso de la medida en la solución de problemas en entornos de la geometría Cabri

Diego Garzón Castro

Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía

Universidad del Valle, Cali

Resumen. Se presentan algunos de los resultados de una experiencia de aula que se ocupa de poner en conexión el proceso de resolución de problemas con el pensamiento y el sistema métrico, tal como se esboza en los lineamientos curriculares para el área de Matemáticas. En el proceso de incorporar paulatinamente el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas, en el contexto de la geometría Cabri, se estudia el papel de la medida en la resolución de problemas que involucran la construcción de figuras geométricas. A través de un problema propuesto a un grupo de alumnos de noveno grado de Educación Básica, de la Normal Superior Farallones ubicada en la ciudad de Santiago de Cali (Valle – Colombia), se pretende hacer visibles diferentes estrategias de resolución y, a partir de estas últimas, dar cuenta de los diferentes usos de la medida.

Introducción

Una preocupación de la Didáctica de las Matemáticas es dar cuenta de cómo los aportes de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (NTIC), impactan los procesos de enseñanza y aprendizaje y en particular la organización del currículo propuesto.

Las propuestas curriculares recientes le reconocen a la tecnología su importante papel como herramienta potente para el aprendizaje de las matemáticas (NTCM, 2000). Usando calculadoras graficadoras y algebraicas, los estudiantes pueden explorar con rapidez diferentes estrategias de resolución de problemas, conjeturar, sistematizar información y trabajar una misma situación de tal manera que se articulen contextos donde intervienen distintos tipos de representación de un mismo objeto matemático.

En el proceso de la resolución de problemas que forma parte de la estructura curricular vigente en nuestro país, se le concede un papel protagónico a las NTIC. Se hace pues necesario diseñar propuestas sistemáticas de enseñanza y aprendizaje, que contribuyan a la configuración de una red estable de situaciones problema para potenciar la reorganización del currículo. Este articulo se ocupa de ilustrar dicho proceso en el contexto de la geometría dinámica, se exploran las connotaciones que adquiere la medida cuando se usa en la construcción de objetos geométricos. La situación propuesta involucra las magnitudes longitud (perímetro) y área, y se describen a partir de las estrategias espontáneas de solución, diferentes usos de la medida.

Marco teórico

Investigaciones recientes (Laborde,1998) han puesto en evidencia que el computador es una nueva modalidad para operar con los objetos matemáticos y que al mismo tiempo permite entender el cambio en la naturaleza de tales tratamientos. Por consiguiente, el diseño de una situación problema que se apoya en el ambiente del computador requiere del análisis de la naturaleza de los objetos matemáticos, las operaciones con tales objetos y los propósitos didácticos que determinan la situación.

La introducción de ambientes de geometría dinámica facilita el paso del dibujo al objeto geométrico en la enseñanza de la geometría. En el caso particular de los ambientes tipo Cabri. Diferentes investigadores coinciden en que estos ambientes, en particular Cabri, permiten explorar hipótesis empíricamente, descubrir nuevas relaciones y pensar en su demostración. La tecnología se emplea como una herramienta eficaz en el análisis y uso de estrategias, lo que permite precisar que, no es la tecnología en si misma el objeto central de interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología (MORENO & WALDEGG,1999).

En el contexto de la resolución de problemas Santos Trigo (1997) propone las siguientes categorías, con el fin de estructurar un modelo de análisis:

- Los recursos están conformados por lo que un individuo sabe y por las formas en que adquiere ese conocimiento.

- Los métodos heurísticos corresponden a las estrategias generales utilizadas en la resolución de un problema, como por ejemplos, el uso de analogías, la introducción de elementos auxiliares, cómo se descomponen o combinan algunos elementos del problema, cómo se varía el problema o el trabajo con casos específicos.

- El monitoreo es la forma en que el individuo usa la información, escoge o toma las decisiones acerca de un plan, selecciona metas o submetas, monitorea soluciones y revisa los planes para abandonar una solución.

En esta perspectiva se opta por el modelo de competencias propuesto por Puig (1996), en el cual se le concede un papel esencial a la heurística, reconociéndola como el estudio de los modos de comportamiento ante la resolución de problemas, teniendo en cuenta que los medios de resolución son independientes del contenido. Este modelo precisa lo que en los trabajos de SCHOENFELD se describe en términos de “estrategias”, “procedimientos” o “heurísticas”, por ejemplo, la búsqueda de un problema relacionado, la elaboración de una tabla, la consideración de un caso particular, etc. En estas intervienen las categorías que a continuación se precisan.

El modelo se estructura en torno a una lista de elementos abierta a distintas combinaciones. Esta lista también puede reelaborarse como consecuencia de su uso en la descripción de los sujetos, en nuevas situaciones que les conduzcan a nuevos usos, a nuevos sentidos o, nuevas interpretaciones que no habían sido registradas aún en esa representación local. Tales elementos son los siguientes:

i) Destrezas con potencial Heurístico (DH) las cuales se refieren a aquellos tipos de procedimientos que no tienen que ver con la transformación del problema, como por ejemplo, elaborar una tabla.

ii) Sugerencias Heurísticas (SH), es decir, aquel tipo de orientaciones que determinan la dirección del trabajo sin referirse a un procedimiento concreto, como por ejemplo, buscar un problema relacionado.

iii) Herramienta Heurística (HH), referida a un procedimiento independiente del contenido a partir del cual el problema dado inicialmente se transforma en otro, como por ejemplos, consideración de un caso, división del problema en partes, reformulación, variación parcial. etc.

Otros componentes del modelo son: los métodos de resolución con contenido heurístico (MH), los patrones plausibles (PP), el gestor instruido (GI) y la concepción de que la resolución del problema se hace con fines epistémicos.

La medida en el ambiente Cabri

Los trabajos de investigación consultados sobre la medida en el entorno Cabri (software de geometría dinámica) han dado lugar a los siguientes resultados:

En la perspectiva de resolución de problemas se establece que *los estudiantes de secundaria resuelven problemas de prueba en ambientes de geometría computacional. El uso de la medida les ayuda a confirmar las propiedades geométricas que ellos descubren, y las mediciones les proporcionan fuerte evidencia para convencerlos de esas propiedades* (KAKIHANA, 1996).

La medida tiene una doble naturaleza cuando interviene en la resolución de problemas. Se reconoce la denominada medida exploratoria que juega un papel heurístico. Esta es empleada por los alumnos comprometidos en un proceso de prueba que tiene lugar en un caso particular y donde se recurre a evidencias visuales. La llamada medida probatoria se presenta cuando tiene lugar una experiencia crucial caracterizada porque en ella el individuo somete a prueba una proposición. (VADCARD, 1999).

La medida en el ambiente Cabri guarda vínculos con la naturaleza de las construcciones con regla y compás. Se identifican dos tipos de construcciones: las construcciones exactas que en la geometría euclideana son independientes de la medida y se basan en propiedades de perpendicularidad y congruencia; y en las que los únicos instrumentos permitidos son el borde de la regla no graduada y el compás. El segundo tipo de construcciones es el de las construcciones aproximadas, en las que los alumnos recurren al tanteo y a la medida de longitudes y ángulos, (SANTINELLI & SIÑERIZ, 1998).

Dentro del enfoque analítico anterior, el estatus de la medida se determina a la luz de las estrategias de resolución en el ambiente Cabri. La medida adquiere la connotación de noción paramatemática o herramienta en el sentido en que se hace explícito en la teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard,1991). Un desarrollo particular de la anterior hipótesis, permite afirmar cómo en la resolución de problemas con tecnología, el papel asignado a la medida como herramienta está determinado por el tipo de problema.

De esta manera en las exploraciones que se derivaron del diseño de otras situaciones y su posterior puesta en escena en el aula, se han reconocido cuatro tipos de problemas que se reseñan a continuación:

1. Aquellos cuyos procedimientos de solución desencadenan el desarrollo de una construcción geométrica.

2. Aquellos que se orientan a la demostración de propiedades geométricas

3. Aquellos que involucran estrategias de resolución en las cuales se recurre a la aproximación de magnitudes continuas (como longitudes, áreas y volúmenes).

4. Aquellos que se transforman por los efectos de una modelación geométrica y se expresan en un contexto de variación. Este tipo de problemas puede convertirse en un campo apropiado para involucrar magnitudes distintas a las que se han trabajado hasta el momento, como por ejemplo, el tratamiento de magnitudes físicas.

