CAPÍTULO 2

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Así como pueden definirse diversas operaciones entre números, también existen operaciones entre conjuntos. El resultado de una operación entre conjuntos es a su vez un conjunto.

Fijemos un conjunto universal $\mathcal{U}$ y consideremos todos los subconjuntos de $\mathcal{U}$. Entre estos conjuntos están definidas las operaciones de unión, intersección y diferencia. Además, para cada conjunto se define el complemento. El resultado de cada una de estas operaciones es un subconjunto de $\mathcal{U}$.

1. La unión de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

> *La* unión $A \cup B$ *de* A *con* B *es el conjunto cuyos elementos pertenecen a* A *o pertenecen a* B.

Por comprensión, la unión entre los conjuntos A y B se define así:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

En particular, A y B son subconjuntos de $A \cup B$, pues todos los elementos de A y todos los elementos de B pertenecen a $A \cup B$.

En un diagrama de Venn representamos la unión de dos conjuntos sombreando el área que cubren ambos conjuntos (ver Figura 1).

EJEMPLO 2.1. Si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 5\}$, entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

EJEMPLO 2.2. Si consideramos el intervalo abierto $(0, 1)$ y el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$, entonces $(0, 1) \cup \{0, 1\} = [0, 1]$

Si A es un subconjunto de B, esto es, $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.

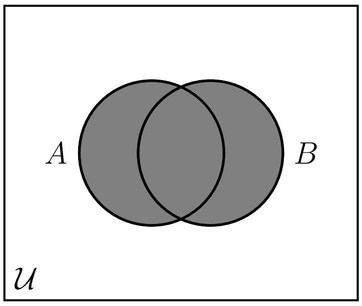


FIGURA 1. La unión de los conjuntos A y B.

EJEMPLO 2.3. Si $A = \{1, 4, 9\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

EJEMPLO 2.4. Si $A = \{x \mid x$ es múltiplo de $5\}$ y $B = \{x \mid x$ es múltiplo de $10\}$, entonces

$$A \cup B = \{x \mid x \text{ es múltiplo de 5 }\},$$

dado que todo número múltiplo de 10 es también múltiplo de 5. En este caso, $B \subseteq A$.

La unión de un conjunto A con el conjunto vacío es el mismo conjunto A, puesto que $\emptyset$ no tiene elementos:

$$A \cup \emptyset = A.$$

La unión de un conjunto A con A es el mismo conjunto A:

$$A \cup A = A.$$

2. La intersección

Sean A y B dos conjuntos.

La *intersección* $A \cap B$ entre A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y pertenecen a B.

Por comprensión, la intersección de los conjuntos A y B se define como

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

EJEMPLO 2.5. Sean $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{n \mid n \leq 11\}$, $P = \{n \mid n \text{ es primo}\}$y $B = \{n \mid n \text{ es impar y } n \leq 20\}$, entonces

$$\begin{aligned} A \cap B =& \{1,\ 3,\ 5\ ,\ 7,\ 9,\ 11\} \\ A \cap P =& \{2,\ 3\ ,5\ ,7\ ,\ 11\} \\ B \cap P =& \{3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.6. Si consideramos los intervalos $[0, 5)$ y $(3, 6]$, entonces

$$[0, 5) \cup (3, 6] = [0, 6] \qquad \text{y} \qquad [0, 5) \cap (3, 6] = (3, 5).$$

Si A es un subconjunto de B, esto es $A \subseteq B$, entonces

$$A \cap B = A.$$

En particular, $A \cap A = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$.

EJEMPLO 2.7. La intersección del intervalo $(0, 1)$ con el conjunto $\{0, 1\}$ no tiene elementos, es decir, es el conjunto vacío:

$$(0, 1) \cap \{0, 1\} = \emptyset,$$

es decir que $(0, 1)$ y $\{0, 1\}$ son conjuntos disjuntos.

En particular, dos conjuntos son *disjuntos* si y sólo si su intersección es vacía.

En un diagrama de Venn la intersección de dos conjuntos se representa por la región que está determinada por el interior de las curvas cerradas que determinan los conjuntos. Esta región se la destaca con un sombreado o subrayado (ver Figura 2). Obsérvese que la intersección de dos conjuntos es vacía si y solo si no hay elementos comunes entre ellos. Esto se grafica con dos curvas cerradas que no se cortan.

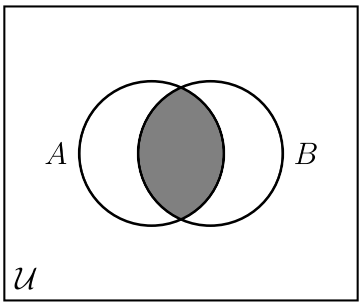


FIGURA 2. Intersección de A y B.

3. Complemento de un conjunto

Fijemos $\mathcal{U}$ un conjunto universal y A un subconjunto de $\mathcal{U}$.

> *El* complemento *de A con respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto cuyos elementos son todos los elementos de $\mathcal{U}$ que no pertenecen a A y se denota por A^c.*

En símbolos,

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}.$$

En un diagrama de Venn el complemento de A es la región exterior de la curva cerrada que determina A y lo destacamos con un subrayado o sombreado.