La pregunta central que resulta de todo lo anterior es la siguiente: ¿Cómo interviene la medida en las heurísticas de la resolución de problemas que involucran la construcción de objetos geométricos en el contexto de la geometría Cabri?

Metodología

En la experiencia de aula participaron 40 estudiantes de grado 9º, durante 6 sesiones de clase, con una duración de 1,5 horas y con una periodicidad semanal. Las competencias de la situación propuesta a los estudiantes, se expresaron en los siguientes desempeños: hacer uso de las posibilidades expresivas que brinda la calculadora para formular conjeturas y realizar construcciones; explicar la invarianza del área de figuras geométricas recurriendo a la exploración y sistematizar el conocimientos sobre los cuadriláteros.

Durante el desarrollo de las actividades en el aula de clase, se identificaron tres fases distintas: la exploración libre; la exploración dirigida (con la intervención del profesor, y utilización de una guía de trabajo y procedimientos de solución, por parte de los estudiantes); y la "institucionalización" de los conocimientos en juego. Este articulo solo se ocupará de describir los eventos correspondientes a la primera fase, en la cual los estudiantes, a partir de las interpretaciones del enunciado, ponen en juego estrategias espontáneas de solución.

En el análisis del trabajo de los estudiantes se recurrió a examinar las observaciones efectuadas por el profesor y las filmaciones de cada sesión, las cuales fueron transcritas e impresas. Una fuente adicional de información son los registros electrónicos que generan los estudiantes al utilizar el editor de la calculadora los cuales dejan constancia escrita de sus estrategias de solución.

El objeto de interés en la mediación instrumental lo constituyen las competencias que desarrolla el estudiante en la resolución de problemas no rutinarios. Esto se examina en las heurísticas de los procesos de medida.

Antecedentes del Problema

La medición de magnitudes como longitud, área y volumen en el ámbito escolar, ha sido identificada como uno de los temas críticos del currículo en el área de Matemáticas. Esto se evidenció en los resultados del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias - TIMSS - (MEN, 1997). Algo semejante sucede con los desempeños en mediciones dentro de estrategias de solución de problemas con NTIC.

El problema propuesto a los estudiantes en clase estuvo precedido de una serie de actividades, enfocadas a adquirir destreza en la manipulación de funciones básicas de la calculadora cuando enfrentan situaciones como la construcción de triángulos y cuadriláteros (cuadrados, rectángulos, paralelogramos). El tratamiento didáctico del problema es distinto al propuesto en varios de los textos que circulan en el ámbito escolar. El enfoque característico de los ejemplos y los ejercicios de estos textos, es el siguiente: uso rutinario de la fórmula, predominio del cálculo, predominio del tratamiento aritmético y en consecuencia, ausencia de articulaciones explicitas entre los tratamientos geométricos y el de magnitudes. Es preciso anotar que el problema tuvo como referente el libro ? de Euclides, en especial: el postulado V, proposiciones 17, 37,38. Fue comunicado a los estudiantes en dos versiones diferentes, la primera: "Dividir un terreno que tiene forma de cuadrilátero, de tal manera que se obtengan regiones triangulares con bases de igual longitud. ¿Cuándo son iguales las áreas de regiones triangulares?". En este caso la solución del problema, no es una construcción. No obstante los alumnos en sus estrategias de solución recurren a la construcción de un cuadrilátero para ensayan la posible división de acuerdo con las condiciones dadas. A partir del enunciado, los estudiantes hicieron sus respectivas interpretaciones y luego elaboraron sus estrategias de solución. La otra versión del problema fue presentada en una fase posterior en los siguientes términos: *Dividir un cuadrilátero de tal manera que se produzcan superficies triangulares cuyas bases satisfacen la propiedad de tener igual longitud y, las cuales se localicen sobre el lado del cuadrilátero elegido como base*. Esta actividad se adelantó de acuerdo con una secuencia de situaciones cuyo propósito era clasificar los cuadriláteros formados por triangulación con una misma unidad de medida.

Resultados

Se trata de poner en evidencia el uso de la medida en las estrategias de resolución de problemas. Se describen las estrategias de resolución en términos de: recursos, componentes del modelo de competencias: (DH, SH, y HH), y uso de la medida. Se presentan a continuación tres procedimientos.

El primer procedimiento consiste en lo siguiente: se traza el "cuadrilátero" (un paralelogramo) y una de sus diagonales. Se observa un "paralelogramo" que queda dividido por su "diagonal" en dos regiones triangulares. Se calcula el área de cada una de estas regiones triangulares; pero no se tiene en cuenta que el cálculo del área de una de éstas ya estaba dado mediante la función calcular área. Se concluye que los dos triángulos deben tener igual área. El reconocimiento del hecho geométrico según el cual, la diagonal divide a todo rectángulo en dos regiones triangulares congruentes, es lo que los estudiantes constituyen en objeto de su exploración (ver anexo 1). Este es pues, el problema abordado por los estudiantes. Potencialmente es uno de los posibles factores que permite la transformación del problema abordado por los estudiantes. En consecuencia, a luz del enunciado propuesto, se pone en evidencia la transformación del problema que llevan a cabo los estudiantes, cuando optan por explorar el mismo a partir de un cuadrilátero particular (lo que configura la herramienta heurística). La destreza heurística tiene lugar en el procedimiento de trazar el dibujo de manera que se tengan en cuenta las propiedades dadas en el enunciado del problema. La medida es utilizada como parte de las estrategias de exploración y como evidencia visual en el contexto con el propósito de verificar el hecho. El anexo 1 es diciente a este respecto: "Como aquí ya existe 1.71cm², ves, entonces el área de los dos triángulos es la misma... son iguales".

El segundo procedimiento se orientó a explicar la igualdad de áreas en términos del "paralelismo".Los estudiantes dibujan un "cuadrilátero escaleno" utilizando la función polígono de la barra de herramientas de la calculadora; se trazan las diagonales y se calculan las áreas. Mediante el arrastre de los vértices se manipula la figura hasta verse como un "rectángulo" (ver anexo 2). Se llega a la conclusión de que las áreas de las regiones triangulares son iguales. Esta estrategia de solución moviliza entre otros los conocimientos siguientes: utilización de la función cálculo del área de regiones triangulares; establecimiento del paralelismo mediante las funciones como trazar polígono, aplicación del arrastre, verificación de la propiedad. Con respecto a las destrezas heurísticas, hay que señalar que el enunciado inicial se plasma en un "dibujo Cabri", el cual se transforma paulatinamente en una "familia de cuadriláteros" mediante la acción del arrastre. Este se controla mediante el cálculo previo del área con el fin de poner en evidencia el paralelismo de los lados. Las herramientas heurísticas en este procedimiento se aplican al análisis de un cuadrilátero en particular. El problema de partida se transforma en la verificación de la igualdad de áreas del "cuadrilátero dibujado"; por medio de la medida y el arrastre; todo ello con el fin de visualizar la igualdad de áreas a partir del paralelismo de los lados. Así pues, la medida juega un papel exploratorio.

En el tercer procedimiento se construye un "cuadrilátero" (rectángulo) aplicando las propiedades de perpendicularidad y paralelismo. Los dos estudiantes trazan la diagonal y efectúan el cálculo del "área de regiones triangulares". Como parte del conocimiento formal se requiere el reconocimiento de las propiedades de los cuadriláteros (Anexo 3). Los estudiantes deben reconocer el hecho de que en un rectángulo los lados opuestos son paralelos y tienen igual longitud. La destreza heurística se observa en el "dibujo Cabri", utilizando el arrastre (Anexo 3), con la intención de verificar la igualdad de las áreas. Se observa así la transformación en la naturaleza del problema, al otorgarle un nuevo papel a la medida. En este caso en particular el arrastre permite un control sobre el "dibujo" dentro de una estrategia exploratoria en la cual la acción de la medida contribuye a desarrollar un argumento por la vía visual. La medida obtenida es una herramienta que controla la igualdad de las áreas mediante la visualización de los números para algunos cuadriláteros. Esto puede interpretarse en el sentido en que la medida cumple una función exploratoria en las construcciones, con el objeto de controlar la relación entre las propiedades de dos figuras; pero como en esta situación lo dominante es el “tanteo”, la medición de áreas puede catalogarse de construcción aproximada.

Las destrezas con potencial heurístico como uno de los factores característicos de las heurísticas, se hace manifiesta en la transformación de información escrita a un dibujo Cabri, en el cual se plasman ciertas condiciones o propiedades geométricas. Igualmente se hace la traducción del dibujo al número. La herramienta heurística dominante en los tres casos anteriores, se caracteriza por el hecho recurrente de aplicarse a un cuadrilátero/paralelogramo. De ahí que sea necesario promover en las estrategias de enseñanza otras sugerencias heurísticas, como buscar un problema relacionado. Se registran dificultades en el manejo de nociones como cuadrilátero y áreas congruentes. No se hace uso de la terminología que se emplea convencionalmente en la geometría para designar elementos de un cuadrilátero, como la diagonal y la base (Los estudiantes toman como base de la figura la diagonal de un paralelogramo). En la mediación instrumental y las competencias que se ponen en evidencia en la resolución de problemas, se logró detectar que los alumnos se inician en la actividad de explorar a partir de la formulación del enunciado. Su estrategia empieza por construir aquellos cuadriláteros desarrollados en sesiones previas de trabajo: cuadrados, paralelogramos, rectángulos.

Observaciones finales

Existe una tendencia en los alumnos a basar sus heurísticas para la resolución de los problemas en la observación – e incluso en las características propias del ambiente – cuando se lleva a cabo la exploración de una situación problema. Los esquemas explicativos de los alumnos se centran en la descripción de sus construcciones. No en pocas ocasiones la experiencia adquiere valor como "copia del modelo" dado por el docente. No obstante en el proceso de exploración, una vez comienzan a trabajar guiados por sus heurísticas, sus caminos se ven enriquecidos por la estrategia de resolver casos particulares o argumentar en torno a propiedades del objeto geométrico, lo cual los va conduciendo al núcleo central del problema. También se observa que en la descripción de las estrategias espontáneas de resolución del problema propuesto son dominantes el uso de la medida exploratoria y de las construcciones aproximadas. De ahí que éstas puedan considerarse, como indicadores del estado de los procesos de exploración y sistematización de los alumnos, y de estructuración de una red conceptual. Es posible pues tomar distancia de aquellos argumentos que, frente al uso de la medida en este tipo de ambientes, condenan el uso de este tipo de función o, en su defecto, favorecen las construcciones exactas y de la medida probatoria.

Referencias

Chevallard, Yves . (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Aique, Buenos Aires (Argentina). Primera edición. p:.57-66.

Kakihana, Kyoko; Shimizu, Katsuhiko; Nohda, Nobuhiko .(1996). *From Measurement to Conjecture in Geometry Problems. Student' Use of Measurements in the Computer Environment.* PME 20ème,VolIIIpp.161-168.

Laborde, Colette.(1998). Visual phenomena in the teaching /learning of geometry in a computer-based environment. En: Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI study.

Ministerio de Educación Nacional.(1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas* . TIMSS - Colombia. p.113-127.

National Council of Teachers of Mathematics .(2000). *Principles and standards for school mathematics.*

Puig, L . (1996*).Elementos de la resolución de problemas* . Granada: Comares, Col. Mathema.

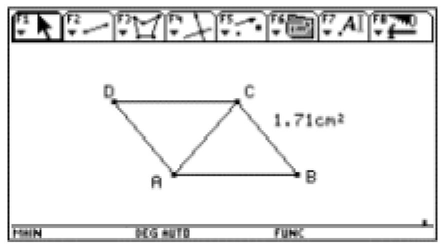
Santos Trigo, Luz Manuel (1997) *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas* . Grupo Editorial Iberoamérica

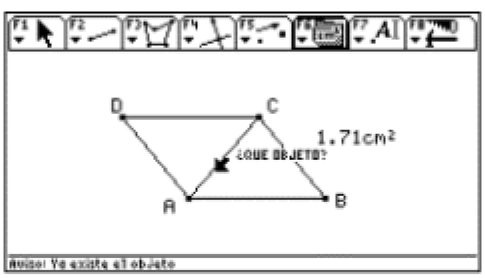
Siñeriz Liliana; Santinelli, Raquel (1998). *Estrategias espontáneas con uso de CABRI* . En Educación Matemática. Vol. 10 No. 3, pp. 25-36.

Vadcard, Lucille . (1999).*La Validation en Geometrie au Collège avec Cabri – Géomètre. Mesures exploratoires et mesures probatoires*. Petit X, N°. 50.

Anexo 1

Los alumnos trazan el cuadrilátero (un paralelogramo) luego trazan una diagonal (segmento AC) que posteriormente será eliminada. Las dos regiones en que queda dividido el paralelogramo, les permiten por medio de la opción polígono construir los triángulos ABC y ADC. A continuación calculan el área de una de las regiones (el triángulo ABC)

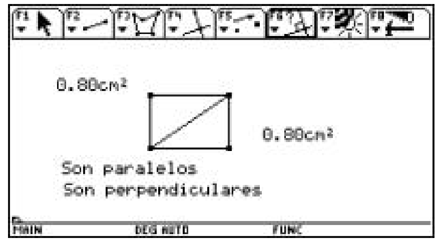




Pero al intentar calcular el área de la segunda región (el triángulo ACD) se ubican sobre el segmento común a ambas regiones triangulares, pero en lugar de escoger el segundo polígono (en orden de construcción triángulo ACD) nuevamente escogen el primero. Ante la aparición en la pantalla de la calculadora del mensaje "Ya existe el objeto" los alumnos concluyen erróneamente que el instrumento, en este caso la calculadora esta indicando que los dos triángulos tienen igual área. En última instancia el elemento de validación es proporcionado por el ambiente.

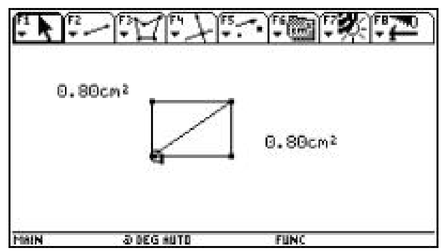
Anexo 2

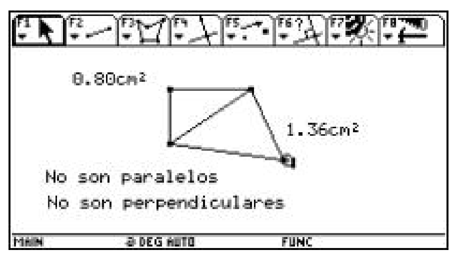
En este caso, para garantizar que se realiza correctamente la construcción del cuadrilátero, se recurre al arrastre de la figura. Los alumnos construyen un polígono (cuadrilátero escaleno), trazan la diagonal y calculan las áreas de las regiones resultantes. Luego, mediante el arrastre a partir de los vértices, manipulan el dibujo hasta que lo pueden visualizar como un rectángulo. Concluyen que las regiones triangulares tienen igual área.



Anexo 3

La pareja de alumnos realiza la construcción asegurándose que se mantengan relaciones de perpendicularidad y paralelismo, lo cual revela un acercamiento más elaborado en la vía de distinguir entre un dibujo y una figura geométrica. Uno de los alumnos señala: “Yo hice un cuadrilátero pero le hice que tuviera sus lados perpendiculares y paralelos pero si se deforma, el área del triángulo de abajo deja de ser igual al del de arriba, pero ya cuando lo acomodamos para que los lados del cuadrilátero sean paralelos y perpendiculares los triángulos vuelven a tener la misma área





La transformación de un problema, a partir del potencial de la calculadora TI-92.

Fabiola Rodríguez García

Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas, MEN

Instituto Pedagógico Nacional, Bogotá

Martín Eduardo Acosta Gempeler

Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas, MEN

Resumen. En el presente artículo se describe la evolución de una actividad cuya transformación está determinada por el potencial operativo y representacional de la calculadora y por la necesidad de diseñar actividades de aula que permitan transformar las acciones de los estudiantes en su hacer matemáticas, posibilitando la exploración, el planteamiento y verificación de conjeturas, el trabajo con diferentes representaciones, la generalización y la sistematización. De esta manera se ilustrará el uso de la calculadora empleándola inicialmente como amplificadora en el tratamiento de algunos conceptos matemáticos y posteriormente como elemento reorganizador del desarrollo de los mismos.

Introducción

Como parte del Proyecto de *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas*, el Ministerio de Educación Nacional organiza periódicamente seminarios de formación de docentes, en los que se profundiza en el manejo técnico de la calculadora TI92, se discuten los fundamentos epistemológicos y cognitivos del uso didáctico de dicha herramienta y se socializan los avances del proyecto y las dificultades encontradas. Estos seminarios han servido para intercambiar puntos de vista, experiencias e inquietudes, lo cual ha contribuido a enriquecer las concepciones de los maestros participantes acerca del proyecto mismo, de las matemáticas, de su enseñanza, de su aprendizaje y de la utilización de la tecnología en dichos procesos.