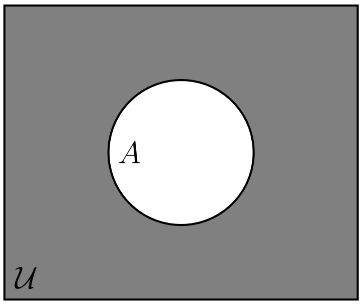


FIGURA 3. Complemento de A.

EJEMPLO 2.8. Si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números pares, entonces $\mathbb{P}^c$ es el conjunto de los números naturales impares.

EJEMPLO 2.9. Si $\mathcal{U}$ es un plano, y P es un punto en el plano, entonces P^c es el plano sin el punto P.

EJEMPLO 2.10. Sea $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{Z}^c = \emptyset$.

4. Diferencia

Sean A y B dos conjuntos.

La diferencia *o* complemento relativo $A - B$ *entre* A *y* B
es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A *y no pertenecen a* B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Observemos que $A^c = \mathcal{U} - A$. En un diagrama de Venn representamos la diferencia entre los conjuntos A y B, destacando la región que es interior a A y exterior a B (ver Figura 4).

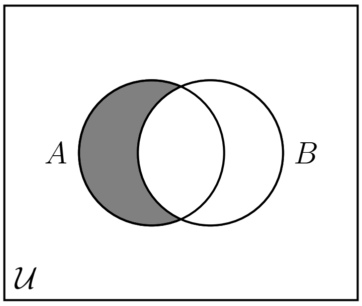


FIGURA 4. Diferencia entre el conjunto A y el conjunto B.

EJEMPLO 2.11. $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \leq 0\}$.

EJEMPLO 2.12. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} - \{2,\ 4,\ 6,\ 8\} = \{1,\ 3,\ 5\}$

EJEMPLO 2.13. $[-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$

4.1. Propiedades de las operaciones. Resumimos a continuación las propiedades que cumplen las operaciones de unión, intersección y complementación:

Propiedad conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

Propiedad asociativa

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Propiedad distributiva

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad\qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Los siguientes ejemplos ilustran estas propiedades.

EJEMPLO 2.14. Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$, entonces

$$(A \cap B) \cap C = \{2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{3\}$$

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cap \{3\} = \{3\}.$$

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

EJEMPLO 2.15. Sea $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, y sean $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 3, 6, 9\}$ y $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \cap C) &= \{0, 6\} \cup \emptyset = \{0, 6\}, \\
A \cap (B \cup C) &= \{0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 9\} = \{0, 6\}, \\
(A \cup B) \cap (A \cup C) &= \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}, \\
A \cup (B \cap C) &= \{0, 2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 9\} = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.16. Si A, B y $\mathcal{U}$ son como en el Ejemplo 2.15, entonces

$$(A \cup B)^c = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}^c = \{1, 5, 7\} \qquad \text{y}$$

$$A^c \cap B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{1, 5, 7\}.$$

$$(A \cap B)^c = \{0, 6\}^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\} \qquad \text{y}$$

$$A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

Destacamos que en estos ejemplos sólo hemos hecho una comprobación en un caso particular, y no es suficiente para demostrar que la misma se cumple para cualquier par de conjuntos A y B.

5. Ejercicios

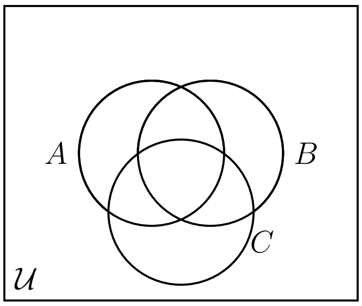
1. Si $\mathcal{U} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ es el conjunto universal y $A = \{1,\ 4,\ 7,\ 10\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $C = \{2,\ 4, 6,\ 8\}$, defina por extensión los siguientes conjuntos:

   a) $A \cup B$
   b) $A - B$
   c) A^c
   d) $\mathcal{U}^c$
   e) $B \cap \mathcal{U}$
   f) $B^c \cap (C - A)$
   g) $(A \cap B)^c \cup C$
   h) $B \cap C$
   i) $A \cup \emptyset$
   j) $A \cap (B \cup C)$
   k) $(A \cap B) \cup C$
   l) $A \cap B) - C$
   m) $(A \cup B) - (C - B)$

2. Sea $\mathcal{U} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots, 12\}$, $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$, $B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$, $C = \{2,\ 3,\ 6,\ 12\}$ y $D = \{2,\ 4,\ 8\}$. Determine los conjuntos

   a) $A \cup B$
   b) $A \cap C$
   c) $(A \cup B) \cap C^c$
   d) $A - B$
   e) $C - D$
   f) $(B - D) \cup (D - B)$

3. En diagramas de Venn como el de la figura, sombree los conjuntos siguientes:



   a) $A \cup B$
   b) $A \cap B$
   c) $(A \cup C) \cap B$
   d) $A \cap B \cap C$
   e) $(A \cup C)^c$
   f) $(A - B) \cap C$
   g) $(A \cap C) \cup C^c$
   h) $(A \cap B \cap C)^c$
   i) $(A - B) - C$
   j) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$