En uno de los primeros seminarios, en los que se pidió a los participantes de las diferentes regiones compartir las actividades propuestas a los alumnos, un docente del departamento de Córdoba dio a conocer el siguiente problema: *Un vehículo A viaja a 30 Km/h y 100 Km atrás otro vehículo B viaja a 40Km/h. Si la vía fuese recta y los vehículos no se detuvieran ¿Al cabo de cuánto tiempo alcanzará el vehículo B al vehículo A?* A partir de esta situación la actividad propuesta consistía en calcular la distancia entre los móviles en diferentes momentos y generalizar este proceso para encontrar la expresión algebraica que relaciona el tiempo y la distancia. La calculadora se emplea para graficar dicha expresión. Debido a que en esta propuesta de actividad la capacidad de la calculadora no se aprovecha suficientemente, surge la idea de enriquecer las posibilidades de exploración de la situación y su tratamiento didáctico, aprovechando el potencial de esta herramienta.

En este artículo nos proponemos mostrar cómo, durante el desarrollo de los diferentes momentos en la solución del problema, el trabajo continuado con la tecnología hizo evolucionar nuestra manera de concebir sus posibles usos y cómo una apropiación de las posibilidades de la misma, amplía el universo de actividades que propician la exploración y la sistematización. En esta descripción se ilustrará la evolución del uso de la calculadora empleada inicialmente en la realización de cálculos y de gráficas y finalmente en la construcción de una simulación.

Se adjuntará como anexo a este artículo, una propuesta de actividad para realizar con estudiantes de secundaria, cuyo propósito es modelar la simulación del movimiento de tres aviones que viajan siguiendo rutas paralelas, lo cual dará lugar al estudio de diversas funciones. Con esta actividad se pretende igualmente realizar un primer acercamiento a las ideas de velocidad instantánea y velocidad media, a través de la exploración de los objetos presentes en la simulación, de las relaciones entre ellos y de la sistematización de las observaciones y los resultados.

Marco Teórico

Una de las tesis planteadas en el marco teórico del proyecto, se fundamenta en el hecho de que la tecnología pone a disposición de los alumnos y de los profesores nuevas formas de expresión, a través de las cuales puede construirse el sentido del quehacer matemático y pueden desarrollarse los principales conceptos que forman el cuerpo de las matemáticas.

Diversas investigaciones han mostrado que la presencia de las tecnologías informáticas en el currículo de matemáticas, no solo contribuye al enriquecimiento del tratamiento de los contenidos, sino que posibilita una re-organización del conocimiento de los estudiantes. *Es posible que el uso sostenido de la herramienta desemboque en cambios a nivel de las estrategias de solución de problemas, en cambios a nivel de la manera misma como se plantea el problema. En otras palabras, puede ocurrir que el pensamiento matemático del estudiante quede afectado radicalmente por la presencia de la herramienta* (Moreno 2002).

Para lograr este efecto reorganizador del conocimiento de los estudiantes, debe tenerse presente que las innovaciones exitosas tendrán la capacidad de erosionar los currículos tradicionales, en la medida en que se conozca y se adquiera un buen manejo de las potencialidades de las herramientas y en la medida en que se alcance la comprensión sobre el conocimiento producido con la mediación de las mismas (Rojano y Moreno 1999). En este sentido, el desarrollo de estrategias como la modelación y la simulación, ofrecen la posibilidad de constituirse en estrategias novedosas que permitirán impactar el curículo y producir cambios en la construcción de conocimientos matemáticos.

La modelación es el proceso de interpretación y captura de las variaciones de un fenómeno a través de la búsqueda de leyes generales que permitan explicarlo y realizar predicciones sobre el mismo. De acuerdo con Vasco (2000), en la modelación se trata de utilizar funciones conocidas, otras ya inventadas pero desconocidas, así como otras nuevas que se van a inventar para simular, representar o modelar procesos reales que están ocurriendo en el mundo. Se trata de capturar sus variaciones por medio de modelos matemáticos de distintos tipos para poder seguirlos, hacer simulaciones y predicciones e intentar controlarlos y modificarlos. Un modelo, según Duarte (1997), es una representación formal de un proceso o de un fenómeno a través de expresiones cualitativas o cuantitativas de las relaciones entre variables que describen el proceso o fenómeno, expresiones que son susceptibles de manipular. A través del modelo se puede explicar el fenómeno y se hace posible predecir situaciones para generar nueva información.

Lo que caracteriza la simulación, según Duarte, es una representación visual de un fenómeno o proceso con mayor o menor fidelidad perceptual. Las simulaciones están construidas sobre modelos matemáticos del fenómeno, que al ser traducidos a la máquina producen una impresión de realidad y guardan una apariencia perceptiva muy cercana al mismo. Este atractivo visual se constituye en una fuente interesante de exploración didáctica que a su vez permite extraer información del fenómeno a través de relaciones, mediciones, variaciones, comparaciones, etc., que pueden ser matematizadas, construyéndose así un modelo matemático muy cercano al fenómeno real. En este sentido, una actividad de simulación se constituye en una situación problemática que parte de un fenómeno físico y que propone su estudio desde el punto de vista matemático para producir un modelo del mismo.

Duarte afirma que la utilización de ambientes de modelación puede potenciar dimensiones del acto de comprender, una vez que el profesor pueda utilizarlos fácilmente para:

- Solicitar a los alumnos un análisis del mismo modelo en contextos diferentes
- Describir verbalmente los modelos
- Identificar analogías
- Corregir modelos incorrectos
- Prever la influencia de variables del modelo.

De otra parte, una modelación computacional permite al alumno familiarizarse con los aspectos formales de los procesos y de los fenómenos. *Debido a que los objetos sobre la pantalla son producidos y controlados desde el universo interno de la herramienta computacional [...], podremos afirmar que estos objetos sobre la pantalla son modelos manipulables de objetos matemáticos. Estos modelos contribuyen a una mayor interrelación entre la exploración y la sistematicidad ya que ofrecen mayor capacidad de cálculo, mayor poder expresivo y flexibilidad en la transferencia entre sistemas de representación.* (Moreno 2002). Por lo tanto, si en tareas que combinan procedimientos de simulación y modelación se incluye el análisis numérico, algebraico y gráfico de los datos tomados de una construcción, se posibilitan tanto los procesamientos al interior de cada registro como las conexiones entre ellos, facilitando así la comprensión de los conceptos matemáticos en juego.

La situación

El problema a desarrollar es:

Un vehículo A viaja a 30 Km/h y 100 Km atrás otro vehículo B viaja a 40Km/h. Si la vía fuese recta y los vehículos no se detuvieran ¿Al cabo de cuánto tiempo alcanzará el vehículo B al vehículo A?

Evolución del desarrollo de la actividad

Primera aproximación:

La actividad propuesta consistía en encontrar, utilizando lápiz y papel, la expresión algebraica que relaciona la distancia entre los móviles en función del tiempo y posteriormente emplear la calculadora para realizar la gráfica producida por esta expresión.

Las acciones puntuales que se espera que los estudiantes realicen, son:

- Calcular la distancia recorrida por cada móvil al cabo de una hora.

- Calcular la distancia entre los móviles al cabo de una hora.

- Describir lo que sucedió a la media hora y predecir lo que sucederá al cabo de una hora y media, de dos horas, de tres horas, etc.

- Determinar la distancia de los móviles al cabo de cada uno de los intervalos de tiempo anteriores.

- Encontrar una expresión general que permita calcular la distancia entre los móviles en un tiempo determinado.

- Introducir la expresión algebraica en el editor de funciones de la calculadora (figura 1)

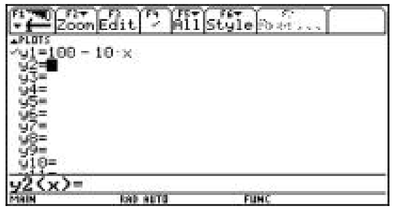


Figura 1

- Seleccionar una ventana apropiada para visualizar la gráfica producida por esta expresión, de manera que se observen los cortes con los ejes (figura 2)

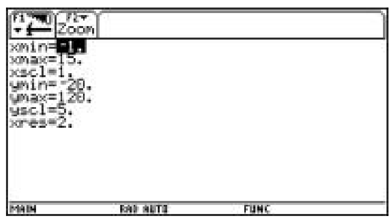


Figura 2

- Observar la gráfica y la tabla producidas por esta función y analizarlas a la luz de la situación (figura 3).

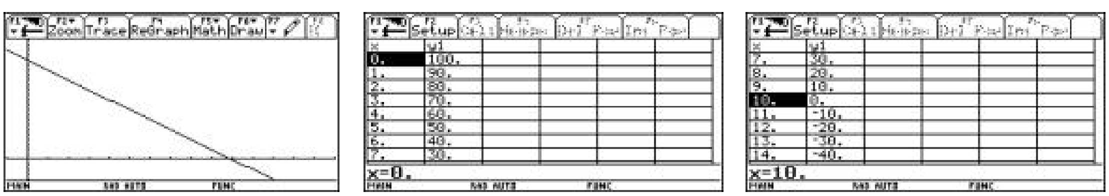


Figura 3

Esta es una actividad típica que ilustra el uso inicial de una nueva herramienta tecnológica, como elemento amplificador. La calculadora es empleada solo al final del proceso y es usada para realizar cálculos dispendiosos, verificar respuestas a operaciones realizadas con lápiz y papel y visualizar las representaciones gráfica y tabular de una función. No se evidencia su potencial transformador del tratamiento de los contenidos ni se explota su capacidad tecnológica. Aún así, su uso propicia un análisis más amplio de la situación al realizado con lápiz y papel.

Segunda aproximación

Con el fin de favorecer un análisis cualitativo propio de la exploración y evitar un tratamiento algebraico desde el inicio de la actividad, se concibió la primera modificación de la situación en la que entra en juego la modelación geométrica del problema en el programa CABRI, utilizando la relación entre las velocidades de los móviles.

Construcción de la simulación

Debido a que existe una distancia inicial entre los móviles, el movimiento de cada uno de ellos se representará sobre dos semirrectas diferentes pero concurrentes y con la misma dirección y sentido (figura 4).

Figura 4

De acuerdo con los datos de la situación planteada, la relación entre las velocidades de los móviles es de ¾, es decir $\frac{v_A}{v_B} = \frac{3}{4}$. En consecuencia la relación entre las distancias es también de ¾, es decir $\frac{s_A}{s_B} = \frac{3}{4}$, lo cual significa que $s_A = \frac{3}{4} s_B$. Esta relación se tendrá en cuenta para representar las posiciones de los móviles. (Para ello se determinan los puntos medios del segmento OB y se considera el punto equivalente a los ¾ de $\overline{OB}$) (figura 5)

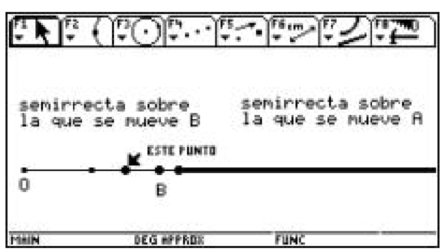


Figura 5

Ya que el móvil A se mueve sobre la segunda semirrecta, debe transferirse allí la distancia recorrida por él. De esta manera cada móvil queda representado por puntos que se mueven sobre una semirrecta. El movimiento de uno de ellos (A) dependerá del movimiento del otro (B) en la proporción ¾. (figura 6)

Figura 6

Teniendo en cuenta los datos del problema y considerado la equivalencia de 2 cm por 100 Km, la presentación del archivo para ser trabajado con los estudiantes puede presentarse de la siguiente manera (figura 7):

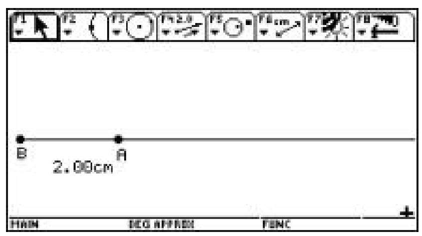


Figura 7

Actividad para los estudiantes

Con esta representación del fenómeno que se puede interactuar con los objetos presentes en la simulación. Se puede mover el punto que representa el móvil B y observar qué sucede con el móvil A. La actividad de los estudiantes girará entonces en torno a las siguientes acciones:

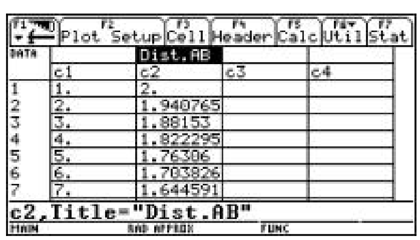
- Observación y descripción del fenómeno.

- Predicción de la distancia entre los móviles en diferentes momentos.

- Descripción de la relación de la distancia entre los móviles a medida que B se mueve.

- Predicción del tipo de gráfica que se producirá al relacionar la distancia entre los móviles.

- Toma automática de los datos en una tabla a partir de la simulación del movimiento (figura 8).



DATA		Dist.AB		
	c1	c2	c3	c4
1	1.	2.		
2	2.	1.940765		
3	3.	1.88153		
4	4.	1.822295		
5	5.	1.76306		
6	6.	1.703826		
7	7.	1.644591		

Figura 8

- Análisis de los datos arrojados en la tabla.
- Confirmación de algunas hipótesis.
- Visualización de la gráfica de nube de puntos producida por los datos (figura 9).

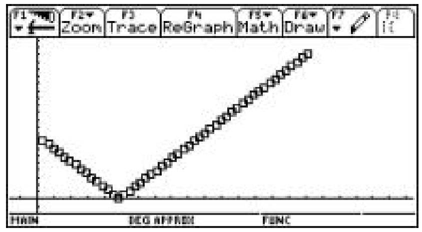


Figura 9

- Descripción de la gráfica a la luz del fenómeno simulado.
- Predicción de la función que mejor relaciona esta nube de puntos (en un intervalo determinado).
- Cálculo de la expresión algebraica de dicha función (en un intervalo determinado).
- Verificación de las estimaciones.
- Análisis de la gráfica de la función.

En este nuevo planteamiento de la actividad hay un cambio radical tanto en el diseño de la misma como en el tipo de acciones que debe realizar el estudiante. Se evidencia desde el comienzo el papel protagónico de la calculadora y con la simulación se propicia el estudio del fenómeno a la luz de la situación real.

Sin embargo, la simulación del fenómeno presenta debilidades ya que el movimiento de uno de los puntos está en función del movimiento del otro y el tiempo es una magnitud cuya presencia no se hace evidente.

Esta dificultad lleva a experimentar más con la calculadora para lograr una mejor representación de la situación y enriquecer su potencial didáctico, sin perder de vista las posibilidades de exploración y sistematización de la misma.

Tercera aproximación

En esta tercera versión se enriquece la simulación por medio de la introducción del tiempo como variable independiente. En efecto, en Cabri es posible animar un número y realizar cálculos a partir de él, creando así una simulación del transcurso del tiempo. Teniendo en cuenta que además podemos efectuar cálculos utilizando este número y transferir esas medidas a objetos geométricos de la pantalla, podemos hacer la simulación de dos puntos que representan el movimiento de los móviles.

La simulación consiste entonces en definir un número t que representará el tiempo en horas, y con base en él calcular las distancias recorridas por cada avión: t*40 y t*30. Sin embargo, como tenemos una restricción de tamaño en la pantalla, y teniendo en cuenta que las medidas se hacen en centímetros, debemos hacer un ajuste de escalas para representar los 100 km de distancia que separan a los aviones. Tomemos por ejemplo la escala 1cm = 100km. Esto quiere decir que 1km=0,01cm, lo cual significa que nuestras ecuaciones se convierten en t*0,4 y t*0,3+1 (figura 10)

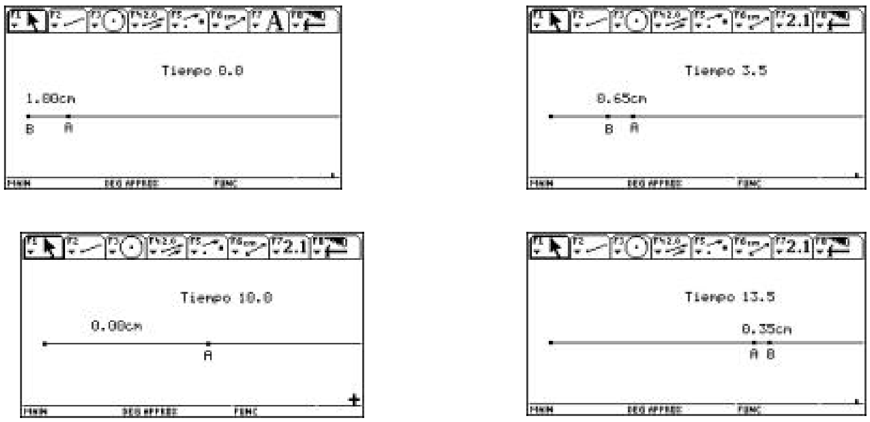


Figura 10

Al igual que en la actividad anterior, esta simulación permite plantear una primera fase de exploración de la simulación a nivel perceptivo, seguida de una fase de exploración cuantitativa. Pero su perfeccionamiento permite una manipulación más controlada sobre el tiempo como variable independiente.

Con el uso de la herramienta tecnológica se facilita la recolección de los datos y la manipulación de los mismos en tablas y gráficas (figura 11), lo cual nos permite señalar una relación bastante aproximada entre ellos; las conclusiones respecto al fenómeno estudiado no se limitan a la apariencia perceptual, sino al análisis de toda la información obtenida en los diferentes sistemas de representación. Para este caso, por ejemplo se pueden analizar las tasas de cambio entre las variables relacionadas y qué significa que sean o no constantes.

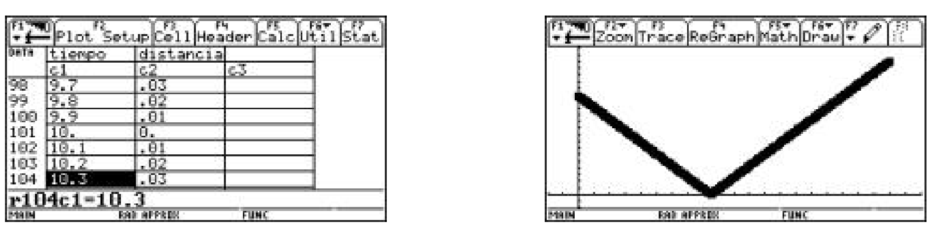


Figura 11

Una vez comprendido el principio de construcción de la simulación, es posible simular distintas variaciones del problema: si los móviles se mueven con velocidades variables, si viajan en sentidos opuestos, con rumbos diferentes, si parten de sitios diferentes, etc. Estas son algunas alternativas de variación que se constituirán en una buena oportunidad para el estudio de diferentes funciones.

Como fruto de este trabajo surge una propuesta de actividad para los estudiantes, la cual se encuentra en el taller 7 de este documento de memorias.

Conclusiones

- El análisis detenido de la situación problemática propuesta inicialmente, la exploración continúa y sistemática de las potencialidades de la calculadora y el estudio sobre sobre el conocimiento producido con la mediación de esta herramienta, permitieron un rediseño de la situación ofreciendo un tratamiento novedoso y más amplio al problema, tanto en sus posibilidades de exploración como en la matematización del fenómeno.

- P ara producir una simulación es necesario comprender el fenómeno y comprender el modelo matemático del mismo.

- La evolución en la construcción de la simulación depende del grado de apropiación del potencial técnico de la calculadora y amplía la gama de posibilidades de uso didáctico.

- El tipo de actividades que se propone a los estudiantes con la simulación del fenómeno, pretende romper con la concepción del uso de la calculadora únicamente como verificadora de respuestas o graficadora de funciones y dimensiona su uso, propiciando el desarrollo de habilidades matemáticas en la exploración, el planteamiento y la verificación de conjeturas, el trabajo con diferentes representaciones, la generalización y la sistematización, para lograr una modelación cercana al fenómeno.

Referencias

Carlos E. Vasco Uribe , *Las matemáticas escolares en el año 2001*, Formarse para la enseñanza de las matemáticas, Las competencias matemáticas, Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía Grupo de Educación Matemática, 2000, p. 29

Luis Moreno Armella , *Instrumentos matemáticos computacionales*, Seminario Nacional de Formación de Docentes, Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, Serie Memorias, Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores, Bogotá, 2002, p. 82,85,86.

Lineamientos Curriculares de Matemáticas , Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, 1998

Teresa Rojano C. y Luis Moreno Armella , *Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo*, Revista Avance y Perspectiva, Vol. 18, México, 1999, 325-333.

Vitor Duarte Teodoro, *Modelacao Computacional Em Ciencias e Matematica*, Revista Informática Educativa, Uniandes-Lidie, Vol.10 N° 2, 1997, pp. 171-182

E xplorando simetrías con Cabri

Carmen Toscano Toscano

Colegio Antonio Lenis, Sincelejo -Sucre

Resumen. El presente trabajo muestra la experiencia realizada con alumnos de grado séptimo del Colegio Antonio Lenis de Sincelejo, con quienes se realizó una actividad diseñada con el propósito de identificar las propiedades fundamentales de la simetría central utilizando la calculadora TI 92 y el *software* Cabri. La posibilidad de intervenir sobre las figuras empleando los recursos del *sofware*, así como las preguntas formuladas por la profesora para suscitar un conflicto cogn itivo, fueron fundamentales para comprobar los invariantes que caracterizan la relación geométrica en estudio.

Introducción

Con el énfasis en la introducción de la matemática moderna en los currículos escolares de los años setenta, la geometría fue una de las ramas de la matemática que se descuidó en la práctica escolar, tanto en el panorama internacional, como en el nacional. Afortunadamente esta situación ha venido cambiando y en las reformas curriculares de los años ochenta y noventa se reivindica su papel, como un área fundamental para el desarrollo del sentido espacial y del razonamiento deductivo. Así, en los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas formulados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia se reconoce que para organizar un currículo en un todo armonioso, se debe privilegiar entre otros, los conocimientos básicos que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático, como por ejemplo el pensamiento espacial.. Sobre éste último se propone *hacer énfasis en una geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio* (MEN, 1998). La idea es hacer una geometría más dinámica, es decir, no sólo contemplando estáticamente las formas de las figuras sino estudiando prioritariamente los fenómenos de movimiento o de transformaciones de las figuras así como de sus propiedades geométricas.

El hecho de sugerir la exploración activa del espacio abre puertas al estudio de las transformaciones geométricas, como operaciones que dan lugar a relaciones geométricas fundamentales. Así por ejemplo, la congruencia puede verse como el producto de una isometría y la semejanza como el resultado de una homotecia. Al estudiar las operaciones geométricas que subyacen a una relación, se propicia la interiorización de dichas relaciones pues la conceptualización se logra a partir de las acciones sobre y en el espacio, de los objetos geométricos intervinientes.

En este contexto de geometría dinámica es posible aprovechar los recursos tecnológicos disponibles para la enseñanza, tales como el programa Cabri Gémètre, diseñado de tal forma que permite manipular las representaciones de los objetos geométricos para transfo rmar de manera continua las construcciones creadas y estudiar los invariantes de las relaciones geométricas en estudio. En este artículo presentamos una experiencia de aula, con alumnos de grado séptimo, tendiente a explorar los invariantes de una de las isometrías: la simetría central. Alrededor de una tarea propuesta, se explotan las conjeturas formuladas por los alumnos para enriquecer sus ideas acerca de dicha relación. Se muestra como va evolucionando el concepto de simetría central, al aprovechar el papel mediador proporcionado por el *software* Cabri Géomètre incorporado a la calculadora TI 92, para explorar activamente propiedades geométricas como la equidistancia de puntos simétricos respecto a un eje y la colinealidad de un punto, su simétrico y el centro de simetría.

Referentes teóricos

El marco conceptual de referencia para el presente estudio está basado en la fundamentación conceptual del proyecto desarrollado por el Ministerio de Educación *"Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación y Media"* en el cual el Colegio Antonio Lenis participa desde marzo del año 2001. Principalmente dos aspectos son tenidos en cuenta: (i) la ejecutabilidad de las representaciones del software Cabri Géomètre incorporado a la calculadora TI92, instrumento de mediación utilizado, y la construcción de ambientes de aprendizaje a partir de un ambiente de situación problema.

Con respecto al primer aspecto, Moreno y Lupiañez (2000) plantean que la importancia de las herramientas computacionales para la educación matemática está asociada a su capacidad para ofrecernos medios alternativos de expresión matemática que permiten formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos. El ambiente de aprendizaje proporcionado por Cabri Géomètre posee características como la capacidad de arrastre de las figuras construidas, que propician la búsqueda de relaciones geométricas invariantes. Esta característica hace que el medio simule una "actividad cognitiva" que sin estos recursos era privativa de los seres humanos.

Por ejemplo, al tener la posibilidad de manipular dos figuras geométricas, una de las cuales es construida como imagen de la otra por una simetría central, el estudiante puede observar cómo, sin su intervención directa, la figura obtenida por simetría se modifica de tal forma que cada punto y su simétrico quedan equidistantes del centro de simetría y este a su vez resulta ser el punto medio del segmento formado por un punto y su simétrico. La exploración respeta explícitamente las reglas sintácticas del medio ambiente, en este caso de la geometría de las transformaciones, y la ejecutabilidad de las representaciones hace de estos medios parte integral de los recursos intelectuales y expresivos. Genera una forma de realidad virtual asociada a los objetos conceptuales de las matemáticas, que posibilita traerlos, virtualizados ya, a la pantalla en donde podemos manipularlos con amplitud y reconocer sus invariantes (Moreno, y Lupiañez, 2000).

En un ambiente de aprendizaje, sin embargo, no es suficiente con disponer de instrumentos con el potencial descrito en el párrafo anterior. El empleo de estos recursos debe ir acompañado de las interacciones sociales adecuadas para el desarrollo conceptual; particularmente las confrontaciones provocadas entre los alumnos o entre ellos y el profesor se reconocen como de gran interés didáctico. Un tipo de interacción propuesto por Brousseau (1986) es el de situación problema, como punto de partida de una actividad de aprendizaje. A partir de una actividad en la que se ponen en juego los conocimientos que los alumnos deben aprender, la situación problema se convierte en el detonador de la actividad cognitiva. Para que esto suceda debe tener las siguientes características:

- debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
- debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.
- debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.
- debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y proponer nuevas soluciones.
- debe contener su propia validación.

La puesta en duda de los conocimientos genera un conflicto de naturaleza cognitiva en el alumno, que lo lleva a tomar conciencia de respuestas contradictorias que lo incitan a dudar de la suya. Esto, sumado a la oposición que tenga de parte del profesor o del grupo escolar, se constituye en un conflicto socio-cognitivo, aspecto que se ha puesto de relieve con el advenimiento de las corrientes psico - sociales del desarrollo cognitivo. Según estas corrientes, el aprendizaje se logra principalmente mediante las confrontaciones de las acciones o de las ideas, entre las personas. La oposición social de puntos de vista caracteriza al conflicto socio cognitivo y es el pivote de la interacción didáctica efectiva (Moreno y Waldegg, s.f.)

En síntesis, con el apoyo de los recursos de mediación que brinda el *software* Cabri Géomètre instalado en la calculadora TI 92 y con un ambiente de interacción social que favorezca el conflicto cognitivo a través del intercambio de opiniones, es posible generar una situación de aprendizaje a partir de la exploración consciente de las propiedades invariantes de una relación o transformación geométrica.

Una mirada a la actividad con los alumnos

La actividad se organizó alrededor de una exploración del concepto de simetría central, utilizando la calculadora TI 92. A continuación se muestran ejemplos de la interacción didáctica llevada a cabo, en donde se observa la evolución conceptual lograda a partir de la interacción con el *software* y de las preguntas dirigidas por la profesora.

Inicialmente se solicitó a los alumnos construir dos puntos *A* y *O,* utilizar la opción *Simetría* del menú de opciones del programa Cabri Géomètre, para aplicar la simetría a *A*, respecto de *O*, y explicar lo que observaban.

Algunos alumnos tomaron la palabra y explicaron que observaban la aparición de un nuevo punto (figura 1):

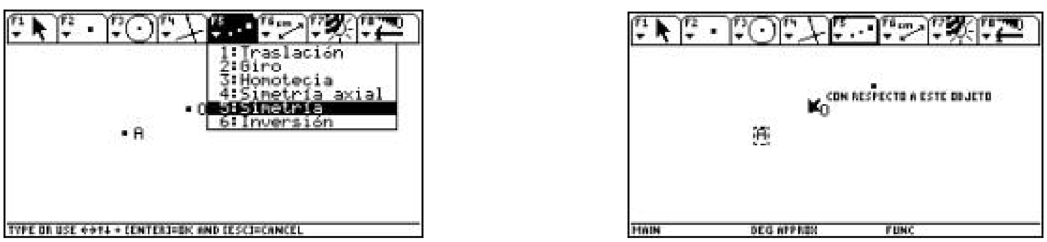


Figura 1

A1: *Lo que yo observé es que cuando pulsamos primero A y luego O sale de repente otro punto.*

A2: *Nosotros también.*

A3: *Aparece otro punto idéntico, a la izquierda y en la misma dirección*

Esta última intervención fue aprovechada por la profesora para orientar la discusión, hecho que da lugar a la siguiente conversación:

P: *¿Qué significa en la misma dirección?*

A3: *Lo que quiero decir es que si trazáramos una recta, estaría en la misma dirección que el punto O. Es decir, el punto nuevo está en la misma recta. Además tienen las mismas longitudes.*

P: *Llamemos B al punto simétrico. ¿Puedes explicarte mejor?*

A3: *Entonces digo que A, B, y O están en la misma recta y las longitudes de los segmentos AO y OB son iguales.*

P: *¿Están todos de acuerdo? ¿Qué pasa si movemos el punto A?*

A4: *Nos podemos dar cuenta que el punto B se mueve también.*

A5: *Yo observo que si se mueve A hacia arriba, B se mueva hacia abajo; es como un sube y baja.*

A3: *Si, se mueve al contrario, porque tiene que quedar sobre la misma recta.*

A6: *Yo observé que las distancias siguen siendo iguales. Por ejemplo, a mi me dio 1,66 cm, pero yo subo el punto A, el número aumenta pero sigue siendo iguales los dos* (figura 2).

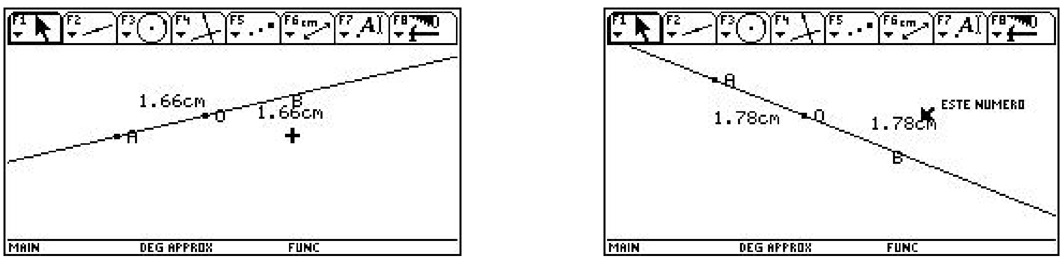


Figura 2

A5: *Aunque aumente o disminuyan las distancias se van a mantener iguales.*

P: *Si unimos con un segmento los puntos A y B, ¿dónde está ubicado exactamente el punto O?*

A7: *En medio.*

En las exploraciones iniciales los estudiantes parecen haber identificado las propiedades invariantes de la simetría central: la equidistancia de un punto y su simétrico al centro de simetría y la colinealidad de los tres puntos. La profesora intenta entonces lograr un consenso acerca de estas. Para ello, pregunta:

P: *De acuerdo con lo que han observado, ¿cuáles podrían ser las condiciones para que un punto sea el simétrico de otro punto?*

Ante la pregunta surgen diversas respuestas, pero todas referidas a la equidistancia del centro de simetría a los puntos, sin llegar a concretar exactamente las condiciones. Por ejemplo, *"un punto es simétrico de otro si queda a la misma distancia", "un pu nto es simétrico de otro si está a la misma longitud del punto O".*

Como todos parecen estar de acuerdo, la profesora utiliza un contra ejemplo, para suscitar un conflicto cognitivo y retomar la discusión:

P: *Miremos el siguiente ejemplo (*figura 3*). Ustedes acaban de afirmar que para que dos puntos sean simétricos, las distancias al centro de simetría deben ser iguales. ¿Será que B es el simétrico de A?*

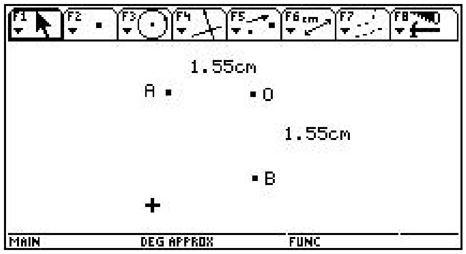


Figura 3

A4: *No, por que no están sobre la misma línea.*

A3: *No por que no están en la misma dirección.*

A8: *El punto B debería estar en la misma dirección de A. Suponiendo que el punto O sea el centro de simetría. Si trazáramos una línea deberían quedar en línea.*

Nuevamente la profesora retoma las palabras de los alumnos y además induce la formulación de conjeturas, al pedir una predicción que anticipe un "comportamiento" de la figura:

P: *¿Qué quieres decir con "la misma dirección". ¿Dónde debería estar B, según tu?*

A3: *Supongo que el punto B debe estar por acá* (señala el sitio en forma correcta), *porque si O es el centro de la simetría y trazamos una línea por A y O, B debe quedar en la misma línea.*

A7: *Es que si movemos el punto A, se ve que B no es el simétrico porque no queda alineado. Así como lo tiene O no es el punto medio del segmento AB. La profesora no utilizó la herramienta simetría.*

P: *¿Pueden precisar mejor las condiciones que me habían dicho antes? ¿cuáles podrían ser las condciciones para que un punto sea el simétrico de otro punto?*

A1: *un punto es simétrico de otro si queda a la misma distancia y si los tres puntos quedan sobre la misma línea.*

Se llega a un acuerdo general sobre esta condición. La profesora plantea ahora otra pregunta, que motiva la formulación de una nueva conjetura: *Si aplicamos la simetría central a un objeto, cómo quedaría su imagen?*

Una estudiante dice que probablemente quedará como una fotocopia del primero y otra asegura que la imagen quedará como si se viera la primera en un espejo. La profesora propone hacer la construcción de un triángulo y observar si los alumnos tienen la razón. La exploración realizada sobre una figura como la número 4, lleva a la siguiente conversación:

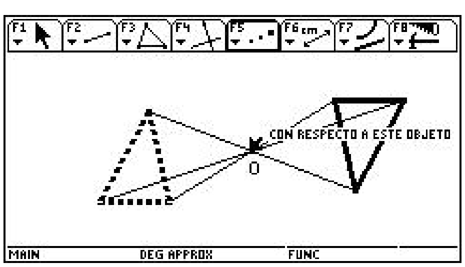


Figura 4

P: *Ahora que hicieron la construcción, ¿qué pueden concluir?*

A4: *Yo observo que se forma otro triángulo idéntico al primero, pero al revés.*

P: *¿Cómo así al revés?*

A5: *Si, mire, quedó como si le hubiera dado una vuelta de 180°. O es el centro de simetría y queda como si hubiera dado la vuelta alrededor del punto O.*

A6: *No es como un espejo porque no saldría al revés, sino en la misma posición. En cambio acá, es com o si hubiera ido dando vueltas y vueltas.*

P: *¿Cómo lo comprobamos?*

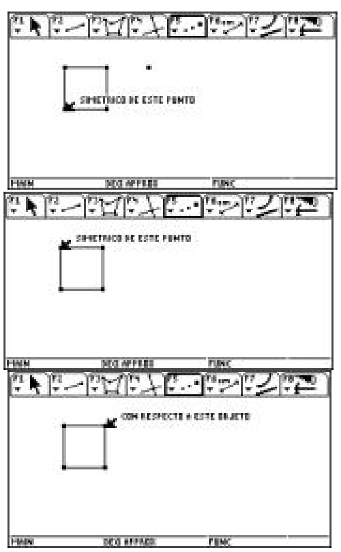
A2: *Haciendo la rotación.*

Para finalizar la sesión la profesora pide algunas conclusiones del ejercicio:

A10: *Hemos aprendido sobre simetría. Para hacer una simetría se necesita más de un punto, porque uno es el centro de simetría.*

A6: *Hemos aprendido que hay unas condiciones para que un punto sea simétrico de otro: al trazar una línea por el punto y su simétrico, el centro de simetría queda en la mitad, y a la misma distancia de ambos puntos.*

A4: *Yo aprendí que en la calculadora ya existe una herramienta para no tener que medir sino que la usamos para construir puntos simétricos a otros y hacer muchos diseños. Yo la usé para hacer este* (figura 5).



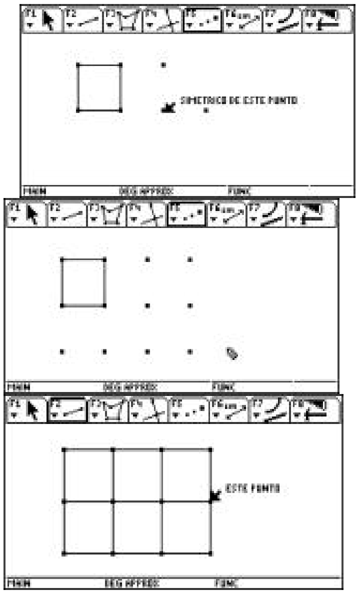


Figura 5

En síntesis, a medida que se hacían preguntas se fue logrando la conceptualización de lo que es una simetría central, inicialmente en una forma intuitiva, luego con más argumentos. El software Cabri Géomètre actuó como socio cognitivo, permitiendo la generación del significado de la simetría central. El contraejemplo presentado sirvió para concentrar la atención en los invariantes del concepto. Las respuestas dadas por los alumnos son una muestra de la comprensión del tema sin pensar en una formalización del mismo, que es objeto de estudio en cursos superiores.

Conclusiones

En la actividad se pudieron observar tres momentos fundamentales en la conceptualización geométrica. La primera consiste en la construcción de una figura (en este caso puntos y triángulos). La segunda consiste en visualizar todo lo que es posible en esta figura aprovechando la posibilidad de manipulación de las construcciones y la tercera consiste en el razonamiento, todo esto "acompañado de instrumentos de control que suministra el medio dinámico Cabri, como la medición y verificación de propiedades" (Moreno, 2000)

El ambiente proporcionado por Cabri Géomètre permitió a los alumnos la identificación de propiedades y la reflexión acerca de las preguntas hechas. Es decir, el ambiente actuó como mediador en la formulación de preguntas, a la vez que aportó herramientas para explorar dichas preguntas, situación un tanto difícil de obtener cuando trabajamos en un ambiente con papel y lápiz, puesto que el dibujo es una representación estática que no permite percibir si las propiedades se mantienen cuando varía uno de los componentes de la figura.

El tipo de actividad desarrollada contrasta fuertemente con las actividades comunes en nuestra escuela donde se hace énfasis en el dominio de algoritmos. En contraposición, hoy día se trata de que los alumnos tengan la posibilidad de explorar, reflexionar y construir invariantes para generar conocimiento matemático y desarrollar habilidades matemáticas.

Referencias

Brousseau G (1986). *La Théorisation des phenomenes d'eseignement des mathématiques*. En MORENO L; WALDEGG G (s.f*.) Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas*. En RICO L (ed) *Didáctica de las Matemáticas*, Capítulo 3, Editorial Síntesis, Madrid.

Ministerio de Ecuación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional. Serie Lineamientos.

Moreno L (2000). *Ideas geométricas del currículo presentadas mediante el Cabri Géomètre.* En (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

Moreno L y **Sacristan A** (2000). *Abstracciones y demostraciones contextualizadas: Conjeturas y generalizaciones en un micromundo computacional .* Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Moreno L y **Lupiañez J** (2000). *Tecnología y representaciones semioticas en el aprendizaje de las matematicas.* En (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

Moreno L; Waldegg G (s.f*.) Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas*. En RICO L (ed) *Didáctica de las Matemáticas*, Capítulo 3, Editorial Síntesis, Madrid.

---

[1] Nuestros más sinceros agradecimientos para Carlos Abel Álvarez, Hugo Cuellar y Frank Martínez por sus aportes, comentarios y sugerencias.

[2] Los autores forman parte del Grupo de Coordinación del Proyecto de Incorporación de Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia del Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

[3] El autor pertenece al Grupo Coordinador del Proyecto de Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia del Ministerio de Educación Nacional.

[4] *Cómo se realizo la modelación del problema paso a paso: Después de varios intentos de modelación se llego a la siguiente, la cual es interesante por su sencillez. a- Dibuje una circunferencia y mida su longitud. b- Dibuje un punto sobre esta circunferencia (este punto será la meta). c- Utilizando edición numérica, escriba cualquier número (por ejemplo 2.5). Este número representa el tiempo transcurrido de carrera. d- Divida la longitud de la circunferencia entre 3, 4, 6. Los valores obtenidos expresan las velocidades de Toyota, Honda, Mazda respectivamente. e- Multiplique cada una de las velocidades de los autos por el tiempo. Cada uno de estos valores expresará la distancia por cada auto (suponiendo que el movimiento fuera línea recta). f- Transfiera la distancia recorrida a partir del punto de meta. Los puntos obtenidos representan a cada uno de los autos en carrera.*